Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 35-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__35_1>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES

2145 (**1910**, 95). — Si l'on pose ([1])

$$x = \frac{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{-5} + d\sqrt{2}\sqrt{-5}}{\sqrt{2}},$$

a, b, c, d étant entiers, a et c étant de même parité :

1° Les nombres x sont des entiers algébriques;

2° La somme ou le produit de deux nombres n est un nombre x;

3° La norme du nombre x (c'est-à-dire le produit de ce nombre par ceux qu'on obtient en changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$, ou $\sqrt{-5}$ en $-\sqrt{-5}$, ou en faisant ces deux changements à la fois, est

$$X = \left(\frac{a^2 - 2b^2 + 5c^2 - 10d^2}{2}\right)^2 + 10(ad - bc)^2;$$

4° La norme du produit de deux facteurs est égale au produit des normes de ces facteurs;

5° Étant donnés deux nombres de la forme indiquée, peut-on trouver un nombre de même forme $\frac{m + n\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}$ appelé *quotient*, et un autre nombre de même forme $\frac{r + s\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}$ appelé *reste*, tels qu'on ait

$$\frac{a + b\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} = \frac{e + f\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} \, \frac{m + n\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} + \frac{r + s\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}},$$

tels, de plus, que la norme du reste soit inférieure à celle du diviseur? G. FONTENÉ.

2151 (**1910**, 239). — Établir directement (pour $n \neq 1$) l'égalité

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & \dots & \dots \\ \dots\dots & \dots & . & . & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & . & . & \dots & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix} = 0.$$

relative à la formule de sommation d'Euler-Maclaurin.

G. FONTENÉ.

2156 (**1910**, 335). — On considère la suite des polynomes en x

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \dots, \quad P_n, \quad \dots$$

tels que

$$nP_n = (3n-2)P_{n-1} - (3n-4+x^2)P_{n-2} + (1-x^3)(n-2)P_{n-3}$$

avec

$$P_0 = P_1 = 1,$$
$$P_2 = 1 - \frac{x^2}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

1° Montrer que l'on a

$$P_n = a_0 + C_n^1 a_1 x + C_n^2 a_2 x^2 + \dots + C_n^p a_p x^p + \dots + C_n^n a_n x^n,$$

C_n^p étant le nombre des combinaisons de n lettres p à p et a_p étant fonction de p seul indépendant de x et n;

2° Montrer qu'il y a une relation linéaire entre a_p, a_{p-1}, a_{p-2} vérifiée quel que soit p. En conclure la valeur de a_p en fonction de p. R. GILBERT.

2161 (**1910**, 336). — Une pyramide régulière, de sommet S, a pour base un rectangle ABCD. On considère le paraboloïde de révolution de sommet S qui passe par le cercle circonscrit au rectangle ABCD et le parallélépipède indéfini dont ce rectangle est la section droite. Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci.

M. D'OCAGNE.

Nous terminons ici la réimpression des *Anciennes questions* (1842-1910) non résolues. On trouvera plus loin (p. 43) les Nos des questions restées sans solution au 31 Décembre 1917.

(N. d. l. R.)