

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 31-39

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__31_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1105.

(1872, p. 527; 1917, p. 299.)

1° *Trouver l'équation des courbes qui coupent sous un angle constant tous les segments décrits sur une même corde.*

2° *Même problème pour les hyperboles équilatères concentriques qui passent par un point fixe.*

3° *Même problème pour les ellipses homofocales.*

4° *Même problème pour les cassiniennes homofocales, c'est-à-dire les courbes telles que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier reste constant.*

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Ces diverses questions sont des applications intéressantes des coordonnées isotropes de Darboux. Je rappelle que si l'on

(32)

pose

$$\begin{aligned}u &= x + iy, \\v &= x - iy,\end{aligned}$$

u et v sont les coordonnées isotropes du point x, y , que si (u, v) , (a_1, b_1) sont les coordonnées de deux points M et A , on a

$$e^{i\omega_1} \overline{AM} = u - a_1, \quad e^{-i\omega_1} \overline{AM} = v - b_1,$$

ω_1 étant l'angle de \overline{AM} avec l'axe des x , et qu'enfin l'angle de deux courbes

$$F(u, v) = 0, \quad \Phi(u, v) = 0$$

est donné par l'expression

$$\frac{\frac{du}{dv}}{\frac{\partial u}{\partial v}} = e^{2i\varphi}.$$

On en déduit immédiatement que les trajectoires sous l'angle φ des courbes

$$\frac{F(u)}{\Phi(v)} = K_1, \quad F(u)\Phi(v) = K_1, \quad F(u) + \Phi(v) = K$$

ont respectivement pour équations :

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} L[F(u)] - e^{i\varphi} L[\Phi(v)] &= \text{const.}, \\e^{i\varphi} L[F(u)] + e^{i\varphi} L[\Phi(v)] &= \text{const.}, \\e^{i\varphi} F(u) + e^{-i\varphi} \Phi(v) &= \text{const.}\end{aligned}$$

1° Soient $A(a_1, a'_1)$, $B(b_1, b'_1)$ les extrémités de la corde, si M est un point du cercle AMB , si

$$\overline{AM} \cdot \overline{Ox} = \omega_1, \quad \overline{BM} \cdot \overline{Ox} = \omega_2, \quad \omega_2 - \omega_1 = \text{const.}$$

Ox coïncide avec AB), l'équation du cercle AMB sera

$$\frac{u - a_1}{u - b_1} : \frac{v - a'_1}{v - b'_1} = \text{const.}$$

Les trajectoires sous l'angle φ de ces cercles auront pour

équations

$$e^{i\varphi} L \frac{u - a_1}{u - b_1} - e^{-i\varphi} L \frac{v - a'_1}{v - b'_1} = \text{const.}$$

Posons, M étant un point de l'une de ces courbes,

$$\overline{AM} = \rho_1, \quad \overline{BM} = \rho_2,$$

$$\text{angle } \widehat{AM.AB} = \theta_1, \quad \text{angle } \widehat{BM.AB} = \theta_2.$$

On a

$$u - a_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad u - b_1 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

$$v - a'_1 = \rho_1 e^{-i\theta_1}, \quad v - b'_1 = \rho_2 e^{-i\theta_2}.$$

L'équation des trajectoires s'écrit alors

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = e^{\frac{K + (\theta_2 - \theta_1) \cos \varphi}{\sin \varphi}} = K' e^{\theta_2 - \theta_1) \cot \varphi}.$$

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les trajectoires orthogonales sont les cercles ayant pour diamètres les segments ayant pour extrémités deux points correspondants de l'involution ayant A et B pour points doubles. Le cas général peut d'ailleurs se traiter géométriquement très simplement : en effet, une inversion de centre A et de puissance \overline{AB}^2 transforme les cercles AMB en un faisceau de droites passant par B, les trajectoires sous l'angle φ de ce faisceau sont les spirales logarithmiques de pôle B, les inverses de ces spirales sont les courbes cherchées, l'inversion étant celle qui est définie ci-dessus.

2° Soient $x^2 - y^2 - 2\lambda xy - a^2 = 0$ les hyperboles équilatères considérées; en coordonnées isotropes leur équation deviendra

$$\frac{u^2 + v^2 - 2a^2}{u^2 - v^2} = \text{const.},$$

leur équation différentielle sera

$$\frac{2u du}{u^2 - a^2} - \frac{2v dv}{v^2 - a^2} = 0,$$

et l'équation différentielle de leurs trajectoires sous l'angle φ sera

$$e^{i\varphi} \frac{2u \delta u}{u^2 - a^2} - e^{-i\varphi} \frac{2v \delta v}{v^2 - a^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$e^{i\varphi} L(u^2 - a^2) - e^{-i\varphi} L(v^2 - a^2) = \text{const.}$$

En transformant cette équation comme plus haut et en conservant les mêmes notations, il vient

$$\rho_1 \rho_2 = K e^{-(\theta_1 + \theta_2) \cot \varphi}.$$

Dans le cas où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les trajectoires orthogonales sont des cassiniennes.

Il est facile de retrouver *géométriquement* ces résultats :

Étant donnée une équation en coordonnées polaires d'une courbe algébrique $f(\rho, \omega) = 0$, on sait que la transformation qui consiste à remplacer ρ et ω dans cette équation par ρ^n et $n\omega$ conserve les angles (William Roberts). Or les hyperboles équilatères considérées ont pour équation polaire

$$\rho^2 \cos 2\omega - \lambda \rho^2 \sin 2\omega - a^2 = 0 :$$

on peut les transformer en le faisceau de droites

$$\rho \cos \omega - \lambda \rho \sin \omega - \frac{a^2}{K} = 0$$

qui passent par un point fixe P ($\omega = 0, \rho = \frac{a^2}{K}$). Il en résulte immédiatement que les trajectoires sous l'angle φ des hyperboles considérées seront les transformées, dans la transformation ci-dessus indiquée, de spirales logarithmiques ayant même pôle et même axe polaire. Les trajectoires orthogonales seront des transformées de cercles, c'est-à-dire des cassiniennes.

3° Si $2c$ désigne la distance focale des ellipses considérées, leur équation sera en coordonnées isotropes

$$\sqrt{(u-c)(v-c)} + \sqrt{(u+c)(v+c)} = \text{const.},$$

d'où l'on pourrait déduire immédiatement l'équation différentielle des trajectoires sous l'angle φ ; cependant, dans ce cas, les variables u et v n'étant plus séparées, l'emploi des coordonnées isotropes ne présente pas grand avantage et il vaut mieux procéder comme il suit :

Soient $F(\rho_1, \rho_2) = 0$, $f(\nu_1, \nu_2) = 0$ les équations bipolaires

de deux courbes planes, rapportées à deux points fixes A et B.

Posons

$$AB = c, \quad \text{angle } \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \theta_1, \quad \text{angle } \overline{BM} \cdot \overline{AB} = \theta_2.$$

M étant un point commun aux deux courbes, ces deux courbes se couperont en M sous l'angle φ si l'on a

$$\text{tang } \varphi = \frac{[F'_{\rho_2} f'_{\rho_1} - F'_{\rho_1} f'_{\rho_2}] \sin(\theta_2 - \theta_1)}{f'_{\rho_1} [F'_{\rho_1} + \cos(\theta_2 - \theta_1) F'_{\rho_2}] + f'_{\rho_2} [F'_{\rho_2} + \cos(\theta_2 - \theta_1) F'_{\rho_1}]},$$

d'où, en supposant $F(\rho_1 \rho_2) \equiv \rho_1 + \rho_2 - K = 0$,

$$\cot \varphi \frac{f'_{\rho_1} - f'_{\rho_2}}{f'_{\rho_1} + f'_{\rho_2}} = \cot \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

ou

$$\text{tang } \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{dr_2 - dr_1}{dr_2 + dr_1} \text{ tang } \varphi;$$

or

$$\text{tang } \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}},$$

d'où

$$\frac{d(r_2 - r_1)}{\sqrt{4c^2 - (r_2 - r_1)^2}} = \cot \varphi \frac{d(r_2 + r_1)}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}},$$

équation dont l'intégrale générale est

$$r_2 - r_1 = 2c \sin LK \left| \frac{r_1 + r_2}{2c} = \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2c}\right)^2 - 1} \right|^{\cot \varphi}.$$

4° L'équation générale des cassiniennes considérées sera

$$F(u) \Phi(v) \equiv (u - a_1) \dots (u - a_n) (v - a'_1) \dots (v - a'_n) = \text{const.},$$

l'équation de leurs trajectoires sous l'angle φ sera par suite

$$e^{t\varphi} L(u - a_1) \dots (u - a_n) + e^{-t\varphi} L(v - a'_1) \dots (v - a'_n) = \text{const.};$$

or

$$u - a_i = \rho_i e^{i\theta_i}, \quad v - a'_i = \rho_i e^{-i\theta_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

d'où l'équation

$$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n = K e^{t\varphi(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}$$

qui, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, se réduit à

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \text{const.}$$

1321.

(1879, p. 387, 1917, p. 231.)

Étant donné un ellipsoïde, on décrit la sphère qui passe par les extrémités A, B, C de trois rayons conjugués et qui a son centre dans le plan ABC; trouver : 1° le lieu du centre de la sphère; 2° l'enveloppe de cette sphère.

BARBARIN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient O le centre de l'ellipsoïde, σ la section de l'ellipsoïde par le plan A, B, C, ω le centre de cette section. Les tangentes à σ en A, B, C sont parallèles à BC, CA, AB; ω est le centre de gravité de ABC.

1° Le lieu cherché situé dans le plan ABC est donc le lieu du centre des cercles circonscrits aux triangles inscrits dans σ et ayant ω comme centre de gravité.

Si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est l'équation de σ , et

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

l'équation du cercle ABC, et si $x = a \frac{t^2 + 1}{2t}$, $y = -bt \frac{t^2 - 1}{2t}$ représente un point de σ , le centre de gravité de ABC sera en ω , si l'on a, t_1, t_2, t_3 étant les paramètres de ABC,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 = 0,$$

d'où

$$16(a^2 x^2 + b^2 y^2) = (a^2 - b^2)^2 \quad \text{et} \quad 2(a^2 + b^2) + 2\gamma = 0.$$

2° La dernière relation montre que le cercle ABC est orthogonal au cercle fixe $x^2 + y^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} = 0$, l'enveloppe de la sphère ABC est donc la cyclide

$$\left| x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2 + b^2}{2} \right|^2 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{16} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 0.$$

On sait d'ailleurs que le plan ABC enveloppe l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{1}{3} = 0,$$

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ étant l'ellipsoïde donné.

1471.

(1883, p. 132, 1917, p. 232.)

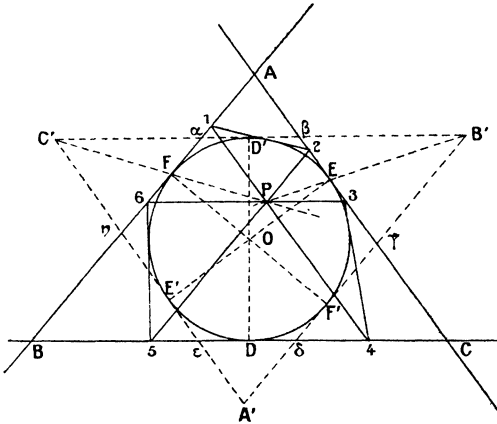
On donne dans un hexagone circonscriptible à un cercle les longueurs des trois diagonales qui unissent les sommets opposés; construire cet hexagone, sachant que ces trois diagonales sont respectivement parallèles à trois côtés de l'hexagone, deux quelconques de ces côtés n'étant pas consécutifs.

E. LEMOINE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit 123456 l'hexagone cherché, les diagonales 14, 25, 36 se coupent au point P et sont respectivement parallèles aux



côtés 23, 16, 45; soient O le centre du cercle inscrit, ABC le triangle formé par les côtés 23, 45, 61; D, E, F les contacts des côtés du triangle ABC avec le cercle O; D', E', F' les points de ce cercle diamétralement opposés à D, E, F; A'B'C' le triangle formé par les tangentes au cercle O en D' E' F'.

Le lieu du point P obtenu en menant par les intersections 1

et α d'une tangente variable au cercle O , avec AB et AC des parallèles à AC et AB , est une conique Γ_A passant par ED et F et ayant pour asymptotes $A'C'$ et $A'B'$, Γ_A et la conique analogue Γ_B d'asymptotes $B'C'$ et $B'A'$ et passant par D et F ont pour corde commune la droite $C'FP$. Le point P de concours des droites $A'D$, $B'E$, $C'F$ est commun aux trois coniques Γ_A , Γ_B , Γ_C , c'est le point de Brianchon de l'hexagone cherché. P est évidemment le symétrique par rapport à O du point de concours P' , de AD' , BE' , CF' , ses coordonnées trilineaires normales x, y, z par rapport à ABC sont

$$\frac{ax}{2a-p} = \frac{by}{2b-p} = \frac{cz}{2c-p},$$

ses distances $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ à BC, CA, AB sont

$$\delta_1 = \frac{2r}{a}(2a-p), \quad \delta_2 = \frac{2r}{b}(2b-p), \quad \delta_3 = \frac{2r}{c}(2c-p),$$

r étant le rayon OD , on en déduit, en désignant par h_1, h_2, h_3 les hauteurs de ABC issues de A, B, C et en posant

$$l = \overline{63}, \quad m = \overline{14}, \quad n = \overline{25},$$

$$\frac{l}{a} = \frac{ah_1 - 4ar + 2rp}{ah_1} = \frac{2(p-a)}{p} = \frac{2bc}{p^2} \cos^2 \frac{A}{2},$$

d'où

$$\frac{l}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{m}{\cos^2 \frac{B}{2}} = \frac{n}{\cos^2 \frac{C}{2}},$$

d'où

$$(1) \quad \frac{l}{EF^2} = \frac{m}{DF^2} = \frac{n}{ED^2};$$

on a aussi

$$\frac{l}{a} = \frac{2(h_1 - 2r)}{h_1};$$

d'où, en désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ les intersections des côtés des triangles $ABC, A'B'C'$,

$$\frac{l}{\alpha\beta} = \frac{m}{\varepsilon\eta} = \frac{n}{\delta\gamma} = x.$$

Les relations (1) permettent de construire un triangle semblable à DEF , donc une figure homothétique à la figure cherchée, d'où l'on déduira par une simple homothétie de centre O la solution du problème.

(39)

La seule condition de possibilité est que les relations (1) déterminent un triangle réel. La considération d'un des cercles exinscrits au triangle ABC conduirait à une solution tout à fait analogue.