

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18 (1918), p. 51-80

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__51_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1078.

(1872, p. 191, 1916, p. 366)

On donne une courbe plane quelconque et la tangente at au point a de cette courbe. On mène la corde bc parallèlement à la tangente at . Lorsque bc se rapproche indéfiniment de at , en restant parallèle à cette droite, on demande :

1° La limite des positions de la droite ac qui joint le point a au milieu e de la corde bc . On obtient ainsi à la limite la droite que M. Transon a appelée axe de déviation de la courbe en a :

2° La limite des positions du point de rencontre des axes de déviation de la courbe en b et c ;

3° La limite des positions des droites qu'on obtient en joignant le point a aux points d'intersection des cercles osculateurs de la courbe donnée en b et c ;

4° La limite des positions du point de rencontre de la corde commune à ces deux circonférences et de la tangente at .

MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. J. SER.

1. Soit Ox la tangente en un point O de la courbe $f(XY) = 0$. Dans la région voisine de ce point, on peut exprimer X en fonction de Y par une relation de la forme

$$1) \quad X = mY + pY^{\frac{1}{2}} + qY^{\frac{3}{2}} + rY^2 + \dots = \varphi(Y),$$

les constantes p, m, q, r, \dots étant déterminées par la condition que si l'on substitue la valeur de X dans l'équation $f=0$ les termes en Y, Y^2, Y^3, \dots seront successivement nuls.

La droite $Y = \Delta y$ coupe la courbe en deux points M_1 et M_2 dont les abscisses Δx_1 et Δx_2 s'expriment en fonction de $\sqrt{\Delta y}$ au moyen de l'équation (1), le signe positif du radical correspondant par exemple au point M_1 de manière que si l'on pose $\sqrt{\Delta y} = \varepsilon$, on ait

$$(2) \quad \Delta x_1 = p\varepsilon + m\varepsilon^2 + q\varepsilon^3 + r\varepsilon^4 + \dots$$

Soit $\Delta \alpha_1$ l'angle de la tangente en M_1 avec dx . Nous aurons

$$\begin{aligned} \text{tang } \Delta \alpha_1 &= \frac{1}{m + \frac{p}{2\varepsilon} + \frac{3q}{2}\varepsilon^2 + \dots} = \frac{2\varepsilon}{p\left(1 + \frac{2m}{p}\varepsilon + \dots\right)} \\ &= \frac{p}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{2m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2 - 3pq}{p^2}\varepsilon^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sin \Delta \alpha_1 &= \text{tang } \Delta \alpha_1 (1 + \text{tang}^2 \Delta \alpha_1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \text{tang } \Delta \alpha_1 - \frac{1}{2} \text{tang } \Delta \alpha_1^3 + \dots \\ &= \frac{2\varepsilon}{p} \left(1 - \frac{2m}{p}\varepsilon - \frac{4m^2 - 3pq - 2}{p^2}\varepsilon^2 + \dots\right). \end{aligned}$$

$$(4) \quad \Delta x_1 = \frac{2\varepsilon}{p} \left(1 - \frac{2m}{p}\varepsilon + \dots\right).$$

La droite $X = mY$ est évidemment l'axe de déviation OD de la courbe au point O .

II. Transportons l'origine au point M_1 et prenons pour nouvel axe des X la tangente M_1X_1 en M_1 . Les formules de transformation seront :

$$(5) \quad \begin{cases} X = \Delta x_1 + X_1 \cos \Delta \alpha_1 - Y_1 \sin \Delta \alpha_1, \\ Y = \Delta y + X_1 \sin \Delta \alpha_1 + Y_1 \cos \Delta \alpha_1, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} X_1 = (X - \Delta x_1) \cos \Delta \alpha_1 + (Y - \Delta y) \sin \Delta \alpha_1, \\ Y_1 = -(X - \Delta x_1) \sin \Delta \alpha_1 + (Y - \Delta y) \cos \Delta \alpha_1. \end{cases}$$

La substitution (5) dans l'équation $f=0$ nous donnera une

équation $f_1 = 0$, d'où nous déduirons un nouveau développement

$$X_1 = m_1 Y_1 + p_1 Y_1^{\frac{1}{2}} + \dots$$

En revenant aux anciens axes de coordonnées nous aurons pour équation de l'axe de déviation $M_1 D_1$ relatif au point M_1

$$(7) \quad \begin{aligned} & (X - \Delta x_1)(\cos \Delta \alpha_1 + m_1 \sin \Delta \alpha_1) \\ & - (Y - \Delta y)(m_1 \cos \Delta \alpha_1 - \sin \Delta \alpha_1) = 0. \end{aligned}$$

Développons cette équation en nous bornant aux infiniment petits du premier ordre et en posant par suite

$$m_1 = m + \mu \Delta x :$$

nous obtiendrons

$$X - mY + \Delta x_1(mX + Y - \mu Y) - \Delta x_1 = 0.$$

Nous aurons de même pour l'équation de l'axe $M_2 D_2$ relatif au point M_2

$$X - mY + \Delta x_2(mX + Y - \mu Y) - \Delta x_2 = 0.$$

Et comme $\Delta x_1 + \Delta x_2$ et $\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2$ sont des infiniment petits du second ordre, la limite de l'intersection des deux axes sera le point déterminé par les équations

$$(8) \quad \begin{cases} X - mY = 0, \\ Y = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1(1 + m^2 - \mu)} = \frac{p^2}{2(1 + m^2 - \mu)}. \end{cases}$$

Ce point se trouve donc, à un infiniment petit du second ordre près, sur l'axe MD. Sous une autre forme on peut dire que le lieu du point de rencontre des axes relatifs à deux points M_1 et M_2 situés sur une parallèle à la tangente Ox admet l'axe OD comme tangente d'inflexion.

Pour calculer μ , effectuons les opérations indiquées plus haut. La substitution (5) réduite aux infiniment petits du premier ordre devient

$$(9) \quad \begin{cases} X = X_1 + \Delta x_1 \left(\frac{p^2}{2} - Y_1 \right), \\ Y = Y_1 + \Delta x_1 X_1. \end{cases}$$

D'autre part, nous pouvons, dans le voisinage des points O et M₁, remplacer la courbe f par celle qui est représentée par l'équation

$$(10) \quad \varphi = (X - mY - rY^2 - \dots)^2 - Y(p + qY + rY^2 + \dots)^2 = 0 \\ = X^2 - (m^2 - 2pq)Y^2 - 2mXY - p^2Y + \dots$$

et nous obtenons après substitution

$$\varphi_1 = \varphi(X_1, Y_1) + \Delta x_1 \left[\left(\frac{p^2}{2} - Y_1 \right) \varphi'_{X_1} + X_1 \varphi'_{Y_1} \right] \\ = (1 - 2m \Delta x_1) X^2 - 2[m + (2pq + 1 - m^2) \Delta x_1] XY + \dots$$

d'où nous tirons

$$(11) \quad m_1 = \frac{m + (2pq + 1 - m^2) \Delta x_1}{1 - 2m \Delta x_1} = m + (m^2 + 1 - 2pq) \Delta x_1$$

et finalement

$$(12) \quad \mu = m^2 + 1 + 2pq.$$

L'interprétation du coefficient μ est facile. Soient ω l'angle de l'axe MD avec la normale MY en O et $\omega + \Delta\omega$ l'angle $\widehat{D_1 M_1 Y_1}$; nous avons évidemment

$$\text{tang } \omega = m \quad \text{tang}(\omega + \Delta\omega) = m + \mu \Delta x$$

et par suite, comme approximation du premier ordre,

$$(13) \quad \mu = \frac{\text{tang}(\omega + \Delta\omega) - \text{tang } \omega}{\Delta x_1} \\ = \frac{\Delta\omega}{\Delta x_1} (1 + \text{tang}^2 \omega) = (1 + m^2) \frac{\Delta\omega}{\Delta x_1};$$

quand μ est nul, la variation de ω est donc un infiniment petit du second ordre par rapport à Δx_1 .

En portant la valeur de μ dans les équations (8) nous obtenons pour les coordonnées du point d'intersection x_0, y_0 des axes M₁D₁ et M₂D₂

$$(14) \quad x_0 = -\frac{mp}{4q}, \quad y_0 = \frac{-p}{4q}.$$

Ce résultat s'interprète immédiatement. Il résulte en effet

du calcul précédent que nous n'avons eu à faire intervenir dans les équations f et φ que les coefficients m , p et q , et tout se passe par conséquent comme si nous avions cherché le point de rencontre des axes de direction relatifs à deux points de la conique

$$(X - mY)^2 - pY(p + 2qY) = 0$$

qui se coupent naturellement au centre.

On peut donc conclure des considérations précédentes :

L'enveloppe des axes de déviation est le lieu des centres des coniques ayant avec la courbe un contact du cinquième ordre.

Lorsque μ est nul on a la relation

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{\rho^2(1 + m^2)}{16q^2} = \frac{\rho^4}{4(1 + m^2)} = R^2 \cos^2 \omega$$

puisque $\frac{\rho^2}{2}$ est le rayon de courbure en O . Dans ce cas le point x_0y_0 est la projection sur OD du centre de courbure. Effectivement, si l'on considère le déplacement infiniment petit de l'angle DOX considéré comme invariable, le centre instantané de rotation est le centre de courbure qui se projette bien sur OD au point où cette droite touche son enveloppe.

III. Le cercle de courbure au point M_1 a pour équation, dans le système d'axes $M_1X_1Y_1$,

$$X_1^2 + Y_1^2 - 2R_1Y_1 = 0$$

et par conséquent, dans le système XOY ,

$$\begin{aligned} (15) \quad & (X - \Delta x)^2 + (Y - \Delta y)^2 \\ & - 2R_1[Y - \Delta y] \cos \Delta \alpha_1 - (X - \Delta x) \sin \Delta \alpha_1 = 0 \\ & = X^2 + Y^2 - 2\xi_1 X - 2\tau_1 Y + K_1. \end{aligned}$$

L'axe radical des centres de courbure en M_1 et M_2 est donc la droite

$$2(\xi_1 - \xi_2)X + 2(\tau_1 - \tau_2)Y = K_1 - K_2$$

qui coupe la tangente OX en un point H dont l'abscisse h a

pour valeur

$$h = \frac{K_1 - K_2}{2(\xi_1 - \xi_2)}$$

$$= \frac{\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 + 2\Delta y(R_1 \cos \alpha_1 - R_2 \cos \alpha_2) - 2(R_1 \Delta x_1 \sin \Delta \alpha_1 - R_2 \Delta x_2 \sin \Delta \alpha_2)}{\Delta x_1 - \Delta x_2 - (R_1 \sin \Delta \alpha_1 - R_2 \sin \Delta \alpha_2)}.$$

Les valeurs principales du numérateur et du dénominateur sont les termes en ε^3 dans leur développement. Il suffit donc de former ces termes. Remarquons que, pour le calcul, nous n'aurons besoin de développer R_1 en fonction de ε que jusqu'aux termes en ε^2 .

Posons donc

$$R_1 = \frac{p^2}{2} (1 + \rho \varepsilon + 5 \varepsilon^2),$$

$$\Delta x_1 = p \left(\varepsilon + \frac{m}{p} \varepsilon^2 + \frac{p}{q} \varepsilon^3 \right),$$

$$\sin \Delta \alpha_1 = \frac{\lambda}{p} (\varepsilon + a \varepsilon^2 + b \varepsilon^3).$$

Nous avons immédiatement

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 2(p\varepsilon + q\varepsilon^2), \quad \Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 = 4mp\varepsilon^3,$$

$$R_1 - R_2 = p^2 \rho \varepsilon,$$

$$R_1 \sin \Delta \alpha_1 - R_2 \sin \Delta \alpha_2 = 2[p\varepsilon + (b + \sigma + a\rho)\varepsilon^3]$$

$$R_1 \Delta x_1 \sin \Delta \alpha_1 - R_2 \Delta x_2 \sin \Delta \alpha_2 = 2p^2 \left(\frac{m}{p} + a + \rho \right)$$

et, par suite,

$$h = \frac{p(2a + \rho)}{2(a\lambda + b + \sigma - q)};$$

a et b sont donnés par les formules (3). Pour calculer ρ et σ , partons de la formule

$$R_1 = \frac{(1 + X'^2)^{\frac{3}{2}}}{X'^1}.$$

Nous avons ici, en nous bornant aux infiniment petits du

deuxième ordre,

$$\begin{aligned} (1 + X'^2) &= 1 + \left(m + \frac{p}{2\varepsilon} + \frac{3}{2}q\varepsilon + \dots \right)^2 \\ &= \frac{p^2}{4\varepsilon^2} \left(1 + \frac{4m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2 + 4 + 6pq}{p^2}\varepsilon^2 \right) \\ X'^2 &= -\frac{p}{4\varepsilon^3} + \frac{3q}{4\varepsilon} = -\frac{p}{4\varepsilon^3} \left(1 - \frac{3q}{p}\varepsilon^2 \right) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} (16) \quad R_1 &= \frac{p^2}{2} \left(1 + \frac{4m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2 + 4 + 6pq}{p^2}\varepsilon^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3q}{p}\varepsilon^2 \right)^{-1} \\ &= \frac{p^2}{2} \left(1 + \frac{6m}{p}\varepsilon + \frac{12m^2 + 6 + 9pq}{p^2}\varepsilon^2 \right) \left(1 + \frac{3q}{p}\varepsilon^2 \right) \\ &= \frac{p^2}{2} \left(1 + \frac{6m}{p}\varepsilon + \frac{12m^2 + 12pq + 6}{p^2}\varepsilon^2 \right). \end{aligned}$$

En remplaçant a , b , ρ et σ par leurs valeurs, il vient finalement

$$(17) \quad h = \frac{p^2 m}{4(m^2 + 1 + 2pq)} = \frac{Rm}{2\mu}.$$

La corde commune aux deux cercles est donc parallèle à la tangente lorsque μ est nul.

Quant aux droites qui joignent le point O aux points d'intersection des deux cercles, leur équation est de la forme

$$Y^2 + \varepsilon^2 PQ = 0.$$

Elles se réduisent donc à la limite à la droite double OX. Ce résultat est à peu près évident *a priori* et je ne vois pas bien dans quel but M. Mannheim a posé la question. Peut-être a-t-il eu en vue la détermination des droites $P = 0$, $Q = 0$, dans les équations desquelles intervient le quatrième terme du développement de R_1 , ce qui exige l'introduction du terme rY^2 dans le développement (1) et complique la question.

1092.

(1872, p. 478; 1916, p. 322.)

On a deux cercles dans un même plan; le premier est parcouru d'un mouvement uniforme par un point M, et le

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVIII. (Févr. 1918.)

second est parcouru en sens inverse et d'un mouvement uniforme par un point m ; la droite élevée à chaque instant par le milieu de la corde Mm perpendiculairement à cette corde enveloppe une conique: construire cette conique. Trouver la propriété analogue de l'espace.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAISI.

L'énoncé est incomplet; il faudrait encore indiquer une relation entre les vitesses angulaires des points M et m . Si d'ailleurs on se reporte à une proposition analogue de Laguerre énoncée dans le *Mémoire sur la géométrie de la sphère* (*Œuvres*, t. II. p. 360), on est conduit à admettre que les points M et m décrivent leurs trajectoires dans le même temps.

Soient alors

$$\begin{aligned}(C_M) &= x^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ (C_m) &= (x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0\end{aligned}$$

les deux trajectoires: la droite Mm sera

$$x[(R - r) \cos \varphi - a] + y(R + r) \sin \varphi - \frac{\alpha^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi - R^2}{} = 0;$$

transportons l'origine au point $x = \frac{\alpha}{\cos \varphi}$, $y = 0$; l'équation de l'enveloppe de Mm est

$$\frac{4x^2}{(R + r)^2} - \frac{4y^2}{(R - r)^2 - \alpha^2} = 1.$$

Supposons maintenant que les cercles (C_M) , (C_m) soient quelconques dans l'espace; nous aurons

$$\begin{aligned}(C_M) & \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ bz - ay - kb = 0, \end{cases} \\ (C_m) & \begin{cases} P = 0, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0; \end{cases}\end{aligned}$$

la droite Mm sera

$$\frac{x - a \cos \varphi}{a \cos \varphi - x_0 - R \cos \varphi} = \frac{y - b \sin \varphi}{b \sin \varphi - y_0 + R \sin \varphi} = \frac{z - c \sin \varphi - h}{c \sin \varphi + h},$$

le plan perpendiculaire au milieu de Mm sera

$$\begin{aligned} & \cos \varphi [x(a - R) - Rx_0] + \sin \varphi [y(b + R) + Ry_0 + c(z - h)] \\ & = \left[xx_0 + yy_0 - hz - \frac{a^2 - h^2 - x_0^2 - y_0^2 - R^2}{2} \right] \end{aligned}$$

qui enveloppe le cône du second ordre

$$\begin{aligned} & \left[xx_0 + yy_0 - hz + \frac{a^2 - h^2 - x_0^2 - y_0^2 - R^2}{2} \right]^2 \\ & = [x(a - R) - Rx_0]^2 + [y(b + R) + Ry_0 + c(z - h)]^2. \end{aligned}$$

1363.

1884, p. 197.)

On donne une ellipse: on prend le triangle acb formé par les deux tangentes ca et cb à cette courbe et la corde de contact ab et l'on détermine le point m d'où l'on voit sous des angles droits les côtés du triangle abc . Quelle est la surface, lieu des points tels que m , lorsqu'on prend tous les triangles analogues à acb ?

MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit H l'orthocentre du triangle abc ; si l'on porte, sur la perpendiculaire au plan de l'ellipse en H , une longueur Hm égale au rayon du cercle conjugué au triangle abc , m sera un point du lieu. Le cercle de diamètre CH coupe ab en des points conjugués par rapport à a et b , il est orthogonal au cercle de Monge de l'ellipse; par suite C et m sont conjugués par rapport à ce cercle; CH étant d'autre part perpendiculaire à ab , c est sur l'hyperbole d'Apollonius de H par rapport à l'ellipse. A un point H correspondent deux points C , la surface (m) sera donc du quatrième ordre, sa section par le plan de l'ellipse sera le lieu des points H tels que le triangle acb soit rectangle: ce sera donc le cercle de Monge de l'ellipse et

l'ellipse elle-même. Ces résultats suffisent presque à montrer que la surface (m) est la surface de l'onde dérivée de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} - 1 = 0.$$

On peut du reste le voir facilement comme il suit :

Si x_0, y_0 sont les coordonnées de H, les coordonnées de C seront liées par les relations

$$\begin{aligned} rx_0 + yy_0 &= a^2 + b^2, \\ a^2yx_0 - b^2ry_0 &= c^2xy; \end{aligned}$$

d'où

$$x_0 = x \frac{b^2(a^2 + b^2) + c^2y^2}{b^2x^2 + a^2y^2},$$

$$y_0 = y \frac{a^2(a^2 + b^2) - c^2x^2}{b^2x^2 + a^2y^2},$$

$$\begin{aligned} z_0^2 &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \frac{\frac{rx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)(c^2x^2y^2 - b^6x^2 - a^6y^2)}{(b^2x^2 + a^2y^2)^2}; \end{aligned}$$

d'où

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \rho^2 = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2) - b^6x^2 + a^6y^2}{b^2x^2 + a^2y^2},$$

$$\rho^2 - b^2 = \frac{a^2x_0}{r}, \quad \rho^2 - a^2 = \frac{b^2y_0}{y},$$

$$\rho^2 - a^2 - b^2 = \frac{a^2b^2[a^2 + b^2 - x^2 - y^2]}{b^2x^2 + a^2y^2};$$

d'où enfin

$$\frac{b^2x_0^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{a^2y_0^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{(a^2 + b^2)z_0^2}{\rho^2 - (a^2 + b^2)} = 0.$$

équation qui représente la surface de l'onde dérivée de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} - 1 = 0.$$

Autres notes de M. H. BROCARD antérieures à la réimpression de l'énoncé en 1916.

1390.

(1882, p. 111.)

Considérons l'équation $f(x) = 0$ qui a toutes ses racines réelles; K désignant un nombre réel arbitraire, supposons que l'équation $f(x) + K = 0$ ait m racines imaginaires. Démontrer que l'équation

$$f'^2(x) - f(x)f''(x) - Kf''(x) = 0$$

a m racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Commençons par rappeler un fait bien connu. Soient a_1, \dots, a_n les racines, supposées distinctes pour simplifier, de l'équation

$$f(x) = 0.$$

On a

$$f(x) = A(x - a_1) \dots (x - a_n),$$

A étant une constante; d'où, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{f'}{f} = \sum \frac{1}{x - a},$$

et en dérivant encore une fois,

$$\frac{f f'' - f'^2}{f^2} = - \sum \frac{1}{(x - a)^2}.$$

Les a étant réels, il résulte de là que, pour toute valeur réelle de x , on a

$$(1) \quad f'^2 - f f'' > 0.$$

On voit de même, l'équation $f' = 0$ ayant aussi toutes ses racines réelles, qu'on a, pour toute valeur réelle de x ,

$$(2) \quad f'^2 - f' f''' > 0.$$

Cela rappelé, écrivons l'équation proposée

$$\varphi = k,$$

(62)

en posant

$$\varphi = \frac{f'^2 - f f''}{f''}.$$

On a

$$\varphi' = \frac{f''(f'f'' - ff''') - f'(f'^2 - ff'')}{f''^2} = \frac{f'(f''^2 - f'f''')}{f''^2}.$$

Il résulte donc de l'inégalité (2) que, dans tous les intervalles où φ est continue, φ' a le signe de f' .

Soient alors b_h et b_{h+1} deux racines consécutives de l'équation

$$f = 0;$$

r variant dans l'intervalle (b_h, b_{h+1}) , φ passe de la valeur

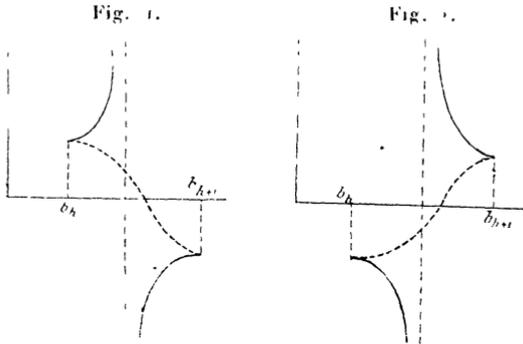
$$\varphi(b_h) = -f(b_h)$$

à la valeur

$$\varphi(b_{h+1}) = -f(b_{h+1}),$$

en variant toujours dans le même sens. Ces deux valeurs sont de signes contraires. La même fonction devient une fois infinie, car l'équation $f'' = 0$ a une racine et une seule dans l'intervalle considéré. Enfin, elle ne s'annule pas, en vertu de l'inégalité (1).

La courbe $y = \varphi$, dans l'intervalle considéré, a donc l'une des formes représentées (fig. 1 et fig. 2) :



Sur chacune de ces figures, la courbe

$$y = -f$$

est représentée en pointillé.

Il résulte de l'inspection de ces tracés que, dans l'intervalle considéré, l'une des équations

$$\varphi = K, \quad -f = k,$$

et une seule de ces équations, a une racine et une seule. Cette remarque s'étend aux intervalles $(-\infty, b_1)$ et (b_{n-1}, ∞) , comme on le voit aisément, et le théorème énoncé s'en déduit immédiatement.

1392

(1882, p. 142)

Soit l'équation

$$a + bx + cx^2 + \dots - kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que, ω étant une quantité réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^2 x^2 + \dots - k\omega^n x^n = 0,$$

a également ses racines réelles.

LAGUERRE.

1393.

(1882 p. 142)

Soit le polynome

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots - a_nx^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynome un certain nombre de termes de degré supérieur à n , on puisse obtenir un autre polynome $f(x)$, tel que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles; démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{n!} + \frac{a_1x}{(n-1)!} + \dots - \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{1!} + a_nx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Dans son beau Mémoire *Sur la théorie des équations numériques*, Laguerre établit le théorème **1392** (*Œuvres*,

t. I, p. 35) en s'appuyant sur des considérations d'un ordre assez élevé. On peut en donner une démonstration plus élémentaire, dont le principe s'applique aussi à la question 1393.

Soit $\varphi(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $e^{-\frac{x}{a}}\varphi(x)$, a étant un nombre réel quelconque, on reconnaît immédiatement que l'équation

$$\varphi(x) - a\varphi'(x) = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

Une double application de ce théorème, d'ailleurs bien connu, montre que, a et b étant deux nombres réels quelconques, l'équation

$$\varphi - a\varphi' - b(\varphi' - a\varphi'') = \varphi - (a+b)\varphi' + ab\varphi'' = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

Plus généralement, soient a, b, \dots, l des nombres réels quelconques. L'hypothèse sur la réalité des racines de $\varphi = 0$ restant toujours la même, l'équation

$$\varphi - \Sigma a.\varphi' + \Sigma ab.\varphi'' - \Sigma abc.\varphi''' + \dots = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Supposons que a, b, \dots, l soient les racines de l'équation

$$(1) \quad \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0.$$

Alors

$$\Sigma a = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}, \quad \Sigma ab = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}, \quad \dots,$$

et l'on parvient à ce résultat :

Si l'équation (1) et l'équation $\varphi(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles, il en est de même de l'équation

$$(2) \quad \alpha_0\varphi^{(n)} + \alpha_1\varphi^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1}\varphi' - \alpha_n\varphi = 0.$$

Cela posé :

1^o Faisons $\varphi(x) = x^{p+n}$, p étant un nombre entier nul ou

positif quelconque. On a

$$\begin{aligned}\varphi' &= (p+n)x^{p+n-1}, \dots; \\ \varphi^{(n-h)} &= (p+h+1)\dots(p+n)x^{p+h}, \dots; \\ \varphi^{(n)} &= (p+1)\dots(p+n)x^p.\end{aligned}$$

L'équation obtenue en remplaçant dans (2) φ et ses dérivées par leurs valeurs à $p+n$ racines réelles. Le premier nombre est divisible par x^p . En supprimant ce facteur, on voit que l'équation

$$\begin{aligned}a_0(p+1)\dots(p+n) + \dots \\ + a_h(p+h+1)\dots(p+n)x^h + \dots \\ + a_{n-1}(p+n)x^{n-1} + a_n x^n = 0,\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}a_0 + \dots + \frac{a_h}{(p+1)\dots(p+h)} x^h + \dots \\ + \frac{a_n}{(p+1)\dots(p+n)} x^n = 0,\end{aligned}$$

à toutes ses racines réelles.

Si l'on remplace x par px , l'équation obtenue, qui peut s'écrire

$$(3) \quad a_0 + \dots + \frac{a_h}{\left(1 + \frac{1}{p}\right) \dots \left(1 + \frac{h}{p}\right)} x^h + \dots \\ + \frac{a_n}{\left(1 + \frac{1}{p}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{p}\right)} x^n = 0,$$

à encore toutes ses racines réelles.

On sait donc déduire d'une équation (1) à racines toutes réelles une équation (3) à racines également toutes réelles. On peut appliquer le même procédé plusieurs fois de suite, et l'on voit en définitive que, quels que soient les entiers positifs p et λ , l'équation

$$\begin{aligned}a_0 + \dots + \frac{a_h}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^\lambda \dots \left(1 + \frac{h}{p}\right)^\lambda} x^h + \dots \\ + \frac{a_n}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^\lambda \dots \left(1 + \frac{n}{p}\right)^\lambda} x^n = 0\end{aligned}$$

à toutes ses racines réelles.

Faisons maintenant croître indéfiniment p et λ , de telle manière que le rapport $\frac{\lambda}{p}$ tende vers un nombre positif quelconque donné α . On a, quel que soit le nombre donné k ,

$$\lim \left(1 + \frac{k}{p} \right)^\lambda = \lim \left(1 + \frac{k}{p} \right)^{\frac{p\lambda}{k} \frac{k}{p}} = e^{\alpha k},$$

en sorte que le dénominateur du coefficient de x^h tend vers

$$e^{\alpha (1+2+\dots+h)} = e^{\alpha \frac{h(h+1)}{2}} = \omega^{-h(h+1)},$$

en posant

$$e^\alpha = \frac{1}{\omega^2}, \quad 0 < \omega < 1.$$

On voit ainsi que l'équation

$$\alpha_0 + \alpha_1 \omega^2 x + \dots + \alpha_h \omega^{h(h+1)} x^h + \dots + \alpha_n \omega^{n(n-1)} x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Remplaçant enfin x par $\frac{x}{\omega}$, on obtient le théorème 1392.

Le passage à la limite dont il a été fait usage est légitime, parce que les racines d'une équation à coefficients variables sont des fonctions continues de ceux-ci, et que d'autre part la limite d'une quantité réelle variable est elle-même réelle.

Le procédé par lequel on a passé de l'équation (3) à l'équation proposée est celui même qu'emploie Laguerre dans le Mémoire cité.

° En faisant $\varphi = x^m$ ($m < n$) dans l'équation (2), on obtient un énoncé qui ne diffère que par la notation de 1393.

1402.

1882, p. 210. 1916, p. 511.

La somme des $p^{\text{èmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$n^p \left(1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \dots \right).$$

E. CÉSARO.

1403.

(1882, p. 210, 1916, p. 191)

a, b, c, ... étant les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{p}{a-p} - \frac{p}{b+p} - \frac{p}{c+p} + \dots = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}.$$

E. CÉSÀRO.

1438.

(1883, p. 239, 1916, p. 302)

La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à 1.

E. CÉSÀRO.

1439.

(1883, p. 279, 1916, p. 302)

Le nombre des diviseurs de n est égal, en moyenne, à 1.

E. CÉSÀRO.

1440.

(1883, p. 239, 1916, p. 302)

La somme des inverses des premières puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$1 - \frac{1}{2^{p+1}} - \frac{1}{3^{p+1}} - \dots$$

E. CÉSÀRO.

1441.

(1883, p. 239, 1916, p. 302)

Soient a, b, c, ... les diviseurs de n. La somme

$$\frac{a}{p^a} + \frac{b}{p^b} + \frac{c}{p^c} + \dots$$

est égale, en moyenne, à $\frac{1}{p-1}$.

E. CÉSÀRO.

1442.

1883, p. 230; 1916, p. 392.)

$f(n)$ étant la somme des restes du nombre entier n , divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim \frac{f(n)}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

E. CÉSARO.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Ces théorèmes sont démontrés dans le Mémoire de Césaro *Sur diverses questions d'Arithmétique (Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 1883)* : n° 1402, p. 118; n° 1403, p. 131; n° 1438, p. 133; n° 1439, p. 124; n° 1440, p. 116; n° 1441, p. 129; n° 1442, p. 183.

Autres Notes de M. L. POLI.

1435.

(1883, p. 144.)

Quatre demi-droites A, B, C et D sont données; soient a le point où A est touchée par le cycle inscrit dans le triangle ABC, et d le point où D est touchée par le cycle inscrit dans le triangle DBC; démontrer que le point milieu du segment ad est sur l'axe radical des cycles inscrits dans les triangles ABD et ACD.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par R. BRICARD.

L'énoncé 1435 résulte de la relation remarquable suivante entre les *distances tangentielles* mutuelles des quatre cycles que touchent quatre semi-droites prises trois à trois (la distance tangentielle de deux cycles étant la longueur de l'une de leurs tangentes communes) :

La distance tangentielle de deux quelconques de ces cycles est égale à la distance tangentielle des deux autres.

On peut démontrer cela, avec les considérations de signes qui conviennent en géométrie dirigée, en s'appuyant sur la formule suivante : soient α, β, γ les sommets du triangle formé par trois semi-droites A, B, C; a, b, c les points de contact avec ces semi-droites du cycle qui les touche. On a, en grandeur et en signe,

$$\alpha c = \frac{\alpha\beta + \gamma\alpha - \beta\gamma}{2},$$

les segments $\alpha c, \alpha\beta, \dots$ étant susceptibles de signes, puisqu'ils sont portés par des droites dirigées.

On peut aussi procéder comme il suit : partons de ce théorème élémentaire :

B, C, D étant trois points quelconques, le cercle BCD et la droite BC, par exemple, se coupent sous le même angle que les droites BD et CD.

En transformant par inversion par rapport à un point A, en dehors du plan BCD, on a ceci :

Étant donnés quatre points quelconques d'une sphère, les quatre cercles qui passent par ces points pris trois à trois sont tels que deux quelconques de ces cercles se coupent sous le même angle que les deux autres.

Considérons maintenant la figure réciproque de la précédente sur la sphère. A cet effet, faisons correspondre à un point de la sphère le grand cercle qui a ce point pour pôle, et dirigeons ce grand cercle de telle manière qu'il ait le point en question à sa droite, par exemple. Alors à un cercle quelconque correspond un cycle enveloppe de grands cercles dirigés, la direction de ce cycle étant donnée par celle de ces grands cercles. Deux cycles ont deux grands cercles tangents communs, correspondant aux deux points communs aux cercles réciproques, et l'angle des cercles se transforme en la distance tangentielle des cycles. La proposition précédemment énoncée devient alors celle-ci :

Étant donnés quatre grands cercles dirigés, il existe quatre cycles qui les touchent trois à trois, et la distance tangentielle de deux de ces cycles est égale à celle des deux autres.

Si maintenant on fait croître indéfiniment le rayon de la sphère, on obtient la proposition que nous avons en vue.

Cela posé, démontrons l'énoncé 1435.

Soient respectivement (α) , (β) , (γ) , (δ) les cycles inscrits dans les triangles BCD, ACD, ABD, ABC. La distance tangentielle des cycles (γ) et (δ) est égale à celle des cycles (α) et (β) . Autrement dit la puissance du point a par rapport à (γ) est égale à celle du point d par rapport à (β) . De même la puissance du point a par rapport à (β) est égale à celle de d par rapport à (γ) . Désignons alors par β, γ, R_β et R_γ les centres et les rayons de deux cycles (β) et (γ) , et soit enfin I le milieu de ad . On a, comme on vient de le voir,

$$\begin{aligned} \overline{a\gamma}^2 - R_\gamma^2 &= \overline{d\beta}^2 - R_\beta^2, \\ \overline{d\gamma}^2 - R_\gamma^2 &= \overline{a\beta}^2 - R_\beta^2, \end{aligned}$$

d'où, par addition,

$$\overline{a\gamma}^2 + \overline{d\gamma}^2 - 2R_\gamma^2 = \overline{a\beta}^2 + \overline{d\beta}^2 - 2R_\beta^2,$$

ce qui, par le théorème de Stewart, se ramène aisément à

$$\overline{I\gamma}^2 - R_\gamma^2 = \overline{I\beta}^2 - R_\beta^2.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Autre solution par M. R. GOORMAGHIGH.

1511.

(1881 p. 59, 1916 p. 39.)

On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole.

CESÀRO.

SOLUTION

Par W. X. CHAPUIS.

Prenez trois points quelconques A, B, C dans un plan et cherchons dans quelle région du plan doit se trouver un qua-

trième point O pour que la conique, de centre O, passant par A, B, C, soit une ellipse.

Les trois points quelconques A, B, C déterminent un triangle ayant ces points pour sommets. Lorsque le point O se trouve sur un des côtés du triangle ABC, la conique de centre O et passant par A, B, C, se réduit à un système de deux droites. Les côtés du triangle ABC sont donc les frontières des régions du plan pour lesquelles la conique à centre cherchée change de nature (ellipse ou hyperbole).

On voit ainsi que, si le point O se trouve à l'intérieur du triangle ABC ou à l'intérieur des angles formés à partir de chaque sommet par les prolongements des côtés qui s'y croisent, la conique cherchée est une ellipse; si le point O est choisi dans une des trois autres régions du plan, la conique est une hyperbole.

Ceci posé, choisissons un point dans l'intérieur du triangle ABC, par exemple le centre de gravité G de ce triangle, et de ce point comme centre décrivons un cercle au rayon duquel nous donnerons des valeurs de plus en plus grandes. A la limite, ce cercle comprendra toute la superficie du plan.

Pour chaque valeur du rayon, construisons la figure à une échelle telle que le rayon du cercle soit représenté par une grandeur constante.

A la limite, le rayon croissant indéfiniment, le triangle ABC se réduira sur la figure au point G et les régions du plan se réduiront à six, deux à deux opposées par le sommet et d'aires égales; dans chaque groupe de deux régions égales, il y en aura une déterminant une ellipse et l'autre déterminant une hyperbole. A la limite, les superficies totales des régions du plan dans lesquelles le choix d'un point O entraînera la détermination, soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, sont donc égales. Il y a donc autant de probabilité à l'obtention, soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, lorsqu'on prend au hasard d'abord les trois points A, B, C puis le point O qui doit servir de centre à la conique cherchée.

4582.

(1888, p. 160.)

Les coniques semblablement situées qui ont même cercle directeur sont inscrites au même carré. Démontrer aussi

que, si deux telles coniques se coupent en M, les tangentes au point M font des angles égaux avec un côté du carré.

K.-W. GENESE.

DEUXIÈME SOLUTION ⁽¹⁾

Par M. R. B.

Il faut entendre par « coniques semblablement situées » des coniques ayant des axes parallèles, et par « cercle directeur » le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique. La question est dès lors facile à traiter.

1° Les coniques dont il s'agit sont nécessairement concentriques et coaxiales. Soient α et α' , β et β' les points où leurs axes rencontrent le cercle directeur commun. Les coniques sont évidemment inscrites au carré $\alpha\beta\alpha'\beta'$.

2° Le théorème classique : *deux coniques homofocales se coupent orthogonalement* se généralise immédiatement, par une transformation homographique, comme ceci : *Les tangentes à deux coniques, en l'un de leurs points de rencontre, divisent harmoniquement l'angle formé par les droites joignant ce point à deux sommets opposés du quadrilatère complet circonscrit aux deux coniques.* Dans le cas actuel, deux tels sommets sont les points à l'infini des côtés du carré $\alpha\beta\alpha'\beta'$. Cela démontre la seconde partie de l'énoncé.

Autres solutions par M. C. BOULLAND et UN ABONNÉ.

1617.

1891, p. 17, 1892, p. 320, 1915, p. 368.)

(Énoncé modifié par l'auteur de la question.)

Du point P du plan d'une parabole, on abaisse les trois normales dont les pieds sont A, B, C : soient A', B', C' les seconds points de rencontre de ces normales avec la parabole. Les cercles décrits sur PA', PB', PC' comme diamètres déterminent sur BC, CA, AB des couples de points $\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1$. Les droites A' α , B' β , C' γ sont tangentes à la

(1) Voir 1916, p. 324.

parabole. Les droites $A'\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$ sont des diamètres de la courbe en ces points.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par E.-N. BARISIEN.

La propriété énoncée pour l'une des normales s'étendra par symétrie aux deux autres. Il suffira donc de la vérifier pour la normale APA' par exemple. Il est inutile de faire intervenir le cercle de diamètre PA' : il suffira de démontrer que les angles PxA' et $P\alpha_1A'$ sont droits.

La parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, nous allons utiliser les formules de M. H. Brocard (*N. A.*, 1892, p. 4^e-10^e). Les ordonnées de B, C et A étant $-b$, $-c$, $(b+c)$, les coordonnées du point P(ξ , η) et les ordonnées de A', B', C' sont

$$(1) \quad \xi = \frac{2p^2 + b^2 + c^2 + bc}{2p}, \quad \eta = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

$$(2) \quad y_{B'} = \frac{2p^2 + b^2}{b}, \quad y_{C'} = \frac{2p^2 + c^2}{c}, \quad y_{A'} = \frac{2p^2 + (b+c)^2}{(b+c)}.$$

L'équation de la droite BC est

$$(3) \quad 2px + (b+c)y + bc = 0.$$

La tangente à la parabole au point A' a pour équation

$$(4) \quad yy_{A'} = px + \frac{y_{A'}^2}{2}.$$

En résolvant (3) et (4), on aura les coordonnées du point α . Il restera à démontrer que $P\alpha$ est perpendiculaire à la tangente $A'\alpha$. Si l'on résout (3) et l'équation

$$px + \frac{[2p^2 + (b+c)^2]y}{b+c} + \frac{[2p^2 + (b+c)^2]^2}{2(b+c)^2} = 0,$$

on trouve, pour les coordonnées de α ,

$$(5) \quad \begin{cases} x_\alpha = \frac{[2p^2 + (b+c)^2](2p^2 + b^2 + c^2)}{2p[4p^2 + (b+c)^2]}, \\ y_\alpha = -\frac{[2p^2 + (b+c)^2]^2 - bc(b+c)^2}{(b+c)[4p^2 + (b+c)^2]}. \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de $\alpha A'$ est

$$(6) \quad \mu + \frac{p}{y_{A'}} = - \frac{p(b+c)}{2p^2 + (b+c)^2}.$$

Celui de Px est

$$\mu' = \frac{\gamma_1 - y_{\alpha}}{\xi - x_{\alpha}} = \frac{\frac{bc(b+c)}{2p^2} + \frac{[2p^2 + (b+c)^2]^2 - bc(b+c)^2}{(b+c)[4p^2 + (b+c)^2]}}{\frac{2p^2 + b^2 + c^2 + bc}{2p} - \frac{[2p^2 + (b+c)^2](2p^2 + b^2 + c^2)}{2p[4p^2 + (b+c)^2]}}$$

$$\mu' = \frac{bc(b+c)^2[4p^2 + (b+c)^2] + 2p^2[2p^2 + (b+c)^2]^2 - 2p^2bc(b+c)^2}{p(b+c)(2p^2 + b^2 + c^2 + bc)[4p^2 + (b+c)^2] - [2p^2 + (b+c)^2](2p^2 + b^2 + c^2)}.$$

En ordonnant le numérateur et le dénominateur par rapport à p , on trouve

$$\mu' = \frac{8p^6 + 8p^4(b+c)^2 + 2p^2(b+c)^2(b^2 + c^2 + 3bc) + bc(b+c)^4}{p(b+c)[4p^4 + 2p^2(b+c)^2 + bc(b+c)^2]}.$$

Or, si l'on effectue la division du numérateur en p^6 par le dénominateur en p^4 , la division se fait exactement, et le quotient est $2p^2 + (b+c)^2$: de sorte que μ' se réduit à

$$(7) \quad \mu' = \frac{2p^2 + (b+c)^2}{p(b+c)}.$$

En comparant (6) et (7), on a immédiatement $\mu\mu' = -1$. L'angle PxP' est donc bien droit.

Si $A'x_1$ est un diamètre de la parabole, on a pour l'ordonnée de x_1

$$(8) \quad y_{x_1} = y_A = - \frac{2p^2 + (b+c)^2}{b+c}.$$

L'abscisse du point de rencontre de $A'x_1$ avec BC est donné par (3)

$$2px_{x_1} = - (b+c)y_{x_1} - bc = 2p^2 + (b+c)^2 - bc.$$

Donc

$$(9) \quad x_{x_1} = \frac{2p^2 + b^2 + c^2 + bc}{2p} = \xi.$$

Par conséquent, Pa_1 est bien perpendiculaire à $A'a_1$. α_1 est donc sur le cercle de diamètre PA' .

Remarque. — L'équation du cercle décrit sur PA' comme diamètre est

$$x^2 + y^2 - (\xi + x_{A'})x - (\eta + y_{A'})y + \xi x_{A'} + \eta y_{A'} = 0,$$

ou

$$(10) \quad x^2 + y^2 - \left[\frac{2p^2 + b^2 + c^2 + bc}{2p} + \frac{[2p^2 + (b+c)^2]^2}{2p(b+c)^2} \right] x \\ - \left[\frac{bc(b+c)}{2p^2} - \frac{[2p^2 + (b+c)^2]}{b+c} \right] y \\ + \frac{(2p^2 + b^2 + c^2 + bc)[2p^2 + (b+c)^2]}{4p^2(b+c)^2} \\ - \frac{bc[2p^2 + (b+c)^2]}{2p^2} = 0.$$

Son intersection avec la droite (3) donne donc les valeurs (5), (8) et (9) qu'il serait fort compliqué de calculer en résolvant (3) et (10).

1629.

(1892. p. 14; 1916. p. 304.)

Soit B le centre de la sphère osculatrice, en A , à la ligne (A). Soit C le centre de la sphère osculatrice, en B , à la ligne (B). Démontrer que AC engendre une surface développable, et chercher les lignes pour lesquelles AC pivote autour d'un point fixe.

CESÀRO.

SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

1. Soient $\alpha, \alpha', \alpha''$ les cosinus directeurs de la tangente à (A) au point $A(x, y, z)$; soient $b, b', b''; c, c', c''$ ceux de la normale principale et de la binormale, et soient r, t les rayons de courbure et de torsion. Désignons par $\alpha, \alpha', \dots, \rho, \tau$ les éléments correspondants de la courbe (B) au point $B(\xi, \eta, \zeta)$ et par A, \dots, R, T , les éléments correspondants en $C(X, Y, Z)$.

(76)

D'après les formules de Frenet, on a

$$(1) \quad \frac{da}{ds} = \frac{b}{r}, \quad \frac{db}{ds} = -\frac{a}{t} - \frac{c}{r}, \quad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{t}, \quad \dots$$

On trouve facilement

$$(2) \quad \xi - x = br - ct \frac{dr}{ds}, \quad \dots$$

avec deux équations semblables. Si l'on différentie cette équation, en tenant compte des formules (1) et en désignant par $d\sigma$ l'élément de l'arc de (B), on trouve

$$(3) \quad \frac{d\xi}{ds} = x \frac{d\sigma}{ds} = -cm, \quad \dots$$

où l'on a mis

$$m = \frac{r}{t} + \frac{d}{ds} \left(t \frac{dr}{ds} \right).$$

De l'équation (3) et des deux autres semblables on déduit que $d\sigma = \pm m ds$. On peut évidemment disposer du signe de $d\sigma$: ds, écrivons donc $d\sigma = m ds$. Il s'ensuit que

$$a = -c.$$

En différentiant encore, on trouve

$$\frac{\beta}{\rho} \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{b}{t}.$$

On peut encore disposer du sens positif de la normale principale à (B), nous pouvons écrire

$$\beta = -b, \quad \rho = mt.$$

Il s'ensuit que

$$\gamma = x' \beta'' - \beta' x'' = -a,$$

et en différentiant l'équation $\beta = -b$, on trouve que

$$\tau = mr.$$

Passons à la courbe (C). Le même raisonnement donne

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -\gamma = a, \\ B = -\beta = b, \\ C = -\alpha = c, \\ dS = \mu d\sigma = \mu m ds, \\ m = \frac{r}{t} + \frac{d}{ds} \left(t \frac{dr}{ds} \right), \\ \mu = \frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{d\sigma} \left(\tau \frac{d\rho}{d\sigma} \right), \\ \rho = mt, \quad \tau = mr, \quad d\sigma = m ds. \end{array} \right.$$

L'équation $A = a$ montre que les tangentes à (A) et (C) aux points A et C sont parallèles, donc la droite AC engendre une développable (Δ).

2. Si (Δ) est un cône de sommet O, les courbes (A) et (C) sont visiblement homothétiques par rapport à O, la valeur de $dS : ds$ est donc constante, et l'on a

$$(5) \quad \mu m = k.$$

Cette condition est suffisante. On en tire en effet

$$\begin{aligned} dX &= A dS = a \mu m ds = k dx, \\ X - x_0 &= k(x - x_0), \end{aligned}$$

avec deux équations semblables pour Y et Z.

Substituons dans (5) la valeur de μm en fonction de r et t , on trouve la condition

$$(6) \quad \left[\left(r \frac{d}{ds} \right)^2 + 1 \right] \left[\left(t \frac{d}{ds} \right)^2 + 1 \right] r = kr$$

pour que (Δ) soit un cône.

3. Pour exprimer r et t en fonction de s , il faut adjoindre à (6) une seconde équation. Supposons par exemple $r = \text{const.}$, on doit avoir $k = 1$; on serait porté à conclure que (Δ) est un cylindre lorsque (A) est une courbe de courbure constante. Ce serait une illusion, puisque dans ce cas les points A et C se confondent. Cherchons en effet les cas où cette particu-

larité se présente. On a

$$\xi - x = br - ct \frac{dr}{ds}, \quad X - \xi = 2\rho - \gamma\tau \frac{d\rho}{ds}, \quad = -b\rho + ar \frac{d\rho}{ds},$$

donc

$$X - x = ar \frac{d\rho}{ds} + b(r - \rho) - ct \frac{dr}{ds}.$$

Pour que A se confonde avec C, il faut et il suffit qu'on ait

$$r = \rho = \text{const.}$$

Or, si r est constante, $m = r : t$, $\rho = mt = r$, donc les courbes de courbure constante sont les seules pour lesquelles A et C se confondent.

Supposons encore que l'on ait $t = hr$, c'est-à-dire que (A) soit une hélice sur un cylindre quelconque. Mettons $d\varepsilon = ds : r$, l'équation (6) devient

$$h^2 \frac{d^4 r}{d\varepsilon^4} + (1 + h^2) \frac{d^2 r}{d\varepsilon^2} + (1 - k)r = 0,$$

qui donne r en fonction exponentielle de ε . On a $s = \int r d\varepsilon$, s sera donc une fonction de ε de même forme.

En mettant $k = 1$, on trouve la condition que (A) soit un cylindre, et en mettant $k = 0$ on trouve la condition que (C) se réduise à un point, c'est-à-dire que (B) soit sphérique.

L'équation (6) s'intègre facilement lorsque $r = hs$, h étant une constante.

Mettons en effet

$$t \frac{dt}{ds} = \theta, \quad s = e^\lambda, \quad r = h e^\lambda.$$

On trouve

$$h^2 \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \theta = (k - 1 - h^2) e^\lambda,$$

$$t^2 = 2 \int e^\lambda \theta d\lambda.$$

1657.

(1893, p. 53, 1916, p. 32.)

On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents. Déterminer : 1° l'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de

contour apparent ainsi obtenues; 2° le nombre des points de contact de cette surface et de l'axe, de ces ellipses.

MANNHEIM.

DEUXIÈME SOLUTION (1)

Par M. J. SER.

1° Soit C le cône de sommet M circonscrit à l'ellipse E et soit C' le cône obtenu en menant en M les perpendiculaires aux plans tangents à C. Les deux cônes se coupent suivant quatre droites. Soit MT l'une d'elles, tangente à l'ellipsoïde en T. Le plan MH qui lui est perpendiculaire est tangent à l'ellipsoïde. Par suite, le point M qui est *quelconque* est de quatre manières un point de la projection orthogonale de E sur un plan tangent.

Les droites MT sont réelles ou imaginaires. La surface cherchée S sépare ceux des points M qui correspondent à des droites réelles de ceux qui correspondent à des droites imaginaires; elle est donc le lieu des points tels que C et C' soient tangents.

Ces deux cônes ayant mêmes plans principaux ne peuvent se toucher que suivant une génératrice MT' située dans un plan principal; l'autre génératrice MT'', qui est aussi de contact pour les deux cônes, est alors perpendiculaire à MT'.

Le lieu cherché est donc celui des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde E et qui ont une section principale formée de génératrices rectangulaires. C'est une *surface des ondes de Fresnel*, d'après Mannheim (voir *E. S. M.*, t. III, p. 22-32 et les notes).

Mobilisé, je ne puis me rapporter aux références indiquées, mais il est facile de reconstituer le calcul. Soit

$$(1) \quad \left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - \left(\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} - 1 \right)^2 = 0$$

le cône circonscrit à E et de sommet M(x, y, z). Si nouscrivons cette équation

$$A X^2 + A' Y^2 + A'' Z^2 + 2 B' X Y + 2 B'' X Z + 2 B Y Z + \dots = 0,$$

(1) Voir 1916, p. 325.

l'équation en s est ici

$$-s^3 + s^2(A + A' + A'') - s \Sigma(AA' - B'^2) + \Delta = 0.$$

L'une des racines est $A + A' + A''$, puisque la somme des autres est nulle. On a donc

$$(A + A' + A'') \Sigma(AA' - B'^2) - \Delta = 0.$$

En développant l'équation (1), on trouve

$$A = \frac{1}{\alpha^2} \left(E - \frac{x^2}{\alpha^2} \right), \quad B = -\frac{y z}{b^2 c^2}, \quad \Sigma AA' - B'^2 = \frac{EC}{\alpha^2 b^2 c^2},$$

$$\Delta = -\frac{E^2}{\alpha^2 b^2 c^2}, \quad E = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

$$C = x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - b^2 - c^2,$$

et le lieu après suppression du facteur E a pour équation

$$(2) \quad C[x^2(b^2 + c^2) + y^2(\alpha^2 + c^2) + z^2(\alpha^2 + b^2) - \alpha^2 b^2 - b^2 c^2 - \alpha^2 c^2] + \alpha^2 b^2 c^2 E = 0.$$

C'est une surface du quatrième degré comme le prévoit M. H. Brocard (1916, p. 326). Elle est formée de deux nappes *entre* lesquelles se trouvent les ellipses de contour apparent. Les points doubles sont ceux pour lesquels les deux cônes C et C' sont confondus. C est alors de révolution et ces points sont à l'intersection de S et des focales de E .

2° En un point M de S ne passent que deux ellipses qui sont situées dans les plans perpendiculaires à MT' et MT'' . Si M est au sommet de l'une d'elles, l'ellipsoïde E est inscrit dans deux quadriques pour lesquelles le plan $MT'T''$ est plan principal : le cône C et le cylindre projetant l'ellipse. L'ellipsoïde admet donc aussi le plan $MT'T''$ comme plan principal.

Les points cherchés sont donc sur les courbes d'intersection de S et des trois plans de symétrie de E . Ces courbes se composent des trois cercles orthoptiques principaux et de trois ellipses coupant chacune les deux cercles orthoptiques non situés dans leur plan. Si nous faisons, en effet, $z = 0$, par exemple, dans l'équation (2), celle-ci devient

$$(x^2 + y^2 - \alpha^2 - b^2) \times [x^2(b^2 + c^2) + y^2(\alpha^2 + c^2) - (\alpha^2 + c^2)(b^2 + c^2)] = 0.$$

