

RAOUL BRICARD

Théorème sur les courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 418-421

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__418_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'2e, T2b]

THÉORÈME SUR LES COURBES PLANES ;

PAR M. RAOUL BRICARD.

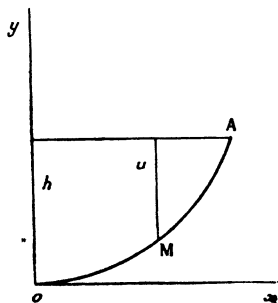
Soit OA un arc de courbe plane, convexe et tel que les tangentes en O et A, orientées suivant un sens de circulation défini sur l'arc, fassent entre elles un angle au plus égal à π . Désignons par u la distance d'un point M de l'arc à la parallèle menée par le point A à la tangente en O, par ρ le rayon de courbure en M, par L la longueur de l'arc OA. Le théorème que je me propose d'établir est le suivant :

On ne peut avoir en tous les points de l'arc OA l'inégalité

$$\rho u > \lambda,$$

λ étant lui-même supérieur à $\frac{4L^2}{\pi^2}$.

Prenons comme axe des x la tangente en O (*figure*),



Oy étant dirigé du côté de la concavité de l'arc. Il résulte des hypothèses que l'ordonnée d'un point qui se

déplace sur la courbe de O en A croît constamment. Il en est de même de l'angle θ que fait avec Ox la tangente en ce point. Soient h l'ordonnée du point A, y l'ordonnée du point M. On a $u = h - y$. Soit K^2 la borne inférieure des valeurs que prend l'expression $\rho(h - y)$ le long de l'arc OA, de sorte qu'on a en tout point

$$(1) \quad \rho(h - y) \geq K^2.$$

Si le rayon de courbure en A est fini, K est nul. Si ce rayon de courbure est infini, il peut en être autrement.

On a, avec les notations ordinaires,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin \theta}{dy} \frac{d\theta}{d\theta},$$

d'où, en vertu de (1),

$$\frac{\sin \theta}{dy} \frac{d\theta}{d\theta} \leq \frac{h - y}{K^2}.$$

On en conclut, en intégrant de O en M,

$$(2) \quad 1 - \cos \theta \leq \frac{1}{K^2} \left(hy - \frac{1}{2} y^2 \right),$$

inégalité valable en tous les points de l'arc OA.

On a aussi

$$(3) \quad 1 + \cos \theta \leq 2,$$

d'où, par multiplication, et en extrayant les racines carrées,

$$\sin \theta \leq \frac{1}{K} \sqrt{2hy - y^2}$$

ou encore

$$(4) \quad \frac{1}{\sin \theta} \geq \frac{K}{\sqrt{2hy - y^2}}.$$

On a, d'autre part,

$$L = \int_0^h \frac{dy}{\sin \theta},$$

d'où, en vertu de (4),

$$L \geq K \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{2hy - y^2}} = K \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{h^2 - (h - y)^2}} = \frac{\pi}{2} K,$$

d'où enfin

$$(5) \quad K^2 \leq \frac{4L^2}{\pi^2}.$$

K^2 étant la borne inférieure de ρu , il est impossible, d'après cela, que ce produit soit partout supérieur à $\lambda > \frac{4L^2}{\pi^2}$, ce qui est le théorème à démontrer.

L'inégalité (5) ne peut se changer en inégalité que s'il en est de même des inégalités (2) et (3) en tous les points de l'arc OA. Il faut en particulier que l'on ait

$$1 + \cos \theta = 2$$

ou $\theta = 0$, ce qui est impossible si l'arc OA ne se confond pas avec Ox.

La proposition établie trouve une application en Résistance des matériaux, dans la théorie du « flambement » d'une poutre soumise à une compression longitudinale. Supposons, en effet, que OA soit la forme que prend la fibre neutre d'une poutre encastree en O, et soumise à son extrémité A à une force de compression P, dirigée parallèlement à Ox. Si l'on envisage la portion MA de la poutre, on voit que, pour l'équilibre, il faut que le moment fléchissant en M, $\mathfrak{M}$, soit égal en valeur absolue au moment de P par rapport au point M :

$$\mathfrak{M} = Pu$$

D'autre part, on a, d'après une formule fondamentale dans la théorie de la flexion,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \kappa}{\partial x} = \frac{P u}{EI},$$

ou encore

$$P = \frac{EI}{\rho u}.$$

D'après ce qui vient d'être démontré, on peut supposer qu'au point M (qui peut être arbitrairement choisi), on a

$$\rho u < \frac{4 L^2}{\pi^2},$$

l'égalité étant exclue, si OA est un arc de courbe véritable. On aura donc

$$(6) \quad P > \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}.$$

Ainsi la force qui produit un flambement, si petit qu'il soit, doit satisfaire à cette inégalité.

L'inégalité (6), connue sous le nom de *condition d'Euler*, s'établit en général d'une manière différente.