F. BALITRAND

Applications d'une formule de géométrie infinitésimale

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 19-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__19_0>

[O'2]

APPLICATIONS D'UNE FORMULE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

PAR M. F. BALITRAND.

En un point M d'une courbe (M) menons la tangente Mx et la normale My et prenons ces droites pour axes de coordonnées mobiles. Quand M décrit (M), une droite MM_1, inclinée sur Mx d'un angle variable θ_1, enveloppe une courbe (M_1) qu'elle touche en un point M_1.

Soient s, ρ, ε l'arc, le rayon de courbure, l'angle de contingence de (M) en M; s_1, ρ_1, ε_1 les mêmes éléments de (M_1) en M_1. Si l'on désigne le segment MM_1 par r_1, on a la formule (*N. A.*, 1915, p. 4)

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\sin\theta_1}\left(\frac{dr}{ds} - \cos\theta_1\right),$$

qui peut s'écrire

$$\frac{r_1\,dr_1}{ds} = \rho_1 \sin\theta_1 - r_1\cos\theta_1.$$

Le second membre représente la projection, changée de signe, du contour MM_1C_1 sur Mx. Si l'on appelle x_1 l'abscisse du centre de courbure C_1 de (M_1) en M_1, on a donc

$$x_1 = -\frac{r_1\,dr_1}{ds}.$$

Cette formule qui fournit soit la valeur de x_1, soit l'interprétation géométrique de $\frac{dr_1}{ds}$, est susceptible de quelques applications.

I. Soit $r_1 =$ const. Alors $x_1 = 0$; ce qui montre que le centre de courbure C_1 est sur la normale en M.

II. Menons par M une seconde droite MM_2, inclinée d'un angle θ_2 sur Mx et soient r_2 et x_2 les quantités analogues à x_1 et r_1. Si $r_1 = r_2$, $x_1 = x_2$; c'est-à-dire que la droite qui joint les centres de courbure C_1 et C_2 est parallèle à la normale My. Donc :

Si les longueurs des tangentes menées d'un point M *à deux courbes* (M_1) *et* (M_2) *sont égales, la normale à* (M) *est parallèle à la droite qui joint les centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2) *aux points de contact.* (Mannheim, *Princ. et dév. de Géom. ciném.*, p. 46.)

III. Plus généralement supposons $r_1 = Kr_2$, alors $x_1 = K^2 x_2$; donc :

Si les longueurs des tangentes menées d'un point M *à deux courbes* (M_1) *et* (M_2) *sont dans un rapport constant, la normale à* (M) *divise le segment* $C_1 C_2$ *des centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2), *en* M_1 *et* M_2, *dans le rapport constant* K^2.

Donc, si (M_1) et (M_2) sont deux cercles, le lieu du point M est un cercle, car sa normale passe par un point fixe de la droite qui joint les centres des deux cercles donnés.

IV. Au lieu de deux courbes, considérons n courbes (M_1), (M_2), ... (M_n) et supposons que les longueurs des tangentes menées de M à ces courbes soient liées par la relation

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0.$$

Par dérivation on obtient

$$f'_{r_1}\,dr_1 + f'_{r_2}\,dr_2 + \ldots + f'_{r_n}\,dr_n = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{r_1}f'_{r_1}x_1 + \frac{1}{r_2}f'_{r_2}x_2 + \ldots + \frac{1}{r_n}f'_{r_n}x_n = 0.$$

On voit que si l'on affecte les centres de courbure C_1, C_2, ..., C_n de masses égales à $\frac{1}{r_1}f'_{r_1}$, $\frac{1}{r_2}f'_{r_2}$, ..., $\frac{1}{r_n}f'_{r_n}$; la normale à (M) passe par le centre de gravité de ces points.

Considérons en particulier le cas de n cercles et supposons que les longueurs des tangentes qui leur sont menées de M soient liées par

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = \text{const.}$$

Le lieu de M est alors un cercle, car sa normale passe par un point fixe, le centre de gravité des centres des n cercles.

Ces cercles, et d'une façon plus générale, les courbes (M_1), (M_2), ..., (M_n), peuvent être remplacés par des points, assimilés à des cercles de rayon nul. Si par exemple on prend une ellipse, un ovale de Cassini, un ovale de Descartes, qui ont respectivement pour équations

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad r_1 r_2 = a^2, \quad ar_1 + br_2 = c,$$

on a

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{r_1}{r_2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{r_1^2}{r_2^2}, \qquad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{br_1}{ar_2};$$

et ces relations conduisent aux constructions connues des tangentes à ces courbes.