NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur une propriété caractéristique des coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 343-349

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__343_0>

[L[1]19a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Étant données deux coniques homofocales, les deux paires de tangentes qu'on peut leur mener d'un point quelconque du plan forment, comme on sait, un faisceau *isogonal*, c'est-à-dire qu'elles forment deux angles ayant les mêmes bissectrices. Je me propose d'établir que cette propriété est caractéristique d'un système de deux coniques homofocales. Pour le démontrer, je résoudrai le problème suivant :

Trouver, dans le plan, quatre courbes C_1, G_1, C_2, G_2, *telles que, si d'un point* M *quelconque on leur mène les quatre tangentes* MU_1, MV_1, MU_2, MV_2, *le faisceau ainsi formé soit isogonal, les deux angles* $\widehat{U_1MV_1}$, $\widehat{U_2MV_2}$ *ayant les mêmes bissectrices.*

2. Prenons des axes rectangulaires et soient x, y les coordonnées du point M, u_1, v_1, u_2, v_2 les angles que font respectivement avec OX les quatre tangentes MU_1, MV_1, MU_2, MV_2. Ces angles sont des fonctions de x, y.

L'équation de la droite MU_1 par exemple est

$$\frac{X-x}{\cos u_1} = \frac{Y-y}{\sin u_1},$$

ou

$$\sin u_1 X - \cos u_1 Y = x \sin u_1 - y \cos u_1.$$

Cette droite doit avoir une enveloppe, à savoir la la courbe C_1. Il est nécessaire et suffisant pour cela que l'expression formant le second membre de l'équation précédente soit fonction de u_1. Cela s'exprime par la condition

$$\begin{vmatrix} \sin u_1 + (x\cos u_1 + y\sin u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ -\cos u_1 + (x\cos u_1 + y\sin u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

qui se réduit à

$$\cos u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sin u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

On a de même

$$\cos v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \sin v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\cos u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$\cos v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \sin v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

En outre, l'isogonalité du faisceau des quatre tangentes s'exprime par la condition

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2. \tag{5}$$

Il s'agit donc de trouver quatre solutions u_1, v_1, u_2, v_2, satisfaisant à la condition (5), de l'équation aux dérivées partielles

$$\cos u \frac{\partial u}{\partial x} + \sin u \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

3. On tire de (5)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Mais il résulte de (1) et (2) que l'on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\operatorname{tang} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \operatorname{tang} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

De même

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\operatorname{tang} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} - \operatorname{tang} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Donc

$$\operatorname{tang} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \operatorname{tang} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \operatorname{tang} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \operatorname{tang} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Le premier membre est, au signe près, la dérivée logarithmique par rapport à y de $\cos u_1 \cos v_1$; le second membre est, au signe près, la dérivée logarithmique de $\cos u_2 \cos v_2$. Le rapport de ces deux fonctions doit donc être fonction de x seulement. On écrira, pour la commodité des calculs ultérieurs,

$$\frac{\cos u_2 \cos v_2}{\cos u_1 \cos v_1} = \frac{1}{f(x)} + 1.$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{\sin u_2 \sin v_2}{\sin u_1 \sin v_1} = \frac{1}{g(y)} + 1.$$

On tire de là

$$\cos u_2 \cos v_2 - \sin u_2 \sin v_2$$
$$= \frac{\cos u_1 \cos v_1}{f(x)} - \frac{\sin u_1 \sin v_1}{g(y)} + \cos u_1 \cos v_1 - \sin u_1 \sin v_1,$$

ce qui, en tenant compte de (5), se réduit à

$$\frac{\sin u_1 \sin v_1}{\cos u_1 \cos v_1} = \frac{g(y)}{f(x)}. \tag{6}$$

Posons maintenant

$$\operatorname{tang} u_1 = m, \qquad \operatorname{tang} v_1 = n,$$

m étant fonction de u_1 satisfait à la même équation aux dérivées partielles que cette dernière fonction. On a donc

$$(7)\qquad \frac{\partial m}{\partial x} + m\frac{\partial m}{\partial y} = 0;$$

de même

$$(8)\qquad \frac{\partial n}{\partial x} + n\frac{\partial n}{\partial y} = 0.$$

Enfin (6) s'écrit

$$(9)\qquad mn = \frac{g(y)}{f(x)}.$$

Il s'agit donc de trouver deux solutions m et n de l'équation aux dérivées partielles (7), telles que leur produit soit le quotient d'une fonction de y par une fonction de x.

Ajoutons les équations (7) et (8), multipliées respectivement par n et m. Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x}(mn) + mn\frac{\partial}{\partial y}(m+n) = 0,$$

ou

$$-\frac{gf'}{f^2} + \frac{g}{f}\frac{\partial}{\partial y}(m+n) = 0,$$

ce qui se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial y}(m+n) = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

d'où, en intégrant,

$$(10)\qquad m+n = \frac{f'(x)}{f(x)}y + \mathrm{F}(x),$$

F étant une certaine fonction de x.

De même, ajoutons les équations (7) et (8), multipliées respectivement par $\frac{1}{m^2}$ et $\frac{1}{n^2}$. On a

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{mn}\frac{\partial}{\partial y}(mn) = 0,$$

ou

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{f}{g}\frac{g'}{f}=0,$$

ou enfin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{g'(y)}{g(y)}$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{g'(y)}{g(y)}x+G(y), \tag{11}$$

G étant une certaine fonction de y.

En tenant compte de (9) et (10), l'équation (11) s'écrit

$$\left(\frac{f'}{f}y+F\right)\frac{f}{g}=\frac{g'}{g}x+G,$$

ou

$$f'(x)y+F(x)f(x)=g'(y)x+G(y)g(y). \tag{12}$$

En dérivant par rapport à x, il vient

$$f''(x)y+[F(x)f(x)]'=g'(y). \tag{13}$$

Une nouvelle dérivation par rapport à y donne enfin

$$f''(x)=g''(y).$$

La valeur commune des deux membres doit être une constante absolue, que l'on peut supposer égale à 2, les fonctions f et g n'intervenant dans (9) que par leur rapport. Ces fonctions sont donc deux polynomes du second degré

$$f(x)=x^2+2ax+b,$$
$$g(y)=y^2+2\alpha y+\beta.$$

(13) donne alors

$$2y+[F(x)f(x)]'=2(y+\alpha),$$

d'où

$$F(x)f(x)=2(\alpha x+K)$$

et

$$F(x) = \frac{2(\alpha x + K)}{x^2 + 2ax + b},$$

K étant une nouvelle constante. On tire ensuite de (10)

$$m + n = \frac{2(x+a)}{x^2 + 2ax + b}\, y + \frac{2(\alpha x + K)}{x^2 + 2ax + b}$$
$$= \frac{2(xy + \alpha x + ay + K)}{x^2 + 2ax + b}.$$

Finalement, on voit que m et n sont racines de l'équation

$$(x^2 + 2ax + b)\, m^2$$
$$- 2(xy + \alpha x + ay + K)\, m + y^2 + 2\alpha y + \beta = 0.$$

En résumé les deux courbes C_1 et G_1 constituent une seule et même courbe algébrique de seconde classe, c'est-à-dire une conique Γ_1.

De même, les courbes C_2 et G_2 constituent une conique Γ_2.

Γ_1 et Γ_2 sont homofocales. En effet, M étant un point quelconque de Γ_2, les tangentes issues du point M à cette conique sont confondues suivant une droite qui doit être l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{U_1 M V_1}$, et par conséquent de l'angle formé par les droites joignant le point M aux foyers F et F' de Γ_1. Γ_2 a donc aussi pour foyers F et F'.

Il est donc établi que la propriété rappelée au début caractérise bien un système de deux coniques homofocales.

4. On démontrerait d'une manière analogue qu'un système de deux coniques concentriques et homothé-

tiques est caractérisé par la propriété suivante : une droite quelconque détermine dans ces deux coniques des cordes dont les milieux sont confondus.