

F. BALITRAND

## Démonstration du théorème de Chasles sur les arcs égaux de Lemniscate

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1919), p. 213-215

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1919\\_4\\_19\\_\\_213\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__213_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

[M' 6b $\alpha$ ]

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CHASLES  
SUR LES ARCS ÉGAUX DE LEMNISCATE ;

PAR M. F. BALITRAND.

---

Chasles a appelé *arcs associés* sur une conique deux arcs dont la différence est rectifiable par la ligne droite. Quand la conique est une hyperbole équilatère, il a énoncé la proposition suivante (*C. R. Acad. Sc.*, des 23 octobre 1843 et 21 juillet 1845) : *A deux arcs associés sur une hyperbole équilatère correspondent, sur la lemniscate qui est sa podaire centrale, deux arcs égaux.*

Il n'a pas donné la démonstration de ce théorème, qui ne figure pas non plus dans le commentaire de De Jonquières (*Mélanges de Géométrie pure*, p. 55 à 113). Elle ne se trouve pas davantage, croyons-nous, dans les ouvrages classiques de MM. Gomes Teixeira et Gino Loria sur les courbes remarquables, aux chapitres consacrés à la lemniscate. La seule démonstration que nous connaissions est celle qui a été donnée par M. R. Bricard (*N. A.*, 1902, p. 150). Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'en donner une nouvelle,

basée sur des considérations de géométrie infinitésimale.

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux points d'une conique limitant un arc associé. Chasles a démontré que lorsque cet arc se déplace sur la courbe, les tangentes à ses extrémités se coupent en un point  $M$  qui décrit une conique homofocale à la conique donnée.

Désignons par  $s$ ,  $\rho$ ,  $\varepsilon$ , l'arc, le rayon de courbure et l'angle de contingence de  $(M)$  en  $M$ ; par les mêmes lettres, affectées des indices 1 et 2, les éléments correspondants de la conique donnée en  $M_1$  et  $M_2$ .

La normale en  $M$  à  $(M)$  est la bissectrice de l'angle  $M_1MM_2$ ; elle coupe en  $I_1$  et  $I_2$  les normales en  $M_1$  et  $M_2$  à la conique donnée. Le point  $I_1$  étant le centre instantané de rotation pour un déplacement infiniment petit du segment  $MM_1$ , on a

$$ds = MI_1 \varepsilon_1, \quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{\varepsilon_1}{MI_1}.$$

De même

$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{\varepsilon_2}{MI_2};$$

et par suite

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \times \frac{MI_2}{MI_1}.$$

Si l'on appelle  $2\theta$  l'angle  $M_1MM_2$ , puisque  $MI_1I_2$  est la bissectrice de cet angle, on a

$$MM_1 = MI_1 \cos \theta, \quad MM_2 = MI_2 \cos \theta;$$

donc

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \times \frac{MM_2}{MM_1}.$$

Mais dans une conique les rayons de courbure en deux de ses points sont entre eux comme les cubes des portions de tangentes correspondantes, comprises entre leur point de concours et les points

de contact. Par suite,

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Cela posé, supposons que la conique donnée soit une hyperbole équilatère et considérons la lemniscate qui est sa podaire par rapport à son centre O. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les points correspondant à  $M_1$  et  $M_2$ ;  $d\tau_1$  et  $d\tau_2$  les éléments d'arc de la lemniscate en ces points. D'après une formule connue, on a

$$d\tau_1 = \frac{OM_1}{\rho_1} ds_1, \quad d\tau_2 = \frac{OM_2}{\rho_2} ds_2;$$

d'où

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{OM_1}{OM_2} \times \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Mais dans l'hyperbole équilatère le rayon de courbure en un point est proportionnel au cube du rayon vecteur de ce point. Donc  $d\tau_1 = d\tau_2$ . c. q. f. d.