L.-G. du Pasquier

Sur les nombres complexes de deuxième et de troisième espèce

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 448-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__448_1>

[15]

SUR LES NOMBRES COMPLEXES DE DEUXIÈME ET DE TROISIÈME ESPÈCE;

PAR M. L.-G. DU PASQUIER,
Professeur à l'Université de Neuchâtel
(Suisse).

I. — LES NOMBRES COMPLEXES DE SECONDE ESPÈCE.

1. Appelons *nombres complexes de seconde espèce* des complexes de la forme $a \equiv a_0 + a_1 j$, où a_0 et a_1 représentent des nombres réels d'ailleurs quelconques dits *coordonnées* du complexe a, et j un symbole défini par l'équation

$$j^2 = 1. \tag{1}$$

Le signe $\equiv$ (doublement égal) se prononcera « égal par définition » ou « identiquement égal » suivant que l'égalité résultera d'une définition ou d'opérations algébriques. a_0 sera dit *la première* et a_1 *la deuxième coordonnée* du complexe a. Nous définissons l'égalité de deux nombres complexes de seconde espèce par l'égalité des coordonnées correspondantes. Si

$$b \equiv b_0 + b_1 j$$

est un tel nombre, l'égalité $a = b$ entraînera les deux égalités simultanées entre nombres réels $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$.

Soumettons ces complexes de seconde espèce au calcul selon « les règles de l'algèbre ordinaire », en tenant compte de (1). On voit que l'addition, la soustraction et la multiplication, résumées par les formules

$$(2) \qquad a \pm b = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) j,$$

$$(3) \qquad ab = (a_0 b_0 + a_1 b_1) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) j$$

sont toujours possibles et univoques.

Les nombres complexes de seconde espèce, de même que les nombres complexes ordinaires de la forme $a + bi$, où $i^2 \equiv -1$, renferment comme sous-groupe le système des nombres réels, ce qui conduit à poser la définition : un complexe de seconde espèce r est dit *réel* quand sa deuxième coordonnée est nulle.

A tout complexe de seconde espèce $x \equiv x_0 + x_1 j$ correspond un complexe $x' \equiv x_0 - x_1 j$ dit le *conjugué* de x. Le produit d'un complexe y et de son conjugué y' est réel et s'appelle *la norme de* y, en formule :

$$(4) \qquad N(y) \equiv y \cdot y' \equiv (y_0 + y_1 j)(y_0 - y_1 j) = y_0^2 - y_1^2.$$

La norme d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des normes des divers facteurs.

Ici apparaît la première différence profonde d'avec le système des nombres complexes ordinaires : un produit peut s'annuler sans qu'aucun de ses facteurs ne soit nul. Exemple : $(1+j)(1-j)=0$, en vertu de (1), tandis que $(1+i)(1-i)=2$, puisque $\equiv i^2 - 1$.

Définition. — Un complexe x est dit un *diviseur de zéro*, s'il existe un nombre complexe y non nul et tel que $xy=0$.

Avec M. Berloty, nous représenterons les diviseurs de zéro par le signe $\ominus$ (un zéro divisé par un trait horizontal). On démontre que tout diviseur de zéro est de la forme $z_0(1\pm j)$.

Définition. — Un complexe de seconde espèce

$$x \equiv x_0 + x_1 j$$

est dit « quotient de a par b », et l'on écrit $x=\frac{a}{b}$, si, a et b étant des complexes donnés d'ailleurs quelconques, x satisfait à l'égalité $bx=a$. En vertu des définitions posées, cette condition est satisfaite si l'on a simultanément

$$(5) \qquad a_0 = b_0 x_0 + b_1 x_1, \qquad a_1 = b_0 x_1 + b_1 x_0.$$

Si $b \neq \ominus$, on trouve

$$x_0 = \frac{a_0 b_0 - a_1 b_1}{b_0^2 - b_1^2}, \qquad x_1 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2 - b_1^2}.$$

Dans ce cas, le quotient est univoquement déterminé. Si, au contraire, b est un diviseur de zéro, le quotient $\frac{a}{b}$ est ou bien indéterminé, ou bien inexistant. Exemples : le quotient

$$\frac{1+j}{1+j} = \xi_0 + (1-\xi_0)\,j \equiv \xi$$

est indéterminé puisque, ξ_0 représentant un nombre réel arbitraire, on a toujours $(1 + j)\xi = 1 + j$; tandis que le quotient $x \equiv \frac{3 + 3j}{5 - 5j}$ n'existe pas, puisque les équations (5) qui en résulteraient

$$3 = 5x_0 - 5x_1, \qquad 3 = 5x_1 - 5x_0$$

sont manifestement incompatibles.

En résumé, les quatre opérations rationnelles ainsi définies sont toujours possibles et univoques, sauf la division par des diviseurs de zéro.

2. Appelons *rationnel* tout nombre complexe de seconde espèce a dont les deux coordonnées a_0 et a_1 sont des nombres rationnels ordinaires. Le complexe a sera dit *irrationnel*, si a_0 ou a_1, ou les deux, sont irrationnels. Dans la suite, nous envisagerons exclusivement des complexes rationnels et les appellerons souvent *complexes* tout court. L'ensemble de tous les complexes rationnels forme *un corps de nombres* ou *domaine de rationalité* que nous désignerons par $\{R\}$; c'est dire que les complexes rationnels se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division, pour autant que la division est possible et univoque.

Nous nous proposons de faire l'arithnomie de $\{R\}$.

Le premier pas consistera à départager le corps $\{R\}$ en deux ensembles, mettant d'un côté les complexes rationnels « entiers » encore à définir, de l'autre les complexes rationnels « non entiers ». La définition suivante que nous appelons *lipschitzienne* se présente le plus naturellement à l'esprit : un complexe a est dit *entier*, si ses coordonnées sont des nombres entiers ordinaires; a sera dit *non entier*, si l'une au moins de ses deux coordonnées n'est pas un nombre entier. Sur cette définition lipschitzienne comme base, on peut ériger une arithnomie de $\{R\}$, arithmétique généralisée analogue à la classique. Un complexe entier a est dit « *divisible* par un complexe entier b », s'il existe un complexe *entier* $c \equiv c_0 + c_1 j$ tel que $bc = a$; on dira dans ce cas que b est un diviseur de a, et a un multiple de b. Dans le cas où les complexes sont réels, cette définition de la divisibilité se confond avec celle donnée dans l'arithmétique ordinaire.

Dans toutes les questions de divisibilité et de décomposition en facteurs premiers, les diviseurs de zéro doivent être mis à part, comme dans l'arithmétique classique le zéro. On démontre alors qu'il existe dans $\{R\}$ quatre *unités :* $1, -1, j, -j$. Des complexes entiers qui ne diffèrent que par un facteur unité, tels a, $-a$, aj, $-aj$ sont dits *associés*. Dans des questions de divisibilité, des nombres associés peuvent se substituer l'un à l'autre.

On retrouve dans cette arithmétique généralisée : la théorie du plus grand commun diviseur, celle du plus petit commun multiple, la théorie des congruences, l'analogue du théorème de Fermat, etc., puis la théorie des « complexes entiers *irréductibles* » qui jouent ici le même rôle que les nombres premiers dans l'arithmétique classique. Nous laissons au lecteur de démontrer que tout nombre complexe entier de seconde espèce et qui n'est pas diviseur de zéro est décomposable en un produit d'un nombre fini de facteurs premiers, c'est-à-dire de complexes entiers irréductibles.

3. Cette arithnomie basée sur la définition lipschitzienne du complexe entier présente des anomalies curieuses, même abstraction faite des diviseurs de zéro. En voici quelques exemples : il n'existe aucun complexe entier de norme 2, ni de norme $2p$, quand

p représente un nombre premier impair; l'équation $x^2 - y^2 = 2$ n'a en effet pas de solutions en *nombres entiers* x, y.

Le procédé (analogue à l'algorithme d'Euclide) qui permet de déterminer, au moyen d'un nombre fini d'opérations rationnelles, le plus grand commun diviseur de deux complexes entiers donnés tombe en défaut dans certains cas. La décomposition en facteurs premiers, toujours possible, n'est pas toujours univoque. Il en résulte de suite qu'un produit de deux facteurs peut être divisible par un complexe premier sans qu'aucun des facteurs ne le soit. Exemple : le produit $(9 - 7j)(17 + 15j)$ est divisible par 2 et par $3 + j$ qui sont pourtant irréductibles, sans qu'aucun des facteurs ne le soit, comme le prouvent les égalités

$$(9 - 7j)(17 + 15j) = 2(24 + 8j) = 16(3 + j).$$

4. Il est assurément digne d'intérêt qu'on puisse faire disparaître ces anomalies comme par enchantement en définissant autrement le nombre complexe « entier ». Adoptons la définition suivante : un nombre complexe de seconde espèce est dit *entier* s'il est de la forme $a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}j$, où a et b représentent des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques ». En vertu de cette nouvelle définition, $\frac{9}{2} - \frac{7}{2}j$, $\frac{3}{2} \pm \frac{j}{2}$ sont des complexes *entiers* quoique ayant des coordonnées fractionnaires.

On peut démontrer qu'avec cette nouvelle définition du « nombre entier », l'arithnomie devient régulière, c'est-à-dire ne présente aucune des complications citées plus haut. En particulier, l'algorithme d'Euclide y est toujours applicable; il existe des complexes entiers de norme ± 2; ce sont $\frac{3}{2} \pm \frac{j}{2}$ et leurs associés; la décomposition d'un complexe donné en facteurs premiers est toujours possible et d'une seule manière; un produit de deux facteurs ne saurait être divisible par un complexe irréductible sans que l'un au moins des facteurs le soit; etc. Reprenons l'exemple de tout à l'heure. On vérifie que

$$9 - 7j = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right)^4;$$

$$17 + 15j = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)^5\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right);$$

$$2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right);$$

$$3 + j = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right);$$

ce qui fait tomber l'anomalie susmentionnée (*voir* n° 3).

Remarque. — Observons que tous les diviseurs de zéro sont des multiples de $\frac{1}{2} + \frac{j}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$ et de leurs associés. Ce complexe est *idempotent*, c'est-à-dire qu'il jouit de la propriété remarquable d'être identique à toutes ses puissances entières, $\left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}$. Le système des nombres complexes de seconde espèce ne contient que quatre nombres idempotents : 0, 1, $\frac{1}{2} + \frac{j}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$.

En résumé : les diviseurs de zéro une fois mis à part, l'arithnomie du corps $\{R\}$ basée sur la définition nouvelle du complexe « entier » est semblable en tout point à l'arithmétique classique, ou à celle érigée par Gauss dans le domaine des nombres complexes ordinaires $a + bi$ en y prenant pour base la définition lipschitzienne du nombre imaginaire entier.

5. Quelle est la raison profonde de ce phénomène

curieux ? Pourquoi la définition lipschitzienne est-elle « bonne » dans le cas des nombres complexes ordinaire $a + bi$ et pas dans celui des nombres complexes de seconde espèce $a + bj$? En d'autres termes : comment se fait-il que la définition lipschitzienne conduise à une arithnomie régulière dans le premier domaine et pas dans le second ? Pour répondre à ces questions, nous introduirons encore quelques notions en nous laissant guider par l'analogie.

Définitions. — Nous appelons *domaine holoïde* tout ensemble [H] de nombres ou de complexes quelconques jouissant des trois propriétés suivantes :

1° Le domaine [H] contient une infinité d'éléments parmi lesquels « le nombre 1 » ;

2° On peut y effectuer sans restriction l'addition, la soustraction et la multiplication, sans jamais sortir du domaine ; en d'autres termes : la somme, la différence et le produit de deux éléments de [H] est toujours de nouveau un élément de [H] ;

3° Le domaine possède une *base finie*, autrement dit : il est possible de choisir dans [H] un nombre fini d'éléments, disons t_1, t_2, ..., t_n, tels que l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n$$

reproduise *tous* les éléments du domaine, et *uniquement* ceux-là, lorsque m_1, m_2, ..., m_n prennent, de toutes les manières possibles, des valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Les complexes t_1, t_2, ..., t_n peuvent alors engendrer, par les seules opérations de l'addition et de la soustraction répétées un nombre fini de fois, n'importe quel élément du domaine en question. On dit pour cette raison que t_1, t_2, ..., t_n « forment *une base* du domaine [H] » ; nous le désignerons aussi par le symbole $[t_1, t_2, \ldots, t_n]$.

Exemples. — Les nombres entiers ordinaires constituent le domaine holoïde [1], le plus simple de tous. Les nombres complexes de Gauss à coordonnées entières forment le domaine holoïde [1, i].

Théorème fondamental. — *Dans le corps de nombres* $\{R\}$ *constitué par l'ensemble des complexes rationnels* $a_0 + a_1 j$, *le domaine holoïde le plus général a pour base* $t_1 \equiv 1$, $t_2 \equiv \frac{g}{2} + \frac{g}{2} j$, *où* $g \neq 0$ *représente un nombre rationnel entier d'ailleurs quelconque.*

Il existe donc dans $\{R\}$ une infinité simple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs entières de g et dont voici les principaux:

1° Pour $g = 2$, on trouve $[1; j]$, domaine holoïde constitué par l'ensemble des complexes « entiers au sens lipschitzien », c'est-à-dire à coordonnées entières;

2° Pour $g = 1$, on trouve $\left[1; \frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right]$, domaine holoïde constitué par l'ensemble des nombres complexes « entiers au sens nouveau ».

Définition. — Le domaine holoïde [H] est dit *maximal* s'il n'existe pas, *dans le corps de nombres envisagé*, un autre domaine holoïde qui contienne tous les éléments de [H], plus d'autres non contenus dans [H].

Voici maintenant la définition nouvelle du nombre complexe « entier » : un complexe rationnel a est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde maximal du corps $\{R\}$, et *non entier*, s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal. Peu importe donc que les coordonnées de a soient entières ou fractionnaires.

6. Pour répondre aux questions posées au commen-

cement du numéro précédent, nous avons démontré les deux théorèmes suivants :

1° Dans le corps $\{R\}$ constitué par l'ensemble des nombres complexes ordinaires $a+bi$ à coordonnées rationnelles, le domaine holoïde maximal $[t_1, t_2]$ possède la base $t_1=1$, $t_2=i$;

2° Dans le corps $\{R\}$ constitué par l'ensemble des nombres complexes rationnels de seconde espèce $a+bj$, avec $j^2=1$, le domaine holoïde maximal $[t_1, t_2]$ possède la base $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{2}(1+j)$.

Il s'ensuit que : 1° dans le cas des nombres complexes ordinaires, le domaine holoïde $[1, i]$ étant maximal, définition lipschitzienne et définition nouvelle du complexe « entier » se confondent en une seule et donnent le complexe à coordonnées entières; 2° dans le cas des nombres complexes de seconde espèce, le domaine holoïde $[1, j]$ n'est pas maximal, puisqu'on peut l'élargir sans sortir de $\{R\}$, en lui adjoignant $\frac{1}{2}+\frac{j}{2}$; dès lors, les deux définitions du complexe « entier », la lipschitzienne et la nouvelle, sont différentes. Or, c'est toujours la nouvelle qui convient, parce qu'elle conduit à une arithnomie régulière; mais elle exige la détermination préalable du domaine holoïde maximal dans le corps de nombres $\{R\}$.

II. — Les nombres complexes de troisième espèce.

7. Appelons *nombres complexes de troisième espèce* des complexes de la forme $a \equiv a_0 + a_1 i'$, où i' est un symbole défini par

$$i'^2 = 0. \tag{6}$$

Pour ces nombres complexes de troisième espèce, on peut poser les mêmes définitions que pour ceux de seconde espèce, en introduisant les changements que nécessite la différence des symboles j et i' définis par (1) et (6). Nous appellerons *norme* du complexe a, et nous désignerons par $N(a)$, la valeur absolue de sa première coordonnée, de sorte que $N(a) \equiv |a_0|$. Les diviseurs de zéro sont, ici, les nombres complexes de troisième espèce à première coordonnée nulle, donc de la forme ri'. Avec ces changements, on peut répéter presque textuellement ce qui est dit au n° **1**, en l'appliquant aux complexes de troisième espèce.

8. On peut également, en faisant les modifications voulues dans les énoncés, appliquer aux nombres complexes de troisième espèce les propositions des n^{os} **2** et **3**.

9. Profitant de l'exemple des nombres complexes de seconde espèce, nous allons chercher à déterminer dans le corps $\{R\}$ le domaine holoïde maximal (*voir* n° **5**).

Théorème fondamental. — *Dans le corps* $\{R\}$ *des nombres complexes de troisième espèce, le domaine holoïde* $[t_1, t_2]$ *le plus général a pour base* $t_1 = 1$, $t_2 = \beta i'$, *où* $\beta \neq 0$ *représente un nombre rationnel entier ou fractionnaire choisi arbitrairement, mais fixe.*

Tout domaine holoïde $[1, \beta i']$ de $\{R\}$ est donc constitué par l'ensemble des complexes $m_1 + m_2 \beta i'$ qu'on obtient en faisant parcourir à m_1 et à m_2, indépendamment l'un de l'autre, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, le nombre β restant fixe. Le corps $\{R\}$ contient donc une infinité de domaines holoïdes caractérisés chacun par une valeur déterminée de β. Parmi eux, il s'agit de déterminer celui qui est maximal.

Or, il n'y en a point.

Nous laissons au lecteur de démontrer ce résultat inattendu; il suffit de mettre β sous forme de fraction irréductible et de s'appuyer sur le théorème fondamental ci-dessus. Les nombres complexes de troisième espèce fournissent l'exemple le plus simple d'un système de nombres où le corps $\{R\}$ ne possède pas de domaine holoïde maximal.

10. On peut se proposer d'ériger une arithnomie du corps $\{R\}$. Du moment où il est dépourvu de domaine holoïde maximal, la définition du nombre entier y est jusqu'à un certain point arbitraire et il faut s'attendre *a priori* à ce que l'arithnomie basée sur une telle définition présente de curieuses singularités, même en mettant à part les diviseurs de zéro.

Adoptons la définition que voici : « Un complexe de troisième espèce a est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde $[H] \equiv [1; \beta i']$, où $\beta > 0$ représente un nombre rationnel arbitrairement choisi, mais fixe; a est dit *non entier*, s'il n'est pas contenu dans $[H]$ ». C'est dire que sera réputé *entier* tout complexe $m_1 + m_2 \beta i'$ dont la première coordonnée, m_1, est un nombre entier ordinaire et la seconde, $m_2\beta$, un multiple de β. En prenant $\beta = 1$, on retrouve la définition lipschitzienne du nombre complexe entier. Celle que nous adoptons ici est beaucoup plus large, puisqu'on peut prendre pour β un nombre rationnel positif aussi petit qu'on veut. Voici quelques théorèmes fondamentaux de cette arithmétique généralisée, faciles à démontrer :

1° Le domaine $[H]$ contient une infinité d'*unités*, c'est-à-dire de complexes entrant comme diviseur dans n'importe quel complexe « entier »; ce sont les nombres $\varepsilon_n \equiv 1 + n\beta i'$; en posant par convention $\varepsilon_1^0 = 1$, on voit que $\varepsilon_n = \varepsilon^n = (1 + \beta i')^n$ pour toute valeur entière de n. A tout complexe $a \equiv m_1 + m_2 \beta i'$ sont ainsi associés une infinité d'autres, $a\varepsilon_n$, tous équivalents au point de vue de la divisibilité (*voir* n° 2). Il est utile de choisir dans ce groupe un « représentant » univoquement déterminé, par exemple celui dont la première coordonnée m_1 est positive et où simultanément $0 \leqq m_2 < m_1$. Appelons-le *primaire*.

2° Dans le groupe des complexes entiers de troisième espèce associés à un même complexe entier donné a, il s'en trouve toujours un et un seul qui est primaire. Dans les questions de divisibilité et de décomposition en facteurs, on peut se borner aux complexes primaires.

3° Il existe p complexes entiers primaires différents ayant même norme p.

4° Les complexes entiers *irréductibles* (*voir* n° 2) sont ici ceux qui ont la forme $p^n + m\beta i'$, où p représente un nombre premier naturel, m et n des nombres naturels, n d'ailleurs quelconque, m non divisible par p et inférieur à p^n.

5° Tout nombre complexe entier de troisième espèce est décomposable en un nombre fini de facteurs irréductibles.

6° Cette décomposition n'est plus univoque dès que la première coordonnée est divisible par le carré d'un nombre entier > 1. Par exemple, $p^4 + 4p^3 a \beta i'$ peut se mettre sous la forme d'un produit de quatre facteurs irréductibles qui sont, à volonté, tous égaux entre eux, ou tous inégaux, ou dont trois ou seulement deux sont égaux, quand on prend pour p un nombre premier suffisamment grand et pour a l'un des nombres 2, 3, 4, ..., $E\left(\frac{p}{4}\right)$.

7° Quand deux complexes entiers sont *premiers entre eux*, leurs puissances peuvent ne plus l'être. Exemple : $d_2 \equiv 7 + 2\beta i'$ et $d_3 \equiv 7 + 3\beta i'$ sont premiers entre eux, mais leurs carrés ne le sont plus, étant tous deux divisibles par 7.

8° La théorie du plus grand commun diviseur est profondément modifiée. Montrons-le par un exemple : les deux complexes entiers

$$a \equiv 49 + 35\beta i' \qquad \text{et} \qquad b \equiv 49 + 42\beta i'$$

possèdent six communs diviseurs primaires, donc essentiellement différents, savoir

$$d_0 \equiv 7,\ d_1 \equiv 7 + \beta i',\ d_2 \equiv 7 + 2b i',\ \ldots,\ d_5 \equiv 7 + 5\beta i'.$$

Malgré cela, a et b n'ont pas de « plus grand commun diviseur ». En d'autres termes, on arrive à des incompatibilités dès que l'on admet l'existence d'un complexe entier d dont les diviseurs seraient précisément d_0, d_1, d_2, ..., d_5 et qui serait en même temps diviseur commun de a et de b.

Notre présomption *a priori* que l'arithnomie des nombres complexes de troisième espèce diffère essentiellement de l'arithmétique ordinaire, même abstraction faite des diviseurs de zéro, est ainsi pleinement confirmée. L'élégante simplicité de la théorie classique ne saurait être atteinte ici, comme ce fut le cas pour les nombres complexes de seconde espèce, par un changement de définition du complexe « entier ». Il faut des méthodes plus profondes encore. L'une d'elles est donnée par la théorie des idéaux.