

G. FONTENÉ

Sur les cercles de Pappus : formule de Pappus, formule de Schubert généralisée

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18 (1918), p. 383-390

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__383_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F8fβ]

**SUR LES CERCLES DE PAPPUS : FORMULE DE PAPPUS,
FORMULE DE SCHUBERT GÉNÉRALISÉE ;**

PAR M. G. FONTENÉ.

1. *Préliminaires.* — Étant donnés deux cercles quelconques (O) et (O'), dont nous supposons, par exemple, que l'un est intérieur à l'autre, si l'on considère une suite de cercles (ω) tangents à chacun des cercles donnés et tels que deux cercles consécutifs sont tangents entre eux, il existe entre deux cercles consécutifs de cette série une relation doublement quadratique. Si ρ est le rayon de l'un de ces cercles, y l'ordonnée du centre relative à la droite OO', la relation entre ρ et y est de la forme

$$y^2 = a\rho^2 + b\rho + c,$$

comme on le voit, en observant que le lieu du point ω est une conique de foyers O et O'; on détermine les constantes en faisant $y = 0$, puis $\rho = 0$. Si l'on pose

$$p, q = \frac{1}{2}(r - r' \pm d) \quad (r > r'),$$

on trouve

$$y^2 = -\frac{(r + r')^2 - d^2}{d^2}(\rho - p)(\rho - q);$$

on peut écrire, en introduisant $\frac{\gamma}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho}$,

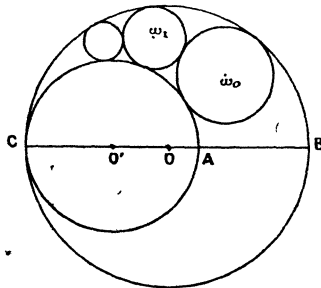
$$\left[\frac{(r-r')^2 - d^2}{\rho} - 2(r-r') \right]^2 + \frac{(r-r')^2 - d^2}{(r+r')^2 - d^2} \frac{\gamma^2}{\rho^2} = 1.$$

Le système des cercles (ω) peut se fermer avec p cercles, sous une condition entre d , R , R' .

2. *Cercles de Pappus.* — Lorsque les deux cercles (O) et (O') sont quelconques, les quantités ρ_n et γ_n relatives au cercle (ω_n) ne s'expriment pas en fonction algébrique de n ; mais cela se produit lorsque les deux cercles (O) et (O') sont tangents : on a alors les cercles de Pappus, qui offrent ainsi un cas de dégénérescence des formules.

THÉORÈME. — *Considérons (fig. 1) deux cercles (O) et (O') , tangents intérieurement au point C , et une*

Fig. 1.



suite de cercles ... , (ω_{-2}) , (ω_{-1}) , (ω_0) , (ω_1) , (ω_2) , ... , dont chacun touche les deux cercles (O) et (O') , dont chacun est, en outre, tangent au précédent; le sens des indices croissants étant celui de la figure,

le rayon ρ_n du cercle d'indice n , et l'ordonnée y_n de son centre par rapport à la droite CB, comptée positivement au-dessus de CB, sont donnés par les formules

$$(1) \quad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_0}{2\rho_0} = n,$$

$$(2) \quad \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{d}{rr'} n \left(\frac{y_0}{\rho_0} + n \right);$$

cette dernière formule est de la forme

$$\frac{1}{\rho_n} = A + Bn + Cn^2.$$

3. La formule (1). — En inversant la figure par rapport au pôle C, on transforme les cercles (O) et (O') en deux droites, qui sont par exemple les tangentes en B et en A aux cercles donnés; on a alors, les cercles transformés (ω') étant égaux, et les indices croissant comme il a été dit,

$$y'_n - y'_{n-1} = 2\rho'$$

ou

$$\frac{y'_n}{2\rho'} - \frac{y'_{n-1}}{2\rho'} = 1;$$

comme le rapport $\frac{y}{\rho}$ se conserve par homothétie, on a aussi

$$(x) \quad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_{n-1}}{2\rho_{n-1}} = 1;$$

on en déduit la formule (1). Pappus (*Collections mathématiques*, Livre IV, th. XV) donne la relation (x) sous la forme

$$\frac{y_n}{2\rho_n} = \frac{y_{n-1} + 2\rho_{n-1}}{2\rho_{n-1}};$$

il n'écrit pas la formule générale (1). Mais il en donne deux cas particuliers : d'une part, le cas où le cercle (ω_0)

est décrit sur AB comme diamètre, et l'on a alors

$$(1') \quad y_n = 2\rho_n \times n;$$

d'autre part, le cas où le cercle (ω_0) est tangent à la droite AB, et l'on a alors

$$(1'') \quad y_n = 2\rho_n \times \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

La relation (α) peut être regardée comme résultant de la décomposition d'une relation doublement quadratique

$$\left(\frac{y'}{2\rho'} - \frac{y}{2\rho}\right)^2 = 1.$$

4. *La formule (2).* — Le lieu des points ω , avec

$$\omega O + \omega O' = r + r',$$

est une ellipse de foyers O et O', passant en C, et l'on a

$$2a = r + r', \quad 2c = d = r - r', \quad b^2 = rr'.$$

Si on la rapporte à ses axes, et si l'on observe que ρ s'exprime linéairement en fonction du rayon vecteur O' ω , par suite en fonction de l'abscisse x du centre ω , que, d'ailleurs, y est nul pour $\rho = 0$ ou $\rho = d$, on peut écrire sans calcul

$$y^2 = \frac{4rr'}{d^2} \rho(d - \rho) \quad \left[\frac{4rr'}{d^2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} \right],$$

$$\frac{y^2}{4\rho^2} = \frac{rr'}{d} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{d} \right),$$

ou, avec l'indice n ,

$$(\beta) \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(\frac{y_n}{2\rho_n} \right)^2;$$

en retranchant de cette formule la formule analogue pour l'indice 0, et en tenant compte de la formule (1), on obtient la formule (2). Les constantes γ_0 et ρ_0 des formules (1) et (2) sont liées par la relation (β); on peut se donner $\frac{\gamma_0}{2\rho_0}$ et calculer ρ_0 .

Dans les *Nova Acta* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. X, 1793, p. 74, un géomètre, nommé F.-T. Schubert, en vue de démontrer les formules (1') et (1'') de Pappus, a obtenu, *de proche en proche*, le résultat auquel conduit la formule (β) dans les deux cas particuliers auxquels correspondent ces formules (1') et (1'') :

$$(2') \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} n^2,$$

$$(2'') \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2;$$

il donne seulement ces formules résolues par rapport à ρ_n au lieu de $\frac{1}{\rho_n}$.

5. *Cas où les cercles (O) et (O') sont tangents extérieurement.* — Il faut alors, au second membre de la formule (β), remplacer $\frac{1}{d}$ par $-\frac{1}{d}$, ce qui ne modifie d'ailleurs pas la formule (2) :

$$[\beta] \quad \frac{1}{\rho_n} = -\frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(\frac{\gamma_n}{2\rho_n} \right)^2.$$

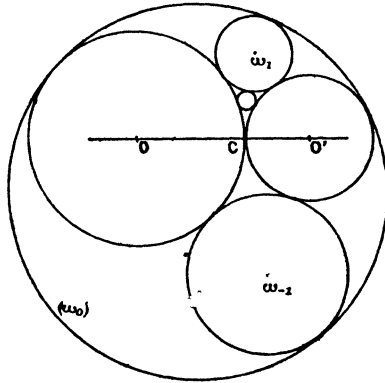
Parmi les cercles (ω), il en existe ici un et un seul qui enveloppe les cercles (O) et (O'); le rayon de ce cercle doit être considéré comme négatif dans les formules. Si, comme dans la figure 2, ce cercle est le cercle (ω_0), il faut faire $\rho_0 < 0$; c'est ainsi que, pour $\gamma_0 = 0$, la formule [β] donne $\rho_0 = -d$.

6. *Formule pour un cas particulier.* — Les deux cercles (O) et (O') étant tangents extérieurement (fig. 2), si l'on prend comme cercle (ω_0) la conique formée d'une tangente commune extérieure et de la droite à l'infini, ρ_0 et γ_0 sont infinis, avec

$$\frac{\gamma_0}{2\rho_0} = \frac{+\sqrt{rr'}}{d},$$

la tangente commune extérieure étant celle dont les

Fig. 2.



points de contact avec les cercles (O) et (O') sont au-dessus de OO'; on a ainsi

$$\frac{\gamma_n}{2\rho_n} = \frac{\sqrt{rr'}}{d} + n, \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{d}{rr'} n \left(\frac{3\sqrt{rr'}}{d} + n \right);$$

pour $n = 1$ et $n = -1$, on a bien

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\rho_{-1}}} = \left| \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r'}} \right|.$$

La distance z du centre ω à la tangente commune

est donnée par la formule

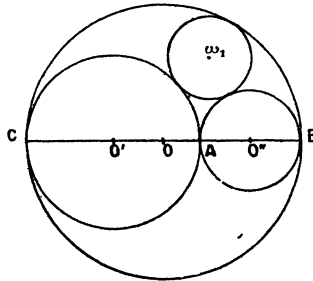
$$(3) \quad \frac{z_n}{\rho_n} = 2n^2 - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{z_n + \rho_n}{2\rho_n} = n^2,$$

qu'on peut établir sous la seconde forme en inversant la figure par rapport au point de contact de la tangente commune avec l'un des cercles (O), (O'); quand on change n en $-n$, la valeur du rapport ne change pas. Pour $n=2$, le cercle ω_2 est tangent à trois cercles (O), (O'), (ω_1), tangents entre eux deux à deux et qui ont une tangente commune extérieure; on a alors

$$\frac{z}{\rho} = 7.$$

7. La figure 3. — Le cercle (ω_1) de la figure 3 est tangent à trois cercles (O), (O'), (O''), tangents deux à deux, et qui ont leurs centres en ligne droite. On a alors, en considérant par exemple cette figure comme

Fig. 3.



un cas particulier de la figure 2, et en appliquant la formule [β],

$$y_1 = 2\rho_1,$$

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{r} + \frac{r}{r'r''} = \frac{r^2 + r'^2 + r''^2}{2rr'r''}.$$

J'ai donné, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 11^e année, p. 68, une démonstration par le calcul de la formule $\gamma_1 = 2\rho_1$.

Chacun des trois triangles curvilignes situés au-dessus de **CB** donne lieu à une série de cercles (ω); pour trois de ces cercles qui ont même indice, l'axe de similitude directe est la droite **CB**.