NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON POMEY

# Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques

*Nouvelles annales de mathématiques 4^e série*, tome 19 (1919), p. 321-324

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__321_0>

[A3aα]

# DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. LÉON POMEY,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

*Toute équation algébrique entière $f(z)=0$ de degré $n$ a $n$ racines.*

DÉMONSTRATION. — On sait qu'il existe, dans le plan de la variable complexe $z=x+iy$, une circonférence ayant son centre à l'origine, de rayon fini mais assez grand pour que, à l'intérieur de cette circonférence ou sur elle, $|f(z)|$ soit supérieur à un nombre positif choisi arbitrairement N. Quand $z$ ne sort pas de ce cercle, $|f(z)|$ étant une fonction continue de $x$ et $y$ dans ce domaine borné et complet admet un minimum $m$ ($m<$N) et l'atteint effectivement en un point déterminé $a$ (évidemment intérieur au cercle).

Cela posé, le théorème étant vrai pour le degré 1, il sera démontré d'une manière générale si, le supposant vrai pour le degré $n-1$, on prouve qu'il l'est encore pour le degré $n$. *Et il suffit pour cela de démontrer que, dans cette hypothèse, le minimum de $|f(z)|$ est nécessairement nul :* dans ce cas, en effet, $f(z)$ s'annulera pour $z=a$, et en divisant $f(z)$ par $z-a$, on retombera sur une équation de degré $n-1$.

Or supposons $m$ ou $|f(a)|>0$. Le quotient de

$f(z)-f(a)$ par $z-a$ étant de degre $n-1$ a par hypothèse $n-1$ zéros : $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Donc $f(z)-f(a)=0$ possede $n$ racines : $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Soient $a_p$ l'une quelconque d'entre elles et $\lambda$ son ordre de multiplicité. On a

$$f(a_p)=f(a) \text{ et } |f(a_p)|=|f(a)|=m.$$

Il est évident *a priori* qu'on peut (par simple calcul d'identification) déterminer des coefficients $c_1,\ldots,c_n$ $|c_\lambda \neq 0$, et $c_n$ étant le coefficient de $z_n$ dans $f(z)|$ de façon que

$$(1)\quad f(z)=f(a_p)-c_1(z-a_p)^1-\ldots-c_n(z-a_p)^n.$$

Mettons en évidence les parties réelle et imaginaire des divers éléments de (1) en posant :

$$f(z)=P+iQ, \quad a_p=\alpha-i\beta, \quad f(a_p)=f(a)=P_0-iQ_0.$$
$$c_1=A_1+iB_1,\ldots\ldots \quad c_n=A_n+iB_n,$$
$$(z-a_p)^1=[x-\alpha+i(y-\beta)]^\lambda$$
$$=P_1+iQ_1,\ldots,(z-a_p)^n=P_n+iQ_n$$

P et Q sont deux polynomes de degre $n$ en $x$ et $y$; $(P_1, Q_1), \ldots, (P_n, Q_n)$ des polynomes homogenes de degré $\lambda, \ldots, n$ en $x-\alpha$ et $y-\beta$; enfin $P_0, Q_0$, $A_\lambda, B_1, \ldots, A_n, B_n$ des constantes. Dans ces conditions, (1) devient

$$(2)\quad P+iQ=P_0+iQ-(A_1+iB_1)(P_\lambda+iQ_1)+\ldots$$
$$-(A_n+iB_n)(P_n+iQ_n).$$

Changeons $i$ en $-i$ et multiplions membre à membre l'égalite ainsi obtenue avec la precédente : il vient

$$(3)\quad P^2+Q^2=P_0^2+Q_0^2+2(A_1P_0+B_1Q_0)P_1$$
$$+2(A_1Q_0-B_1P_0)Q_1+\ldots.$$

Il est visible que tous les termes non écrits sont de degré plus grand que $\lambda$ par rapport à $x-\alpha$ et $y-\beta$; d'autre part $A_\lambda P_0 + B_\lambda Q_0$ et $A_\lambda Q_0 - B_\lambda P_0$ ne sont pas nuls ensemble, puisque $A_\lambda^2 + B_\lambda^2$, c'est-à-dire $c_\lambda^2$ est différent de zéro, ainsi que $P_0^2 + Q_0^2 = |f(a)|^2$; il résulte de là que, *dans le développement de* $P^2 + Q^2 - (P_0^2 + Q_0^2)$ *ou de* $|f(z)|^2 - m^2$, *les termes du degré minimum en* $x-\alpha$ *et* $y-\beta$ *sont de degré* $\lambda$ (*voir* Note I).

Faisons varier maintenant $z$ au voisinage de $a$, mais de façon que $\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ conserve une valeur finie arbitraire $l$; (3) peut s'écrire alors

$$(4)\quad |f(z)|^2 - m^2 = (y-\beta)^\lambda [D_\lambda + (y-\beta) D_{\lambda+1} + \ldots + D_n (y-\beta)^{n-\lambda}],$$

les constantes $D_\lambda, \ldots, D_n$ étant des polynomes en $l$ ($D_\lambda \gtrless 0$). On peut supposer en outre les modules de $x-\alpha$ et $y-\beta$ suffisamment petits pour que $|f(z)|^2$ reste supérieur à $m^2$, et pour qu'en même temps $D_\lambda$ soit supérieur en module à la somme des termes qui le suivent à l'intérieur du crochet, au second membre de (4); le signe du second membre de (4) est alors celui de $D_\lambda (y-\beta)^\lambda$; il doit rester invariable comme celui du premier membre, même si $y-\beta$ change de signe; il faut donc que $\lambda$ soit pair.

*Ainsi toute racine* $a_p$ *de* $f(z) - f(a) = 0$ *est multiple d'ordre pair* (*voir* Note II). Mais cela est manifestement impossible dans le cas où $n$ est impair. Et dans le cas de $n$ pair, la théorie de la division permet d'écrire (en appelant $2\lambda_0, 2\lambda_p, \ldots, 2\lambda_h$) les ordres de multiplicité des racines distinctes $a, a_p, \ldots a_h$

$$f(z) - f(a) = c_n (z-a)^{2\lambda_0} (z-a_p)^{2\lambda_p} \ldots (z-a_h)^{2\lambda_h};$$

le second membre est le carré d'un polynome $g(z)$ de degré $\frac{n}{2}$; d'où

$$(5) \qquad f(z) = g^2(z) + f(a) = \left[g(z) + i\sqrt{f(a)}\right]\left[g(z) - i\sqrt{f(a)}\right];$$

$f(z)$ admettrait donc les $\frac{n}{2}$ racines de chacun des deux facteurs ainsi mis en évidence, et le minimum de $|f(z)|$ serait nul, contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, de toutes façons, l'hypothèse faite conduit à une impossibilité. Donc il est bien nécessaire que $m$ soit nul. C. Q. F. D

*Note I.* — La présente démonstration du théorème de d'Alembert (dans laquelle il n'est pas fait usage de représentation trigonométrique des imaginaires) perfectionne, en la simplifiant notablement, une autre analyse publiée dans cette Revue en mars 1916. Dans cette dernière, le résultat auquel on vient d'aboutir ci-dessus était obtenu, à la page 103, comme conséquence du fait que $f(z)$ est une fonction synectique, et en utilisant la formule de Taylor pour le développement (1) (alors qu'ici la forme même des $c_i$ n'est pas intervenue, mais seulement la possibilité, évidente *a priori*, d'effectuer ce développement). *C'est à M. Egan (de Dublin) qu'est due la remarque* qu'on peut éviter les considérations sur les fonctions synectiques.

*Note. II* — Tout ceci s'étend immédiatement à toute fonction analytique $f(z)$. D'où ce théorème : *Si le module d'une fonction analytique $f(z)$ atteint en un point a un minimum $|f(a)|$ non nul, $f(z) - f(a)$ et $|f(z)|^2 - |f(a)|^2$ ont le même ordre au point a, et par suite a est une racine multiple d'ordre pair pour $f(z) - f(a)$.*