

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 311-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__311_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2331.

(1917, p. 437.)

Par un point O commun à deux cercles orthogonaux, on mène une droite variable qui coupe ces deux cercles en A et B. Démontrer que le lieu du point conjugué harmonique de O par rapport à AB est une strophoïde.

(J. LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. L. MALOUE.

On reconnaît immédiatement que le lieu est une cubique unicursale C, ayant en O un point double où les tangentes sont les tangentes aux deux cercles, tangentes rectangulaires par hypothèse. Pour que le point M, conjugué de O par rapport à A et B soit rejeté à l'infini, il faut, ou bien que O

.

soit le milieu de AB, ce qui ne se produit que pour une seule direction de OM, ou bien que les points A et B soient rejetés tous les deux à l'infini, ce qui exige que OM soit une droite isotrope. On trouve bien pour C toutes les propriétés qui caractérisent une strophoïde.

2333.

(1917, p. 137.)

Par les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs passent une infinité de cubiques circulaires : démontrer que le point commun à la courbe et à son asymptote réelle et le foyer singulier sont deux points diamétralement opposés sur le cercle des neuf points du triangle.

(J. LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soient A, B, C les sommets du triangle, H son orthocentre, α , β , γ les pieds des hauteurs, I et J les points cycliques. On trouve immédiatement des cubiques dégénérées passant par ces neuf points : par exemple celle qui se compose du cercle B γ β C et de la droite AH α , celle qui se compose du cercle C α γ A et de la droite BH β (il y a en tout six cubiques dégénérées analogues). Ces deux cubiques déterminent un faisceau ayant pour base les neuf points dont il s'agit.

Une cubique G du faisceau sera déterminée si l'on donne sa tangente en I. La tangente en J est alors déterminée d'une façon unique, et réciproquement. Ces deux tangentes se rencontrent au foyer singulier F de la courbe qui décrit par conséquent une conique passant en I et J, c'est-à-dire un cercle. Ce cercle passe par les foyers singuliers des cubiques dégénérées envisagées plus haut, c'est-à-dire par les centres des cercles tels que B γ β C, c'est-à-dire encore par les milieux des segments tels que BC. On voit bien que F décrit le cercle des neuf points F du triangle ABC.

Il est maintenant commode d'introduire des arguments elliptiques. Supposons exprimées les coordonnées d'un point de G en fonctions elliptiques d'un paramètre; soient $2\omega_1$, $2\omega_2$ et $2\omega_3$ les périodes communes des fonctions intro-

duites ($\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$), et supposons la représentation telle que les arguments u, v, w de trois points en ligne droite satisfassent à la condition

$$u + v + w = 0 \text{ (à une période près).}$$

Si l'on désigne par les mêmes lettres les points et les paramètres correspondants, on devra avoir, à des périodes près,

$$\begin{aligned} B + C + \alpha &= 0, & C + A + \beta &= 0, & A + C + \gamma &= 0, \\ A + H + \alpha &= 0, & B + H + \beta &= 0, & C + H + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

d'où, par élimination de H, α, β et γ ,

$$B + C - A = C + A - B = A + B - C$$

et enfin

$$A \equiv B \equiv C,$$

ces congruences ayant lieu à des demi-périodes près. On trouve finalement que l'on satisfait à toutes les conditions écrites en posant, H ayant une valeur quelconque,

$$\begin{aligned} A &= H + \omega_1, & B &= H + \omega_2, & C &= H + \omega_3, \\ \alpha &= -2H + \omega_1, & \beta &= -2H + \omega_2, & \gamma &= -2H + \omega_3. \end{aligned}$$

Quant à I et J , ils doivent satisfaire à la relation suivante, exprimant que les neuf points $A, B, C, H, \alpha, \beta, \gamma, I, J$ sont les bases d'un faisceau de cubiques,

$$A + B + C + H + \alpha + \beta + \gamma + I + J = 0,$$

ce qui se réduit à

$$I + J = 2H.$$

On tire de là diverses conséquences.

1° Soit M le point à l'infini réel de la cubique. On a

$$M + I + J = 0, \quad \text{ou} \quad M = -2H,$$

et l'on en conclut que le point M appartient à la tangente à G en l'un quelconque des points A, B, C, H . Autrement dit, ces

tangentes sont toutes les quatre parallèles à l'asymptote réelle de la cubique.

2° Soit P le point où cette asymptote réelle, c'est-à-dire la tangente en M, rencontre G. On a

$$P = -2M = 4H - 2\alpha = -2\beta = -2\gamma.$$

Donc le point P appartient à la tangente à G en chacun des points α, β, γ .

3° On voit encore que l'on a

$$P + \alpha + \beta + \gamma + I + J = 0,$$

car cela se réduit à

$$4H - 6H + 2H = 0.$$

Le point P est donc sur la conique $\alpha\beta\gamma IJ$, c'est-à-dire sur le cercle des neuf points Γ , comme il est indiqué dans l'énoncé.

Reste à démontrer la relation remarquable signalée entre les points P et F. Or la connaissance de P sur Γ détermine G et par suite F d'une façon unique. De même F détermine G. Il y a donc entre ces deux points une correspondance homographique sur Γ . Or si F vient au milieu de BC, G dégénère, comme on l'a vu, en le cercle $B\gamma\beta C$ et en la droite $AH\alpha$, et P devient le point de rencontre de AH avec la tangente en γ ou β au cercle $B\gamma\beta C$. Ce point est le milieu de AH, comme on le reconnaît tout de suite, c'est-à-dire le point diamétralement opposé à F sur Γ . On trouve de même comme points correspondants de l'homographie le milieu de CA et le milieu de BH, le milieu de AB et le milieu de CH, soit encore des couples de points diamétralement opposés sur Γ . L'homographie envisagée se confond donc nécessairement avec celle qui résulte de la conjugaison des points diamétralement opposés sur Γ , ce qui démontre la dernière partie de l'énoncé.

2335.

(1917, p. 437.)

Démontrer que si une sphère variable passe en quatre points fixes d'une biquadratique gauche qui sont situés

dans un même plan, les quatre autres points communs à la sphère et à cette courbe sont dans un même plan de direction fixe.

(J. LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. L. MALOUÉ.

Soient P et Q deux quadriques passant par la biquadratique gauche donnée B, S la sphère variable, A le plan qui contient les quatre points fixes. P, Q, S se coupent en huit points formant un système de Lamé. Quatre de ces points étant dans le plan A, les quatre autres sont dans un plan B. Les ∞^2 quadriques qui passent par les huit points forment un réseau ponctuel, et il en est de même des coniques, traces de ces quadriques sur un plan quelconque. Si donc p, q, s, a, b sont les coniques ou droites à l'infini respectivement de P, Q, S, A, B (S est l'ombicale), a et b constituent dans leur ensemble une des coniques réduites à deux droites du réseau ponctuel déterminé par P, Q, S. Quand la sphère varie dans les conditions de l'énoncé, p, q, s et a restent fixes. Il en est donc de même de b , ce qui démontre le théorème.

2336.

(1917, p. 438.)

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre tangentes d'une hypocycloïde à trois rebroussements, P le point commun aux deux premières, Q le point commun aux deux autres : démontrer que le foyer de la parabole tangente aux quatre droites est symétrique, par rapport au milieu de PQ, du point commun aux troisièmes tangentes à l'hypocycloïde issues de P et de Q.

(J. LEMAIRE.)

2337.

(1917, p. 438.)

Si l'on joint le foyer d'une parabole aux six sommets d'un quadrilatère circonscrit, la parallèle menée par chaque sommet à la droite joignant le foyer au sommet opposé touche l'hypocycloïde à trois rebroussements inscrite au quadrilatère.

(J. LEMAIRE.)

2338.

(1917, p. 438.)

Si un quadrilatère est circonscrit à une hypocycloïde à trois rebroussements, les troisièmes tangentes à cette courbe issues de chacun des couples de sommets opposés se coupent sur une même tangente qui est parallèle à l'axe de la parabole inscrite au quadrilatère.

(J. LEMAIRE.)

SOLUTIONS

Par M. R. B.

Toutes ces propositions peuvent être rattachées à une même propriété des cubiques nodales, que nous établirons tout d'abord.

Toutes les cubiques ayant un point double donné O dépendent linéairement de six paramètres. Celles qui passent par cinq points donnés A, B, C, D, E forment un faisceau, et l'on reconnaît immédiatement que leurs tangentes au point double O sont conjuguées dans une involution.

Supposons en particulier que les points A, B, C soient en ligne droite. Soit G la conique qui passe par les cinq points A, B, D, E, O. Si les tangentes au point double O à l'une quelconque des cubiques du faisceau rencontrent G aux points M et N, il résulte de ce qui vient d'être dit que MN passe par un point fixe quand la cubique varie.

Or, parmi ces cubiques, il en est une qui se compose des trois droites ABC, OD, OE. Pour cette cubique, MN se confond avec DE. Une autre cubique se compose de la conique G et de la droite OC. Pour cette seconde cubique, MN se confond avec OC. Le point fixe par lequel passe MN est donc le point de rencontre de OC avec DE.

On peut énoncer comme il suit le résultat obtenu : Soient Γ une cubique ayant un point double en O, A, B, C, D les quatre points autres que O où la rencontre une conique G passant en O, M et N les points où les tangentes à Γ en O rencontrent G. Le point O, le point de rencontre de MN avec DE et le troisième point C où AB rencontre Γ sont en ligne droite.

Énonçons maintenant la propriété corrélatrice, en supposant qu'au point O corresponde la droite de l'infini, aux droites OM et ON les points cycliques. Γ devient une courbe de troisième classe ayant pour bitangente la droite de l'infini avec les points cycliques pour point de contact c'est-à-dire une H_3 (hypocycloïde à trois rebroussements). G devient une parabole, MN le foyer de cette parabole, A, B, D, E , les quatre tangentes communes à Γ et à G , C la troisième tangente issue à Γ du point de rencontre de A et B . Le point de rencontre de MN avec DE devient la droite qui joint le foyer de G au point de rencontre de D et E . Ces deux droites et la droite O doivent concourir, c'est-à-dire que les deux premières sont parallèles. On aboutit donc à ceci :

Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à la fois à une parabole et à une H_3 , la troisième tangente à la H_3 issue d'un sommet de ce quadrilatère et la droite qui joint le sommet opposé au foyer de la parabole sont parallèles.

C'est la proposition 2337.

Adoptons maintenant les notations de l'énoncé 2336. Soit F le foyer de la parabole. FP , d'après ce qu'on vient de voir, est parallèle à la troisième tangente issue de Q ; FQ est parallèle à la troisième tangente issue de P . La proposition énoncée en résulte immédiatement.

Les tangentes en P et Q et les deux autres couples de tangentes analogues se coupent sur une droite Δ qui passe par les symétriques de F par rapport au milieu des diagonales du quadrilatère et qui est par conséquent parallèle à la droite qui joint ces milieux. Or cette dernière droite, lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère, contient le centre de la parabole. rejeté à l'infini dans la direction de son axe. Δ est donc parallèle à cet axe, ce qui démontre partiellement la proposition 2338.

Pour achever la démonstration, il faut établir que Δ touche la H_3 . Or c'est là une propriété générale des courbes de troisième classe. Établissons la propriété corrélatrice pour les courbes de troisième ordre.

Soient A, B, C, D quatre points d'une courbe de troisième ordre Γ ; $(AB), (CD), \dots$ les troisième points où $AB, CD, \dots$ rencontrent Γ ; je dis que les trois droites $(AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(BC)$ rencontrent Γ en un même point.

Supposons, pour nous placer dans le cas le plus général, que Γ soit de genre *un*, et introduisons des arguments elliptiques, tellement choisis que la somme des arguments de trois points en ligne droite soit nulle.

Désignons les points et leurs arguments par les mêmes lettres. On aura

$$(AB) = -A - B, \quad (CD) = -C - D.$$

Si P est le troisième point où $(AB)(CD)$ rencontre Γ , on a

$$P = -(AB) - (CD) = A + B + C + D.$$

On voit, à cause de la symétrie de l'expression de P , que les droites $(AC)(BD)$ et $(AD)(BC)$ passent aussi par le point P , ce qui démontre la proposition.

Si Γ est unicursale, on fera une démonstration semblable en introduisant le paramètre en fonction duquel s'expriment rationnellement les coordonnées d'un point de Γ .

2339.

1917, p. 418

Si cinq droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ touchent une hypocycloïde à trois rebroussements, les axes des cinq paraboles tangentes respectivement à quatre de ces droites forment un pentagone qui a ses angles égaux à ceux du pentagone formé par les cinq droites. (J. LEMAIRE.)

SOLUTION.

Par M. R. B.

Je m'appuierai sur ce théorème de M. G. Humbert : *L'orientation du système des trois tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements* (c'est-à-dire la somme des angles, définie à π près, que font ces trois tangentes avec un axe fixe) *est constante* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Voir le Mémoire de M. J. LEMAIRE, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (N. A. 1913, p. 54)

On peut choisir l'axe fixe de telle manière que cette orientation soit nulle.

Dans ce qui suit je désignerai par $[X]$ l'orientation d'une droite X .

Soient alors F_α le foyer de la parabole P_α , qui touche les quatre droites β , γ , δ , ε , et X_α son axe. La droite qui joint le point de rencontre $(\delta\varepsilon)$ des droites δ et ε au point F_α et la droite X_α sont, en vertu du théorème de Porcelet appliqué à la parabole, également inclinées sur les droites δ et ε . Cela revient à dire que les deux systèmes de droites $(\delta\varepsilon) F_\alpha$ et X_α , δ et ε ont même orientation :

$$[(\delta\varepsilon)F_\alpha] + [X_\alpha] = [\delta] + [\varepsilon].$$

D'autre part on sait (voir la question 2337) que $(\delta\varepsilon) F_\alpha$ est parallèle à la troisième tangente issue du point $(\beta\gamma)$ à l'hypocycloïde. On a donc, en vertu du théorème de M. Humbert,

$$[(\delta\varepsilon)F_\alpha] + [\beta] + [\gamma] = 0.$$

On tire de ces deux relations

$$[X_\alpha] = [\beta] + [\gamma] + [\delta] + [\varepsilon].$$

De cette relation et des relations analogues on tire

$$[X_\alpha] + [\alpha] = [X_\beta] + [\beta] = \dots = [X_\varepsilon] + [\varepsilon].$$

Les droites X_α , X_β , ... d'une part et les droites α , β , ... de l'autre sont donc également inclinées, en sens contraires, sur une même droite, ce qui établit la proposition,

2341.

(1917, p. 438.)

Si quatre tangentes d'une hypocycloïde à trois rebroussements forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle, la troisième diagonale touche la courbe en un point M; démontrer que le foyer de la parabole tangente aux quatre droites est sur la troisième diagonale, et que cette diagonale et FM ont le même milieu.

(J. LEMAIRE.)

SOLUTION.

Par M. R. B.

Soient ABCD un quadrilatère inscriptible, E le point de rencontre de AB et de CD, G le point de rencontre de AC et de BD. On reconnaît aisément, par des considérations d'angles, que les cercles ACE et DCG, par exemple se coupent en un point F de EG. F est le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère.

D'après la propriété qui fait l'objet [de la question 2337, la troisième tangente issue de E à l'hypocycloïde est parallèle à FG, et la troisième tangente issue de G est parallèle à FE. Ces deux tangentes se confondent donc avec EG. Leur point de rencontre doit être considéré comme le point de contact M, et la figure FGME formant un parallélogramme, la proposition est démontrée (pour abréger, on esquisse un raisonnement que l'on rendrait rigoureux en considérant d'abord la parabole et l'hypocycloïde inscrite au quadrilatère qui dérive du quadrilatère considéré en faisant un peu tourner le côté ECD autour du point E, et en passant à la limite).

