

A. MYLLER

Sur le complexe de Painvin

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 361-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__361_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[N° I]

SUR LE COMPLEXE DE PAINVIN;

PAR M. A. MYLLER.

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XI, 1872, Painvin a étudié le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires ⁽¹⁾. Il a étudié spécialement le cas où la quadrique est un ellipsoïde et il s'est proposé (p. 539) d'étudier aussi le cas des quadriques dénuées de centre; mais cette étude ne se trouve pas dans ses travaux ultérieurs. C'est de ce cas qu'il s'agira dans ce qui suit.

2. Soit la quadrique dénuée de centre

$$(1) \quad z = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right).$$

La podaire de cette quadrique par rapport au pôle $P(x_0, y_0, z_0)$ est la surface

$$2(z - z_0) [x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0)] + a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 = 0.$$

Cette podaire a la propriété d'être coupée par un plan parallèle au plan xOy

$$(2) \quad z - k = 0$$

suivant une conique. Le cône ayant pour sommet le

(1) Voir aussi A. DEMOULIN, *Sur le complexe des droites*, etc. *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XX.

point P et pour directrice cette conique a pour équation

$$(3) \quad (a + 2k)(x - x_0)^2 + (b + 2k)(y - y_0)^2 + 2k(z - z_0)^2 \\ - 2[(x - x_0)z_0 - (z - z_0)x_0](x - x_0) \\ - 2[(y - y_0)z_0 - (z - z_0)y_0](y - y_0) = 0.$$

Les génératrices du cône déterminent, quand P varie, un complexe quadratique dont l'équation en coordonnées plückériennes résulte immédiatement de (3) et de

$$p_{12} = xy_0 - yx_0, \quad p_{23} = yz_0 - zy_0, \quad p_{31} = zx_0 - xz_0, \\ p_{13} = x - x_0, \quad p_{24} = y - y_0, \quad p_{34} = z - z_0.$$

Cette équation est

$$(4) \quad (a + 2k)p_{13}^2 + (b + 2k)p_{24}^2 + 2kp_{34}^2 \\ - 2(p_{13}p_{14} + p_{23}p_{24}) = 0.$$

Montrons que les droites de ce complexe sont les intersections de deux plans perpendiculaires tangents respectivement aux paraboloides homofocaux :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a + \lambda} - \frac{y^2}{b + \lambda} - 2z - \lambda = 0, \\ \frac{x^2}{a + \mu} + \frac{y^2}{b + \mu} - 2z - \mu = 0, \end{cases}$$

où

$$(6) \quad \lambda + \mu = -2k - a - b.$$

En effet, d'après un théorème connu de Monge, généralisé par Bobillier, le plan (2) est le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les plans sont respectivement tangents aux quadriques homofocales (1) et (5). Le plan passant par un point M de la conique du plan (2) et perpendiculaire à MP est tangent à la quadrique (1) parce que M est un point de la

podaire. La droite MP du complexe, étant par conséquent une arête du trièdre de Monge-Bobillier, a la propriété énoncée.

Les paramètres λ et μ pouvant prendre toute valeur qui satisfait à (6), on peut prendre $\lambda = \mu$ et par conséquent le complexe (4) est le complexe de Painvin relatif à la quadrique

$$\frac{x^2}{a + \rho} + \frac{y^2}{b + \rho} - 2z - \rho = 0,$$

$$\rho = -k - \frac{a+b}{2},$$

et si l'on prend

$$k = -\frac{a+b}{2},$$

on obtient le complexe de Painvin relatif à (1).

3. Si le cône (3) se décompose en deux plans, le sommet P décrit la surface singulière du complexe (4). Il en résulte que la surface singulière est le lieu des pôles des podaires de la quadrique (1) tangents au plan (2). Son équation est

$$(7) \quad \frac{x^2}{a + 2k - 2z} + \frac{y^2}{b + 2k - 2z} - 2k = 0,$$

qui représente une surface cubique de quatrième classe de Cayley.

La droite singulière, qui est l'intersection de deux plans en lesquels se décompose le cône, et le point singulier P sur cette droite se déterminent par la construction géométrique suivante : on mène en un point π du paraboloïde (1) le plan tangent Π . Ce plan rencontre le plan (2) suivant une droite d . Toutes les droites menées perpendiculairement au plan Π par les points de la droite d appartiennent au complexe. Parmi celles-ci est singulière la droite QD menée par

le pied Q de la perpendiculaire abaissée de π sur d . Le point singulier p se trouve sur QD à l'intersection de cette droite avec la sphère passant par π et tangente en Q au plan (2).

Cette construction résulte de la propriété connue que la sphère ayant pour diamètre la droite qui joint le pôle au point de contact du plan tangent est tangente à la podaire au point correspondant. Dans notre cas, la sphère doit être tangente au plan (2) en un point de la droite d , pour que la podaire aussi soit tangente; elle ne peut donc avoir que la position indiquée précédemment.

4. Les droites du complexe (4) situées dans le plan (8)

$$u_0 x + v_0 y + w_0 = 0$$

peuvent être obtenues comme il suit : considérons le cylindre C circonscrit au paraboloidé (1) et ayant ses génératrices perpendiculaires à (8). Le plan (8) est coupé par ce cylindre suivant une parabole p et par le plan (2) suivant une droite d perpendiculaire à l'axe de la parabole. Les droites du complexe situées dans le plan (8) seront les perpendiculaires élevées sur les tangentes à p par les points de leurs intersections avec d . Il résulte du théorème de Monge-Bobillier, appliqué aux figures planes, que l'enveloppe de ces perpendiculaires sera une parabole π homofocale à p . La parabole π se réduit à deux points, dont l'un à l'infini, si la droite d est tangente à la parabole.

5. Les plans P pour lesquels la parabole π se réduit à deux points sont les plans qui passent par l'intersection des plans tangents à (1) avec le plan (2) et qui sont perpendiculaires à ces points tangents. En effet, les droites du plan P perpendiculaires à l'intersection

forment un faisceau de droites du complexe qui passent par un point à l'infini; dans le même plan, il y aura par conséquent un faisceau de droites passant par un point à distance finie. L'enveloppe de ces plans P est la surface singulière (7).

6. Assujettissons le plan (8) à un mouvement de translation. Dans le plan (8), la parabole π varie en formant le système des paraboles homofocales à une parabole fixe p . Dans l'espace, la parabole π décrit un cône du deuxième degré dont le sommet est un point de la surface singulière, à savoir celui à distance finie des deux points en lesquels dégénère une des paraboles π . Le cône est circonscrit à la surface singulière parce qu'il est l'enveloppe de plans qui passent par l'intersection des plans tangents au cylindre C avec le plan (2) et ils sont perpendiculaires à ces plans.

Soient M un point de la surface singulière, P et P' les deux plans en lesquels se décompose le cône (3) du complexe. Le cône, ayant le sommet en M et circonscrit à la surface singulière, se décompose donc en deux cônes du deuxième degré K et K' respectivement tangents à P et P'. Les sections des cônes K et K' par des plans parallèles aux plans P et P', respectivement, sont les paraboles π .