

R. DONTOT

Cyclides du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 401-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__401_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M¹4f]

CYCLIDES DU QUATRIÈME DEGRÉ ;

PAR M. R. DONTOT.

1. Nous rappellerons d'abord quelques résultats connus (voir DARBOUX, *Géométrie analytique*, p. 410 et suiv.). Une cyclide rapportée à ses axes

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0$$

est, en général, de cinq manières différentes, l'enveloppe de sphères bitangentes dont le centre décrit une quadrique à centre, la déférente, et qui demeurent orthogonales à une sphère directrice fixe. Cette sphère a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2P = 0 \quad (P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant liés par les relations

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\lambda - A} + \frac{\beta^2}{\lambda - A'} + \frac{\gamma^2}{\lambda - A''} - 1 = 0, \\ \frac{C\alpha}{\lambda - A} + \frac{C'\beta}{\lambda - A'} + \frac{C''\gamma}{\lambda - A''} + \lambda + \delta = 0, \end{cases}$$

λ étant une des cinq racines de l'équation

$$(I \text{ bis}) \quad \frac{C^2}{\lambda - A} + \frac{C'^2}{\lambda - A'} + \frac{C''^2}{\lambda - A''} + D - \lambda^2 = f(\lambda) = 0.$$

L'ensemble des plans des deux courbes planes suivant

lesquelles la sphère coupe la cyclide est donné par

$$\begin{aligned} \pi(xyz) &= 0, \\ \pi(xyz) &= P^2 + 2\lambda P + (A - \lambda)x^2 + (A' - \lambda)y^2 + (A'' - \lambda)z^2 \\ &\quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D, \end{aligned}$$

λ ayant une des valeurs précédentes.

Les résultats précédents ne sont pas tout à fait généraux : il peut arriver en effet que $\lambda - A$ soit nul : un calcul élémentaire conduit alors aux conditions

$$\begin{aligned} \lambda &= A, \quad C = 0, \quad \alpha = 0, \\ \text{(II)} \quad &\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{C'\beta}{A-A'} + \frac{C''\gamma}{A-A''} + A + \delta \right)^2 \\ &- \left(\frac{C'^2}{A-A'} + \frac{C''^2}{A-A''} + D - A^2 \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{A-A'} + \frac{\gamma^2}{A-A''} - 1 \right) = 0, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ou, dans le cas où $A = A'$, aux conditions

$$\begin{aligned} \lambda &= A = A', \quad C = 0, \quad \alpha = 0, \\ \text{(II bis)} \quad &\left\{ \begin{aligned} &2C'\beta \left(\frac{C''\gamma}{A-A''} + A + \delta \right) - C'^2 \left(\frac{\gamma^2}{A-A''} - 1 \right) \\ &\quad - \beta^2 \left(\frac{C''^2}{A-A''} + D - A^2 \right) = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

2. La sphère bitangente peut, dans certaines hypothèses, devenir sphère inscrite. Il est bien évident qu'il importe, si l'on veut faire une théorie complète des cyclides, de connaître dans quel cas il en est ainsi. On trouve par un calcul élémentaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad &\left\{ \begin{aligned} &C = 0, \quad \frac{C'^2}{A-A'} + \frac{C''^2}{A-A''} + D - A^2 = 0, \\ &\lambda = A, \quad \alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{A-A'} + \frac{\gamma^2}{A-A''} - 1 = 0, \\ &\quad \frac{C'\beta}{A-A'} + \frac{C''\gamma}{A-A''} + A + \delta = 0, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ou bien

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} C = C' = 0, \quad A = A' = \lambda, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \\ \left(\frac{C''\gamma}{A - A''} + A + \delta \right)^2 \\ - \left(\frac{\gamma^2}{A - A''} - 1 \right) \left(\frac{C''^2}{A - A''} + D - A^2 \right) = 0, \end{array} \right.$$

ou bien

$$(IV \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} C = C' = 0, \quad A = A' = A'', \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \\ 2C''\gamma(A + \delta) - \gamma^2(D - A^2) + C''^2 = 0. \end{array} \right.$$

Pour n'être pas obligé de revenir sur ces distinctions, remarquons qu'il est inutile de supposer $A = A' = A''$, $C = C' = C'' = 0$, cas où la cyclide se décompose en deux sphères concentriques et que, par un changement d'axes évident, on ramène les hypothèses $A = A'$ ou $A = A' = A''$ aux hypothèses envisagées

$$(A = A', \quad C = 0) \quad \text{ou} \quad (A = A' = A'', \quad C = C' = 0).$$

L'interprétation des résultats précédents est simple.

Conditions (II) et (II bis). — La déferente et la sphère directrice sont réduites au même plan. Les sphères variables sont orthogonales à ce plan : leur rayon varie suivant une loi peu simple.

Conditions (III). — La déferente est une conique. La cyclide est l'enveloppe de sphères dont le centre décrit la conique déferente et qui sont orthogonales à un cercle du **plan** de cette déferente, ou, si l'on veut, à une infinité de sphères directrices appartenant à un réseau linéaire (dont fait partie évidemment le plan de la déferente). Ce cercle, commun à toutes ces sphères directrices, est dit *cercle directeur*.

Conditions (IV) et (IV bis). — La cyclide est l'en-

veloppe de sphères dont les centres sont alignés : elle est manifestement de révolution.

3. La cyclide apparaît donc suivant les cas comme une enveloppe de sphères dont l'équation dépend de deux ou un paramètre. Nous désignerons par *normaux* les systèmes de sphères bitangentes, par *exceptionnels* les systèmes de sphères inscrites, par *réguliers* les systèmes de sphères, dont le centre ne décrit ni un plan ni une droite, par *singuliers* les autres.

Le nombre et la nature des systèmes de sphères bitangentes ou inscrites dépend de la nature des racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - A)(\lambda - A')(\lambda - A'')f(\lambda).$$

Cette équation a cinq racines, nous nous proposons d'établir d'abord que ces racines, en général, sont distinctes.

Cherchons, en effet, les points singuliers de la surface, autres, bien entendu, que les points de l'ombilicale. Ils sont définis par

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + 2Ax + 2C = 0,$$

$$y(x^2 + y^2 + z^2) + 2A'y + 2C' = 0,$$

$$z(x^2 + y^2 + z^2) + 2A''z + 2C'' = 0,$$

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 3(Cx + C'y + C''z) + 2D = 0,$$

système qu'on résout si $CC'C'' \neq 0$ en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda = 0,$$

d'où

$$x = \frac{C}{\lambda - A}, \quad y = \frac{C'}{\lambda - A'}, \quad z = \frac{C''}{\lambda - A''},$$

λ vérifiant les deux équations

$$f(\lambda) = 0, \quad f'(\lambda) = 0.$$

Si $C = 0$ par exemple, outre la solution précédente, on trouve *celles* qui sont définies par

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2A &= 0, \\ y &= \frac{C'}{A - A'}, \quad z = \frac{C''}{A - A''}, \\ f(A) &= 0. \end{aligned}$$

On voit donc qu'à toute racine multiple et différente de A, A', A'' de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ correspond un et un seul point singulier de la surface : à toute racine A, A', A'' de $\varphi(\lambda) = 0$ qui est en même temps racine de $f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire au moins racine double de $\varphi(\lambda) = 0$, correspondent deux points singuliers distincts, si, par exemple,

$$\frac{C'^2}{(A - A')^2} + \frac{C''^2}{(A - A'')^2} + 2A \neq 0,$$

c'est-à-dire si la racine A, A' ou A'' de $\varphi(\lambda)$ est racine *simple* de $f(\lambda) = 0$.

Il est possible de préciser la nature du point singulier : supposons que λ soit une racine double de $f(\lambda) = 0$. L'équation du cône des tangentes, rapportée à deux axes passant par le point singulier, sera

$$\begin{aligned} &\left[\frac{Cx}{(\lambda - A)^2} + \frac{C'y}{(\lambda - A')^2} + \frac{C''z}{(\lambda - A'')^2} \right]^2 \\ &+ (A - \lambda)x^2 + (A' - \lambda)y^2 + (A'' - \lambda)z^2 = 0. \end{aligned}$$

On a donc un véritable cône si

$$\frac{C^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{C'^2}{(\lambda - A')^3} + \frac{C''^2}{(\lambda - A'')^3} - 1 \neq 0,$$

c'est-à-dire si $f''(\lambda) \neq 0$. La racine λ est alors une racine double et la surface correspondante, l'inverse d'une quadrique à centre. Si, au contraire, λ est une racine triple, il y a au point singulier deux plans tangents, la cyclide est l'inverse d'une quadrique à plans

directeurs. Si $C = 0$, on trouve pour cône des tangentes

$$\left[x \sqrt{f'(A)} + y \frac{C'}{A-A'} + z \frac{C''}{A-A''} \right]^2 + (A' - A)y^2 + (A'' - A)z^2 = 0,$$

qui est un véritable cône dans le cas où A n'est pas racine double de $f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire encore lorsque les deux points singuliers correspondant à A sont distincts. Dans ce cas, la cyclide est l'inverse d'un cône.

On voit donc qu'à tout point singulier de la surface correspond une racine au moins double pour l'équation $\varphi(\lambda) = 0$. Dans le cas général, la cyclide n'a pas de points singuliers et l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a cinq racines distinctes.

On remarquera qu'une enveloppe de sphères inscrites a deux points singuliers : une cyclide de Dupin, enveloppe de sphères inscrites de deux façons différentes, en a quatre *et que les réciproques sont vraies*.

4. Il est maintenant suffisamment établi que l'étude et la solution si possible de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ doivent précéder toute étude d'une cyclide donnée. Supposons donc C, C', C'' différents de 0, par suite $A \neq A' \neq A''$ et pour fixer les idées $A < A' < A''$. L'équation $\varphi(\lambda) = 0$ a cinq racines, dont trois sont réelles et distinctes, auxquelles correspondent trois systèmes normaux réguliers de sphères bitangentes : les différentes sont trois quadriques homofocales à centre (un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes). Si la cyclide n'a pas de points doubles (en dehors de l'ombilicale), il y a en outre deux systèmes de sphères normaux réguliers : s'il y a un point double, il n'y a qu'un seul système normal régulier de plus.

Rappelons que les centres des sphères directrices

sont suivant les cas cinq points distincts O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 , dont trois sont réels, au moins, ou cinq points dont trois sont distincts, et distincts du point double, et les deux autres confondus avec le point double. La directrice ayant pour centre le point double est de rayon nul; toutes les sphères directrices passent donc par ce point; la cyclide est de trois façons différentes podaire d'une quadrique à centre. Ces trois quadriques à centre, homothétiques des déférentes, sont homofocales.

Dans l'un et l'autre cas, quatre quelconques des points O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 forment un tétraèdre conjugué à la directrice dont le cinquième est le centre et a la déférente correspondante. Du nombre de cônes distincts passant par l'intersection d'une déférente et de la directrice correspondante, on déduit aisément que les focales de la cyclide sont dans un cas [pas de racines doubles pour $\varphi(\lambda) = 0$] cinq biquadratiques sphériques sans point double; dans le second [$\varphi(\lambda)$ a une racine double], quatre biquadratiques ayant au point double de la cyclide un point double, l'une d'elles étant tracée sur un cône isotrope.

Il est même aisé de montrer, comment la connaissance des racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ permet de former effectivement l'équation des cônes passant par une focale. Prenons par exemple la focale tracée sur la directrice O_1 , correspondant à la racine λ_1 ; soit λ_2 une racine différente de λ_1 .

L'un des cônes cherché a pour équation

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{x^2}{\lambda_1 - A} + \frac{y^2}{\lambda_1 - A'} + \frac{z^2}{\lambda_1 - A''} - 1 \right) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - 2 \frac{Cx}{\lambda_1 - A} - 2 \frac{C'y}{\lambda_1 - A'} - 2 \frac{C''z}{\lambda_1 - A''} - 2\lambda_1 = 0.$$

La vérification est aisée.

5. Le cas où l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet une ou plusieurs racines *simples* A , A' ou A'' ne se différencie pas essentiellement du précédent. A chacune de ces racines correspond une série de sphères normale singulière; une déférente disparaît, une directrice devient plane et les foyers correspondants sont sur une quartique bicirculaire. On voit que les quartiques bicirculaires remplacent les biquadratiques sphériques dans les cas de dégénérescence de la sphère qui les porte, ce qui n'a rien de surprenant. En particulier, les focales d'une quartique bicirculaire sont, en général, quatre biquadratiques sphériques tracées sur des sphères orthogonales deux à deux et orthogonales au plan de cette quartique.

Supposons alors que C étant nul, C' et C'' soient différents de 0. Supposons en outre que $f(A)$ soit nul. Si $A < A' < A''$, la racine A est simple ou double pour $f(\lambda) = 0$ et, par suite, $\varphi(\lambda) = 0$ admet cinq racines réelles, savoir : A , racine double et trois racines distinctes entre elles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ pouvant être égal à A . La cyclide admet un plan de symétrie, deux points singuliers distincts ou un point singulier avec en ce point deux plans tangents; dans le premier cas, on compte trois systèmes normaux et un système exceptionnel de sphères bitangentes; dans le second, deux systèmes normaux et un système exceptionnel. (Parmi les déférentes il y a un hyperboloïde à deux nappes, un ellipsoïde et une ellipse imaginaire.) Les déférentes sont homofocales; les sphères directrices du système exceptionnel sont les sphères du faisceau linéaire

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu x - 2\frac{C'}{A-A'}y - 2\frac{C''}{A-A''}z - 2A = 0.$$

Elles sont orthogonales aux sphères directrices des

systemes normaux : nous allons établir que, comme dans le cas général (§ 4), les centres de ces sphères sont les sommets d'un triangle conjugué commun à toutes les directrices du système exceptionnel, et à la déférente de ce système.

Les coniques

$$(\lambda - A) \left(\frac{y^2}{A - A'} + \frac{z^2}{A - A''} - 1 \right) \\ + y^2 + z^2 - 2 \frac{C' y}{A - A'} - 2 \frac{C'' z}{A - A''} - 2A = 0,$$

où λ prend celles des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ différentes de A , sont des systèmes de droites dont le centre a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = \frac{C'}{\lambda - A'}, \quad z = \frac{C''}{\lambda - A''},$$

c'est-à-dire le centre des sphères directrices des systèmes normaux. D'autre part, l'équation d'un cône passant par une focale de l'un de ces systèmes serait

$$(\lambda - \lambda_3) \left(\frac{x^2}{\lambda_3 - A} + \frac{y^2}{\lambda_3 - A'} + \frac{z^2}{\lambda_3 - A''} - 1 \right) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - 2 \frac{C'}{\lambda_3 - A'} y - 2 \frac{C''}{\lambda_3 - A''} z - 2\lambda_3 = 0,$$

où λ peut avoir l'une des valeurs A, λ_1, λ_2 . Si $\lambda = \lambda_1$ ou λ_2 , le sommet de ce cône est encore un des centres d'une sphère directrice des systèmes normaux; mais si $\lambda = A$, il y a une infinité de sommets, le cône se réduisant à un système de deux plans. On peut donc dire, d'une façon très générale, que les centres des sphères directrices n'appartenant pas à un système sont les pôles doubles de la déférente et de la directrice de ce système (ou des directrices de ce système). Enfin, on voit que les déférentes des systèmes normaux sont

bitangentes aux points doubles à leurs directrices et que les focales de ces systèmes sont composées chacune de deux cercles.

Le système exceptionnel a quatre foyers distincts en général, puisque les trois systèmes de sécantes sont en général distincts.

On modifie sans peine ces résultats dans le cas où les points doubles de la cyclide sont confondus.

6. Nous avons supposé que A était la plus petite des trois quantités A, A', A'' : il y a de très légères modifications à apporter aux parties du texte mises entre parenthèses, s'il n'en est pas ainsi. Il en est de même, si l'une des déférentes se réduit à un plan : ces variantes sont sans intérêt.

Supposons donc

$$C = C' = 0, \quad C'' \neq 0, \quad A \neq A' \quad \text{et} \quad f(A) = f(A') = 0,$$

$$C = 0 \quad \frac{C''^2}{A - A''} + D - A^2 = 0, \quad \frac{C''^2}{A' - A''} + D - A'^2 = 0,$$

$$C' = 0,$$

La cyclide admet deux systèmes exceptionnels, un système normal, c'est une cyclide de Dupin à ligne de courbures planes. Elle a quatre points singuliers définis par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + \frac{C''^2}{(A - A'')^2} + 2A = 0, \\ y = 0, \\ z = \frac{C''}{A - A''}, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y^2 + \frac{C''^2}{(A' - A'')^2} + 2A' = 0, \\ z = \frac{C''}{A' - A''}. \end{array} \right.$$

Ces points singuliers forment deux groupes et tout point d'un groupe est le sommet d'un cône isotrope passant par les deux points singuliers de l'autre groupe. La sphère directrice du système normal passe par ces

quatre points. En effet, son équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \frac{C''z}{\lambda_1 - A''} - 2\lambda_1 = 0$$

est vérifiée, par exemple, pour

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 = -2A, \quad z = \frac{C''}{A - A''},$$

car on a

$$+ \frac{C''z}{(\lambda_1 - A'')(A - A'')} + \lambda_1 + A = \frac{f(\lambda_1) - f(A)}{A - \lambda_1}$$

($\lambda_1 - A \neq 0$).

Elle est donc encore normale à toutes les sphères directrices en nombre doublement infini des deux systèmes exceptionnels. La focale de ce système appartient au faisceau des quadriques

$$(\lambda - \lambda_1) \left(\frac{x^2}{\lambda_1 - A} + \frac{y^2}{\lambda_1 - A''} + \frac{z^2}{\lambda_1 - A''} - 1 \right) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - 2 \frac{C''z}{\lambda_1 - A''} - 2\lambda_1 = 0,$$

qui se décompose en systèmes de plan pour $\lambda = A$, $\lambda = A''$. Par suite, la déférence coupe la directrice suivant quatre droites, isotropes naturellement.

On vérifierait très simplement que les déférentes des systèmes exceptionnels sont bitangentes aux sphères directrices correspondant aux points doubles. Il suffit pour cela de former les équations des sécantes communes.

Nous laissons au lecteur le soin de compléter cette étude par celle des cas simples

$$C = 0, \quad C' = 0, \quad A = A', \\ C = 0, \quad C' = 0, \quad A = A' = A''.$$

7. Les réciproques des propositions précédemment établies sont évidentes.

L'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une quadrique à centre et qui demeure orthogonale à une directrice fixe est une cyclide du quatrième degré, ayant autant de points doubles que la déférente et la directrice ont de points de contacts. En particulier, si la déférente et la directrice sont bitangentes en deux ombilics, l'enveloppe est une cyclide de Dupin.

Nous désignerons par cyclides (Σ) celles qui admettent au moins un système exceptionnel de sphères enveloppes : autrement dit, celles qui ont deux ou quatre points doubles, ou encore qui correspondent à des déférentes bitangentes, tangentes en un ou deux ombilics à leurs directrices. Ces cyclides sont des enveloppes de sphères (S) dont l'équation dépend d'un paramètre au second degré : cela d'une ou deux manières différentes. Soient

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2b_1x + 2c_1y + 2d_1z + e_1 = 0, \\ S_2 &= a_2(x^2 + y^2 + z^2) + 2b_2x + 2c_2y + 2d_2z + e_2 = 0, \\ S_3 &= a_3(x^2 + y^2 + z^2) + 2b_3x + 2c_3y + 2d_3z + e_3 = 0 \end{aligned}$$

les équations de trois sphères. Les sphères S seront données par

$$S_1\theta^2 + 2S_2\theta + S_3 = 0,$$

où θ représente un paramètre variable, et leur enveloppe sera la cyclide d'équation

$$S_2^2 = S_1S_3.$$

Soit θ_1 une valeur de θ : désignons par P_1 la puissance d'un point M de la cyclide, par rapport à la sphère θ_1 ,

$$\begin{aligned} P_1(a_1\theta_1^2 + 2a_2\theta_1 + a_3) &= S_1\theta_1^2 + 2S_2\theta_1 + S_3 \\ &= \frac{1}{S_1}(S_1\theta_1 + S_2)^2. \end{aligned}$$

Soit ρ_1 le rayon de la sphère θ_1 : désignons par $+d_1^2$ ou $-d_1^2$ suivant le cas, la quantité $\frac{P_1}{2\rho_1}$

$$d_1^2 = \left| \frac{P_1}{2\rho_1} \right|,$$

nous pourrons appeler distance d'un point à la sphère θ_1 , un nombre positif dont la valeur est d_1 : cette définition est légitime, car pour une sphère θ_1 réduite à un plan, la formule donne la distance géométrique du point M à ce plan. Nous aurons alors

$$\pm 2\rho_1 d_1^2 (a_1 \theta_1^2 + 2a_2 \theta_2 + a_3) S_1 = (S_1 \theta_1 + S_2)^2.$$

Pour fixer les idées, supposons le point M choisi sur une région de surface, ou $S_1 > 0$, on aura

$$\pm d_1 \sqrt{\pm 2\rho_1 (a_1 \theta_1^2 + 2a_2 \theta_2 + a_3)} \sqrt{S_1} = S_1 \theta_1 + S_2.$$

Nous choisirons le signe, suivant le cas ; pour simplifier l'exposé, imaginons qu'il convienne de prendre le signe + quel que soit θ_1 . Il est manifeste qu'entre les distances d_1, d_2, d_3 à trois sphères $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ existera une relation linéaire et homogène

$$\begin{vmatrix} d_1 \sqrt{2\rho_1 (a_1 \theta_1^2 + 2a_2 \theta_2 + a_3)} & \theta_1 & 1 \\ d_2 \sqrt{2\rho_2 (a_1 \theta_2^2 + 2a_2 \theta_2 + a_3)} & \theta_2 & 1 \\ d_3 \sqrt{2\rho_3 (a_1 \theta_3^2 + 2a_2 \theta_3 + a_3)} & \theta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les cyclides (Σ) peuvent être divisées en zones telles que chacune d'elles soit le lieu géométrique des points dont les distances à trois sphères inscrites sont liées par une même relation linéaire et homogène.

En particulier, si parmi les sphères Σ il y a trois sphères points distinctes, la cyclide Σ apparaît comme formée de zones, telles que chacune d'elles soit le lieu

des points dont les distances à trois points appelés foyers sont liées par une même relation linéaire et homogène.

Les réciproques sont vraies.

8. Il n'y a aucune modification à faire aux calculs et raisonnements précédents pour parfaire l'étude des quartiques bicirculaires. Chaque quartique bicirculaire a dans son plan quatre déférentes homofocales et quatre cercles directeurs orthogonaux, distincts si la quartique n'a pas de points doubles en dehors des points cycliques : dans ce cas, les foyers sont au nombre de 16. Soient A, B, C, D quatre foyers d'un même système : ils sont sur un même cercle directeur O_1 , les points de rencontre Θ_2, O_3, O_4 des sécantes AB, CD : AC, BD : AD, BC sont les centres des cercles directeurs des autres systèmes. Les trois systèmes de sécantes étant distincts (même démonstration qu'au paragraphe 4), les quatre foyers A, B, C, D sont distincts sur un même cercle et par suite les seize foyers sont distincts entre eux. En effet, si A du système O_1 était confondu avec A' du système O_2 , le point A serait sur les deux cercles orthogonaux O_1 et O_2 et par suite il ne serait pas distinct de B, C, D.

Il est aisé d'ailleurs de construire ces seize foyers à partir de quatre d'entre eux : Supposons que deux des cercles directeurs se coupent en un point réel A, une inversion de centre A transforme la quartique en une quartique d'équation

$$(x^2 + y^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4D = 0.$$

Les foyers situés sur l'axe des x ont pour abscisses les racines de l'équation

$$\frac{x^4}{4} + x^2 \frac{D - AA'}{A - A'} + D = 0$$

et les foyers situés sur l'axe des y ont pour ordonnées les racines de

$$\frac{y^4}{4} + y^2 \frac{D - AA'}{A' - A} + D = 0.$$

Les uns sont donc les foyers des couples formés par les autres convenablement associés : par exemple, aux foyers $x_1, -x_1$ correspondent $y_1 = ix_1, y_2 = -ix_1$. Revenons à la cyclide primitive redonnée par une nouvelle inversion : les douze foyers autres que A, B, C, D sont les foyers des six systèmes de points ou les points limites des six systèmes de cercles [A, B; C, D] [A, C; B, D] [A, D; B, C]. Ces quartiques, sans points doubles, ayant quatre foyers distincts, sont de quatre façons des enveloppes de cercles et par suite :

Toute quartique bicirculaire sans points doubles est formée d'arcs, dont chacun est le lieu géométrique des points dont les distances à trois foyers sont liées par une relation linéaire et homogène.

Cette propriété se conservant par inversion, la définition des quartiques bicirculaires dans le plan s'applique mot pour mot aux biquadratiques sphériques sur la sphère.

Toute biquadratique sphérique sans points doubles est formée d'arcs, dont chacun est le lieu géométrique des points dont les distances à trois points fixes de la sphère appelés foyers sont liées par une relation linéaire et homogène.

Ces trois points sont trois des quatre points où une des focales de la biquadratique sphérique donnée perce la sphère qui la porte.

9. Cette dernière remarque fort simple permet de résoudre un important problème, déjà traité par Laguerre et Darboux (DARBOUTX, *Analytique*, p. 458-459) :

Connaissant un mode de génération d'une cyclide, trouver les autres.

Le problème ainsi posé en masque un autre :

Connaissant une des focales d'une cyclide, trouver les autres,

qu'il nous semble préférable de résoudre d'abord, pour montrer combien le rôle de la déférente est en somme peu important quand la focale est déterminée. La solution du problème posé et résolu par Darboux et Laguerre découle naturellement de la solution de celui-ci.

Soit (F_1) la focale donnée tracée sur une sphère (O_1) ; soient O_2 le sommet d'un des cônes passant par F_1 , (O_2) la sphère orthogonale à (O_1) de centre O_2 : O_2 est une directrice. Elle coupe (F_1) en quatre points A, B, C, D qui sont les foyers de la focale (F_2) cherchée tracée sur (O_2) . Cette focale est parfaitement déterminée: chacun de ses points est à des distances de A, B, C, liées par une relation linéaire et homogène; elle passe en outre par les foyers de (F_1) situés sur (O_1) , foyers qu'il est aisé de déterminer. Ce sont par exemple les points de contact des plans tangents à la sphère (O_1) et au cône de sommet O_2 passant par la biquadrique. Elle est donc parfaitement déterminée, comme lieu géométrique de points dont les distances à A, B, C sont liées par une relation connue.

Pour rendre maniable cette solution, projetons stéréographiquement chaque biquadrique, d'un point de vue différent, bien entendu, sur le plan radical de deux sphères: nous obtenons deux quartiques bicirculaires ayant même cercle directeur et telles que sur ce cercle les foyers de l'une soient les points de rencontre avec ce cercle de la seconde. Définissons, par exemple, la première par sa déférente qui passe par les quatre

foyers A, B, C, D : soient ma une tangente commune à la directrice et a cette déférente ; le cercle de centre m (m sur la déférente) et de rayon ma (a sur la directrice) est un cercle enveloppant, le point de contact est a ; a est donc un point d'intersection de la directrice avec la cyclide. Autrement dit, la cyclide ayant pour foyer a , et les points b, c, d obtenus de même et passant par A, B, C, D, s'obtient en prenant pour déférente la polaire réciproque par rapport au cercle directeur de la déférente donnée. La biquadratique sphérique s'en déduit par projection.

Sous cette forme, la solution est générale et s'applique, A, B, C, D étant ou non réels ou distincts.

10. Pour ne pas allonger indéfiniment le texte du présent article, nous avons borné notre étude aux cyclides du quatrième degré. Il est manifeste que les résultats géométriques obtenus s'appliquent également aux cyclides du troisième degré ; les déférentes sont des paraboloides. Parmi ces cyclides, il y a des enveloppes de sphères dont le centre décrit une parabole, ce sont des cyclides (Σ).

La distinction entre cyclides (Σ) et autres présente une grande importance. La propriété capitale des cyclides est celle-ci :

Les cyclides homofocales forment un système triple orthogonal.

Elle est connue depuis longtemps, mais sa démonstration même indique manifestement que les cyclides dont il s'agit ne sont pas des cyclides (Σ). Par un point de l'espace passent deux (et non trois) cyclides Σ homofocales, de foyers donnés, si parmi ces foyers trois sont distincts, une seule s'il n'en est pas ainsi, et c'est une cyclide de Dupin.