NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Deux théorèmes de MM. Lemoyne et Fontené sur l'orthopole

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 293-299

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__293_0>

[K[1]2e]

DEUX THÉORÈMES DE MM. LEMOYNE ET FONTENÉ SUR L'ORTHOPOLE ;

Par M. V. THÉBAULT.

Nous nous proposons de donner une solution élémentaire du théorème fondamental de M. T. Lemoyne sur l'orthopôle d'une droite Δ par rapport à un triangle ABC (1) et de généraliser celui de M. Fontené (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 56).

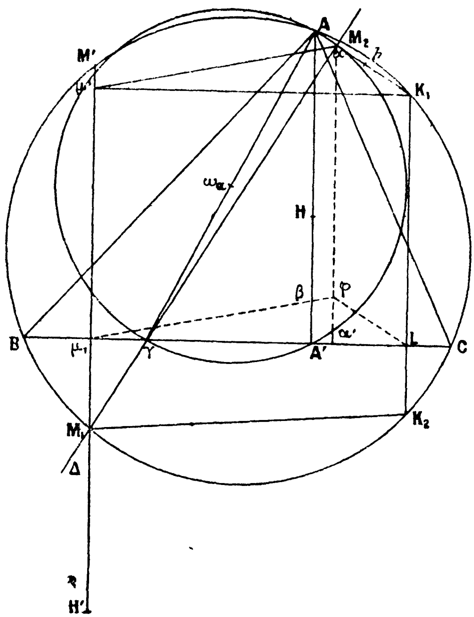
1. M. T. Lemoyne (*Nouvelles Annales*, 1904, p. 400) énonce sans démonstration le théorème suivant :

Les axes radicaux des cercles podaires de chacun des points d'une transversale Δ, *par rapport à un triangle* ABC, *passent par un point fixe* φ; ce qui revient à dire que φ *a même puissance par rapport à tous ces cercles. Lorsque* Δ *coupe le cercle* ABC, *en deux points* M_1, M_2, *les droites de Simson de* M_1 *et* M_2 *se rencontrent au point* φ.

Nous avons démontré en la généralisant la deuxième partie de cette proposition (*Bulletin de Mathéma-*

(1) Une élégante démonstration de ce théorème, la seule qui, croyons-nous, soit parue aux *Nouvelles Annales*, a été donnée par M. R. Bouvaist (1915, p. 558). — *Voir* aussi une démonstration analytique de M. Neuberg : *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910).

tiques élémentaires, 1910, p. 261, et *Nouvelles Annales*, 1915, p. 221). Considérant le cas où Δ est un diamètre du cercle circonscrit O au triangle ABC, nous avons remarqué que par l'orthopôle φ de Δ passe



une troisième droite de Simson relative au triangle ABC, celle du point K symétrique de l'orthocentre H de ABC par rapport à φ.

Cette droite est du reste l'axe de la parabole de foyer φ et de directrice Δ. On arrive à ce résultat en montrant que la droite de Simson du point K', diamétralement opposé au point K sur le cercle O, est parallèle à Δ.

Plus généralement, Δ *étant une sécante quelconque qui rencontre le cercle* O *en* M_1 *et* M_2, *la perpendi-*

culaire de A *sur* Δ *coupe* O *en* K_1, *la perpendiculaire* K_1K_2 *à* BC *rencontre* O *en* K_2. *La droite de Simson de* K_2, *par rapport à* ABC, *passe au point de concours des droites de Simson de* M_1 *et* M_2, *c'est-à-dire à l'orthopôle* φ *de* Δ.

Soient L le pied de la perpendiculaire K_1K_2 sur BC, α la projection de A sur Δ, φ l'intersection de la parallèle $L\varphi$ à $A\alpha$ avec la perpendiculaire $\alpha\alpha'$ à BC (*voir* la figure).

$L\varphi$ est la droite de Simson de K_2 par rapport à ABC.

Traçons la perpendiculaire $M_1\mu_1\mu'_1$ à BC, μ'_1 étant sur la parallèle $K_1\mu'_1$ à BC;

$$\alpha\varphi = K_1L = \mu_1\mu'_1,$$

et $\mu_1\varphi$ est égal et parallèle à $\mu'_1\alpha$,

Les quatre points M_1, μ'_1, α, K_1 étant concycliques, $\mu'_1\alpha$ et $M'A$ sont antiparallèles à M_1K_1 par rapport à $M_1\mu'_1$ et AK_1 et par suite parallèles entre elles.

Si H' est l'orthocentre du triangle BM_1C, on a facilement

$$\mu_1H' = \mu_1M', \qquad M_1H' = AH;$$

d'où

$$\mu_1M_1 = \mu_1H' - M_1H' = \mu_1M' - AH = H\beta,$$

et $M_1\mu_1H\beta$ étant un parallélogramme, $\mu_1\varphi$ est la droite de Simson de M_1 par rapport à ABC.

De même $\mu_2\varphi$ est la droite de Simson de K_2 par rapport à ABC.

Par suite, φ point de la droite de Simson de M_2 est aussi l'intersection des droites de Simson de M_1 et M_2, c'est-à-dire l'orthopôle de Δ.

2. Désignons par δ_1, δ_2, δ_3 les angles de $L\varphi$ respectivement avec AB, BC, CA.

Le parallélisme de AK_1 et $L\varphi$ donne

$$(K_1A, AB) = (\varphi L, AB) = \delta_1;$$

de même

$$\widehat{K_1BC} = \widehat{K_1AC} = (\varphi L, AC) = \delta_3.$$

Or

$$(1) \qquad \varphi\alpha = K_1L = \frac{K_1B \times K_1C}{2R} = 2R \sin\delta_1 \sin\delta_3.$$

Le cercle ω_a de diamètre $A\gamma$ passe en α et A', pied de la hauteur AA' de ABC; soit α' l'intersection de ω_a et de $\alpha\varphi$. Ce cercle ω_a ayant son centre sur la droite des milieux de AB et AC, le quadrilatère $AA'\alpha'\alpha$ est un trapèze isoscèle.

Alors on obtient sans difficulté

$$(2) \qquad \varphi\alpha' = (AK_1 - 2A\alpha) \sin\delta_2 = 2d \sin\delta_2,$$

d étant la distance du centre O à la droite Δ, car h étant l'orthocentre du triangle $K_1M_1M_2$, c'est-à-dire le symétrique de A par rapport à Δ,

$$2d = hK_1 = AK_1 - 2A\alpha.$$

Appelons d' la distance de φ à Δ,

$$d' = \varphi\alpha \sin\delta_2 = 2R \sin\delta_1 \sin\delta_3 \sin\delta_3.$$

Cette valeur remarquable donne aussitôt la formule

$$d' = 2R \cos\Delta_1 \cos\Delta_2 \cos\Delta_3$$

donnée par M. J. Neuberg : *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910, p, 5). Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les angles de Δ avec AB, BC, CA, angles complémentaires de δ_1, δ_2, δ_3.

Enfin les relations (1) et (2) donnent l'expression de la puissance de φ dans le cercle ω_a :

$$\varphi\alpha.\varphi\alpha' = 4Rd\sin\delta_1\sin\delta_2\sin\delta_3 = 2dd'.$$

La symétrie de ce résultat montre que *l'orthopôle* φ *est le centre radical des trois cercles* ω_a, ω_b, ω_c *qui ont pour diamètres respectifs les droites qui joignent les sommets* A, B, C *aux intersections de* Δ *avec* AB, BC, CA.

3. Soient S un point quelconque de Δ; DEF le triangle podaire de ce point par rapport à ABC; M l'intersection de SD avec la parallèle AM à BC; α la projection orthogonale de A sur Δ; AO rencontre Δ en R_a dont les projections sur AB et CA sont U_a, V_a.

Les cercles AMDα et $AU_a\alpha V_a$, de diamètres respectifs AS et AR_a, donnent

$$\widehat{E\alpha F} = \widehat{U_a\alpha V_a} = 180° - \widehat{A},$$

et EF, U_aV_a sont tangentes à une parabole de foyer α, conique qui, visiblement, est tangente aussi aux côtés AB et CA.

Appelons alors P_a l'intersection des tangentes EF et U_aV_a :

$$\widehat{\alpha EC} = \widehat{\alpha P_a V_a}.$$

Or, dans le quadrilatère inscrit AMαE,

$$\widehat{\alpha EC} = \widehat{\alpha MA};$$

d'où

$$\widehat{\alpha MA} = \widehat{\alpha P_a V_a},$$

et αM *passe au point d'intersection* P_a *de* EF *et* U_aV_a.

Dans le cercle DEF,

$$DP_a.P_aK = EP_a.P_aF.$$

Or, dans le cercle AEαFM, de diamètre AS,

$$MP_a . P_a \alpha = EP_a . P_a F = DP_\alpha . P_a K.$$

Le quadrilatère MDαK est alors inscriptible; le centre du cercle est situé sur la perpendiculaire à MD en son milieu, c'est-à-dire sur la droite B_1C_1 des milieux de BC et CA.

Soit α' le symétrique de α par rapport à B_1C_1. Le cercle de diamètre AQ, Q étant l'intersection de BC et Δ, contient α et α'. De plus, α' est un point du cercle MDαK.

Donc

$$D\varphi . \varphi K = \alpha\varphi . \varphi\alpha' = 2\,dd' = \text{const.}$$

et le théorème fondamental de M. Lemoyne sur l'orthopôle est établi.

4. A propos de deux théorèmes de M. Fontené, nous avons donné dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 498) une démonstration simple de la construction de l'orthopôle d'un diamètre OS du cercle circonscrit O par rapport à un triangle ABC.

La précédente figure va nous permettre d'étendre cette détermination de l'orthopôle φ au cas le plus général d'une droite *quelconque* Δ du plan du triangle ABC.

Considérons alors les groupes de cercles ω_1 et ω_2, ω_1 et ω_3, ω_2 et ω_3, respectivement circonscrits aux triangles DEF, AFE et MDαKα'.

Leurs axes radicaux, qui sont respectivement EF, Dφ, αM, se coupent en un même point, intersection de EF et αM, c'est-à-dire P_a.

D'où ce théorème général :

On donne un triangle ABC *et une droite* Δ *quel-*

conque de son plan. Les rayons AO, BO, CO *du cercle circonscrit au triangle rencontrent* Δ *en trois points* R_a, R_b, R_c, *dont les projections orthogonales sur les côtés adjacents sont* U_aV_a, U_bV_b, U_cV_c. *Soient* DEF *le triangle podaire d'un point* S *de* Δ *par rapport à* ABC; P_a, P_b, P_c, *les intersections respectives des droites* U_aV_a *et* EF, U_bV_b *et* FD, U_cV_c *et* DE. *Les trois droites* DP_a, EP_b, FP_c *concourent en un point* φ *orthopôle de* Δ *par rapport au triangle* ABC.