

F. BALITRAND

**Relations entre les rayons de courbure
de deux courbes affines**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 349-352

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__349_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[P'1e]

RELATIONS ENTRE LES RAYONS DE COURBURE
DE DEUX COURBES AFFINES (1) ;

PAR M. F. BALITRAND.

Soient M et M_1 deux points correspondants de deux courbes affines par rapport à un axe XX' ; C et C_1 les centres de courbure en ces points ; A le point de rencontre, situé sur XX' , des tangentes en M et M_1 aux courbes (M) et (M_1) . Appelons r et r_1 les portions de tangentes AM et AM_1 ; θ et θ_1 les angles qu'elles forment avec l'axe XX' .

On a par définition

$$r \cos \theta = r_1 \cos \theta_1, \quad r \sin \theta = K r_1 \sin \theta_1 ;$$

d'où

$$\text{tang } \theta = K \text{ tang } \theta_1.$$

En différentiant cette relation on obtient

$$\frac{d\theta}{d\theta_1} = K \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_1} ;$$

$d\theta$ et $d\theta_1$ sont les angles de contingence des deux

(1) Sur ce sujet on peut consulter : P. SERRET (*Des méthodes en Géométrie*, p. 96) ; A. MANNHEIM (*Princ. et développ. de Géom. ciném.*, p. 498) ; R. GOORMAGHTIGH (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 423, et 1917, p. 84) ; F. BALITRAND (*Nouv. Ann.*, 1916, p. 74).

courbes en M et M₁. D'autre part, à cause de

$$r \cos \theta = r_1 \cos \theta_1$$

et de la signification géométrique des angles θ et θ_1 , on a

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} = \frac{r}{r_1}.$$

Par suite, en appelant ρ et ρ_1 les rayons de courbure correspondants

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{ds_1}{d\theta_1}} = \frac{r^2}{kr_1^2}.$$

Cette relation est due à P. Serret (*Des méthodes en Géométrie*, p. 96) qui l'a établie par une voie entièrement différente de celle qui précède et n'en a pas déduit de construction géométrique. Par une transformation facile, elle s'écrit

$$\frac{r}{\rho \sin \theta \cos \theta} = \frac{r_1}{\rho_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1};$$

d'où la détermination suivante du centre de courbure C₁ :

On projette C en C' sur MM₁, et C' en C'' sur AM. La parallèle à MM₁, menée par C'', coupe AM₁ en C'₁ et la perpendiculaire en ce point à AM₁ coupe MM₁ en C'₁. La parallèle à XX', menée par C'₁, passe par le centre de courbure C₁.

La relation précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{r^2}{\rho \sin \theta} = \frac{r_1^2}{\rho_1 \sin \theta_1}$$

et donne alors lieu à ce théorème :

Les projections des rayons de courbure de deux courbes affines sur l'axe d'affinité sont entre elles comme les carrés des portions de tangentes correspondantes, comprises entre leur point de concours et leurs points de contact avec les courbes.

Joignons AC' qui coupe la normale à M en D et projetons ce point en Q sur XX' . Soit P le pied de MM_1 sur cet axe. Les triangles semblables ADQ , $AC'P$ donnent

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AD}{AC'} = \frac{AM}{AC''} = \frac{r}{r + \rho \sin \theta \cos \theta};$$

d'où

$$AQ = \frac{r^2 \cos \theta}{r + \rho \sin \theta \cos \theta}.$$

On trouverait de même pour la courbe (M_1)

$$AQ_1 = \frac{r_1^2 \cos \theta_1}{r_1 + \rho_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}.$$

Or, en vertu de

$$\frac{r}{\rho \sin \theta \cos \theta} = \frac{r_1}{\rho_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1}$$

$AQ = AQ_1$ et il en résulte la propriété suivante qui fournit une construction évidente du centre de courbure C_1 connaissant C :

On projette les centres de courbure C et C_1 en C' et C'_1 sur MM_1 . Les droites AC' et AC'_1 rencontrent les normales correspondantes en deux points qui sont sur une perpendiculaire à XX' .

Soit N le point où la perpendiculaire en A à XX' rencontre la normale à (M) . Portons sur cette normale, à partir de N , une longueur NN' égale au rayon de courbure CM et abaissons de M sur AN' une perpendiculaire qui coupe XX' en O . Nous formons ainsi deux

triangles ANN' , AMO qui sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires et qui donnent

$$\frac{AO}{AN} = \frac{AM}{NN'},$$

ou bien

$$AO = \frac{r^2}{\rho \sin \theta}.$$

De même, pour la courbe (M_1) , on aurait

$$AO_1 = \frac{r_1^2}{\rho_1 \sin \theta_1}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut $AO = AO_1$ et les points O et O_1 coïncident. On a donc la propriété suivante qui peut servir à déterminer C_1 connaissant C :

Soient N et N_1 les points où la perpendiculaire élevée en A à XX' rencontre les normales à (M) et (M_1) . Portons sur ces normales, à partir de ces points, des longueurs NN' , $N_1N'_1$ égales respectivement aux rayons de courbure correspondants. Les perpendiculaires abaissées de M et M_1 sur AN' et AN'_1 se coupent sur XX' .