

M.-F. EGAN

Quelques applications d'une remarque de M. D'Ocagne

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 365-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__365_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M^{18a}]

QUELQUES APPLICATIONS D'UNE REMARQUE DE M. D'OCAGNE;

PAR M. M.-F. EGAN.

Dans sa belle étude sur les cycloïdales ⁽¹⁾, M. d'Ocagne préconise l'emploi de deux angles qu'il nomme *coor-*

⁽¹⁾ *N. A.*, 1915, p. 563. Voir spécialement p. 565-567.

données naturelles. Comme ces angles dépendent d'un choix particulier de la droite initiale, il est parfois plus commode de considérer leurs variations. Ainsi, l'équation (3) de M. d'Ocagne (p. 566) peut se traduire :

Si un vecteur OM de longueur donnée tourne autour du point fixe O avec la vitesse angulaire Ω , une droite δ passant par M et animée d'une vitesse angulaire $c\Omega$ (c étant une constante) enveloppe une cycloïdale dont l'indice n est donné par l'équation

$$c = 1 - \frac{n}{2}.$$

[L'indice d'une cycloïdale est le rapport des rayons des cercles fixe et mobile engendrant la courbe. Pour une hypocycloïde, n est négatif. Rappelons qu'une cycloïdale donnée a deux indices, liés par l'équation

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = -1.]$$

Nous allons appliquer ce théorème à la recherche de quelques enveloppes classiques.

1. Si un segment donné de δ glisse entre deux droites rectangulaires Ox , Oy , le milieu M du segment décrit un cercle de centre O, et les vitesses angulaires de OM et de δ sont égales et opposées, d'où $c = -1$, $n = -4$; l'enveloppe de δ est donc une hypocycloïde à quatre rebroussements.

2. Considérons un triangle ABC, et soit δ la droite de Simson d'un point variable X sur le cercle circonscrit. Soient S le centre de ce cercle, O le centre du

cercle des neuf points. H l'orthocentre. La droite δ passe par le milieu M de HX ; M décrit le cercle des neuf points. Les rayons OM et SX tournent avec la même vitesse angulaire, CX tourne avec une vitesse moitié moindre, et il est facile de constater que les vitesses angulaires de δ et de CX sont égales et opposées. On a donc

$$c = -\frac{1}{2}, \quad n = -3;$$

l'enveloppe de δ est une hypocycloïde à trois rebroussements, tritangente au cercle des neuf points.

3. Soit encore δ l'axe d'une parabole circonscrite au triangle ABC . Si Z est le quatrième point d'intersection de la parabole avec le cercle circonscrit au triangle, δ passe par le centre M des distances moyennes des quatre points A, B, C, Z ⁽¹⁾. Soient G le centre de gravité du triangle, S le centre du cercle circonscrit, O le point divisant GS dans le rapport $1 : 3$. Lorsque Z se déplace, M décrit un cercle de centre O , et les rayons SZ et OM sont parallèles. Comme δ est parallèle à l'une des bissectrices de l'angle (CZ, AB) , sa vitesse angulaire est égale à la moitié de celle de CX , donc au quart de celle de SX ou OM . On a par conséquent $c = \frac{1}{4}$, $n = -\frac{3}{2}$, $n' = -3$, et l'enveloppe est encore une H_3 tritangente au cercle (M) .

Ajoutons que cette dernière H_3 s'identifie avec l'enveloppe des droites de Simson du triangle médian $A'B'C'$. En effet, prenons AZ parallèle à BC , et considérons les deux paraboles Π, Π' passant par A, B, C, Z . Π se réduit aux deux droites BC, AZ , son axe est donc $B'C'$. L'axe de Π' est donc perpendiculaire à $B'C'$ et à BC ;

(1) J. BOUCHARY, *N. A.*, 1918, p. 466.

il passe donc par le milieu A' de BC , puisque BC est une corde de Π' . Il s'ensuit que les côtés et les perpendiculaires du triangle médian sont des positions de δ , ce qui démontre la proposition. On est amené ainsi à l'énoncé suivant, dont il serait intéressant de trouver une démonstration géométrique (la vérification par l'analyse n'est pas difficile) :

Soient Δ un triangle inscrit à une parabole, et Δ' son triangle médian; l'axe de la parabole est une droite de Simson pour Δ' .

4. Considérons encore l'axe d'une parabole inscrite au triangle ABC . Soient X le foyer, δ la tangente au sommet, δ' l'axe. Il suffit de remarquer que δ est la droite de Simson de X , que δ' passe par X , et que δ et δ' ont même vitesse angulaire lorsque X se déplace sur le cercle circonscrit, pour voir que δ' et δ enveloppent deux H_3 , tritangentes au cercle circonscrit et au cercle des neuf points respectivement.