

MAURICE FRÉCHET

**Sur les conditions pour qu'une fonction
 $P(x,y) + iQ(x,y)$ soit monogène**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 215-219

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__215_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D3a]

SUR LES CONDITIONS POUR QU'UNE FONCTION

$P(x, y) + iQ(x, y)$ SOIT MONOGÈNE ;

PAR M. MAURICE FRÉCHET

(Strasbourg, Bas-Rhin).

1. Dans un précédent article publié ici-même ⁽¹⁾, j'ai montré après W.-H. Young comment les énoncés

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série. t. XII, 1912, p. 1-35.

de la théorie des fonctions de plusieurs variables se modèlent plus exactement sur ceux relatifs aux fonctions d'une variable, si l'on formule d'une certaine façon la définition de la différentielle totale.

Je faisais remarquer, en outre, que non seulement cette définition, qui semble due à Stolz, est ainsi, comme W.-H. Young semble le premier l'avoir montré, plus avantageuse, mais encore que si l'on se place au point de vue géométrique, cette définition *s'impose*.

Si, en effet, on dit qu'une fonction $z = f(x, y)$ a une différentielle totale en x_0, y_0 , lorsque la surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent non parallèle à Oz , au point $x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$ et si, l'équation de ce plan étant

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

on appelle $pdx + qdy$ la différentielle de $f(x, y)$ en x_0, y_0 , on voit, comme je l'ai prouvé dans cet article, que cette définition est équivalente à la suivante, qui est celle de Stolz à la forme près :

Une fonction $f(x, y)$ a une différentielle totale au point x_0, y_0 , s'il existe une fonction linéaire des accroissements des variables $p\Delta x + q\Delta y$ qui ne diffère de l'accroissement de f que par une quantité infiniment petite par rapport à l'écart du point x_0, y_0 , et du point voisin $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$. Autrement dit

$$\Delta f = p\Delta x + q\Delta y + \varepsilon(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

où ε tend vers zéro avec $|\Delta x| + |\Delta y|$. Il en résulte, en particulier en faisant Δx ou Δy nul, que f a une dérivée partielle par rapport à x , qui est p , et par rapport à y , qui est q .

II. Cette définition permet de formuler correcte-

ment et simplement les conditions auxquelles une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ soit

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

est une fonction *monogène* de z

On dit qu'une fonction $f(z)$, définie dans un domaine D, est monogène en un point x_0, y_0 de D si elle a une dérivée en ce point. Dans les Traités d'Analyse, on énonce comme la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x_0} = \frac{\partial Q}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_0} = -\frac{\partial Q}{\partial x_0}.$$

Ceci suppose donc d'abord que P et Q ont des dérivées partielles par rapport à x et à y ; et en fait, non seulement on le suppose, mais on suppose que ces dérivées partielles sont continues, sans d'ailleurs prouver que cette continuité est nécessaire.

III. A l'aide de la définition de la différentielle qui vient d'être rappelée, il n'y a aucune difficulté à préciser les conditions nécessaires et suffisantes.

Si, en effet, f est monogène en x_0, y_0 , on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'_{z_0} = \omega,$$

ω étant une quantité qui tend vers zéro quand z tend vers z_0 ; ou encore (en posant $z = z_0 + \Delta x + i\Delta y$ et $f(z) - f(z_0) = \Delta P + i\Delta Q$)

$$\frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x + i\Delta y} - f'_{z_0} = \omega.$$

Si l'on pose $f'_{z_0} = p + iq$, $\omega = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$,

$$\begin{aligned} & \Delta P + i\Delta Q - [(p\Delta x - q\Delta y) + i(p\Delta y + q\Delta x)] \\ & = \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y + i(\varepsilon_1 \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x), \end{aligned}$$

D'où

$$\Delta P - (p\Delta x - q\Delta y) = \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y,$$

Or

$$\Delta Q - (p\Delta y + q\Delta x) = \varepsilon_1 \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x.$$

$$|\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y| \leq |\varepsilon_1| |\Delta x| + |\varepsilon_2| |\Delta y| \\ - (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|) (|\Delta x| + |\Delta y|).$$

On peut donc remplacer

$$\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y \text{ par } \varepsilon (|\Delta x| + |\Delta y|),$$

où ε tend vers zéro avec $|\Delta x| + |\Delta y|$. Par suite, P a une différentielle totale $p dx - q dy$ au point x_0, y_0 . De même, Q a une différentielle $p dy + q dx$ en ce point. Alors

$$\frac{dP + i dQ}{dx + i dy} = \frac{(p dx - q dy) + i(p dy + q dx)}{dx + i dy} \\ = \frac{p dz + i q dz}{dz} = p + i q.$$

Enfinement, si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est homogène en x_0, y_0 :

1° $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont chacun une différentielle au sens de Stolz au point x_0, y_0 ;

2° Et le quotient de la différentielle de f par la différentielle de z , soit

$$\frac{dP + i dQ}{dx + i dy}$$

est indépendant de dx et de dy . Le quotient sera d'ailleurs la dérivée f'_{z_0} .

La réciproque est vraie. Car alors on aura

$$\Delta P - dP = \varepsilon (|\Delta x| + |\Delta y|)$$

$$\Delta Q - dQ = \varepsilon' (|\Delta x| + |\Delta y|)$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ tendant vers zéro avec Δz .

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{dP + idQ}{dx + idy} + (\varepsilon + i\varepsilon') \left(\frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\Delta x + i\Delta y} \right). \end{aligned}$$

Le premier terme du dernier membre est, par hypothèse, une quantité $p + iq$ indépendante de $dx = \Delta x$ et de $dy = \Delta y$. Dans le dernier terme, $\varepsilon + i\varepsilon'$ tend vers zéro avec Δz et le module de

$$\frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\Delta x + i\Delta y}$$

est inférieur à $\sqrt{2}$. Donc $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ tend vers $p + iq$, quelle que soit la manière dont Δx et Δy tendent vers zéro.

IV. On remarque du reste que les conditions 1^o et 2^o, nécessaires et suffisantes pour que $f(z)$ soit monogène en x_0, y_0 , peuvent s'exprimer ainsi :

a. $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y au point x_0, y_0 (cette condition est en général sous-entendue).

b. On a

$$\frac{\partial P}{\partial x_0} = \frac{\partial Q}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial P}{\partial y_0} = -\frac{\partial Q}{\partial x_0}$$

(cette condition est en général la seule exprimée).

c. Les quantités

$$\Delta P - \left(\frac{\partial P}{\partial x_0} \Delta x + \frac{\partial P}{\partial y_0} \Delta y \right), \quad \Delta Q - \left(\frac{\partial Q}{\partial x_0} \Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y_0} \Delta y \right)$$

sont infiniment petites par rapport à $|\Delta x| + |\Delta y|$ (cette condition est généralement soit omise, soit remplacée par la condition inutilement restrictive de la continuité des dérivées premières de P et de Q).