

R. BOUVAIST

**Sur deux propositions de Ribaucour
(Questions 858, 859)**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 25-30

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__25_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[029]

SUR DEUX PROPOSITIONS DE RIBAUOUR
(QUESTIONS 858, 859);

PAR M. R. BOUVAIST.

Je démontrerai tout d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient deux points M et (M') décrivant deux courbes (M) et (M') de telle sorte que la droite MM' touche en T une courbe (T) , les tangentes à (M) et (M') en M et M' se coupent sur une courbe (K) en K , la tangente à (K) en K coupe MM' en S ; si ρ_M et $\rho_{M'}$ désignent les rayons de courbure en M et M' à (M) et (M') on a la relation

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{MS \cdot M'T}{M'S \cdot MT} \frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3},$$

Soient N l'intersection des normales à (M) et (M') en M et M' , μ et μ' les centres de courbure de ces courbes en M et M' , α et β les intersections de la nor-

male en K à (K) avec NM, NM' . Posons

$$\widehat{NMM'} = \hat{\theta}, \quad \widehat{NM'M} = \theta', \quad \widehat{MK\alpha} = \hat{\varphi}, \quad \widehat{M'K\beta} = \hat{\varphi}',$$

nous aurons

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{MK}{M'K} \frac{TM}{TM'}, \quad d(K) = K\alpha \frac{d(M)}{M\mu} = K\beta \frac{d(M')}{M'\mu'},$$

d'où

$$\frac{KM}{KM'} \frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'} \frac{KM'}{KM} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}, \quad \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M'K}^2} \frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'},$$

d'où, en remarquant que $\frac{MS}{\cos \varphi} = \frac{KS}{\cos \theta}$, $\frac{M'S}{\cos \varphi'} = \frac{KS}{\cos \theta'}$,

$$\frac{MS}{M'S} : \frac{MT}{M'T} = \frac{M'\mu'}{M\mu} \frac{\cos^3 \theta'}{\cos^3 \theta},$$

d'où enfin

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{MS}{M'S} \frac{M'T}{MT} \frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3}.$$

Un cas particulièrement simple sera celui où le rapport $\frac{MS}{M'S} : \frac{MT}{M'T}$ sera harmonique; nous aurons alors

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3}.$$

En voici deux exemples géométriques :

1° Les courbes (M) et (M') sont une seule et même conique, la courbe (K) est une droite. On voit que :

Si les deux tangentes à une conique en M et M' se coupent en K , le rapport des rayons de courbure à cette courbe en M et M' est égal au cube du rapport

$$\frac{KM}{KM'}.$$

2° Les courbes (M).et (M') sont une seule et même cubique, le point T est un point d'inflexion de cette courbe, le point K décrit alors la polaire harmonique (K) de T; d'où la proposition suivante :

Une sécante issue d'un point d'inflexion T d'une cubique coupe la courbe en M et M', les tangentes à la courbe en M et M' se coupent en K, le rapport des rayons de courbure de la cubique en M et M' est égal au cube du rapport $\frac{KM}{KM'}$.

Ceci posé, les deux propositions de Ribaucour que je considère sont les suivantes :

Question proposée 858 (1868, p. 190 ; réimprimée 1917, p. 157).

D'un point M dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes MA et MB, puis par M, on mène une droite MC.

Aux points A et B on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à MC.

Démontrer : 1° que ces coniques touchent MC au même point C; 2° que si l'on fait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de MC du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en C quatre points communs confondus.

Question proposée 859 (1868, p. 190 ; réimprimée 1917, p. 157) :

Démontrer la même proposition pour les courbes

du troisième degré, lorsque M est sur la polaire d'un point d'inflexion.

I. *Question 858.* — Soit μ le point où MC coupe AB, soient (E) la conique donnée, (A) et (B) les faisceaux formés par les coniques qui surosculent (E) en A et B, μ conjugué de M par rapport à (E) est le second point double de l'involution déterminée sur MC par les coniques (A) et (B); il existe donc deux coniques (A_1) et (B_1) se touchant en μ . Une des propositions données plus haut montre qu'elles ont même rayon de courbure en μ .

Soit μ' le conjugué harmonique de μ par rapport à A et B. La sécante commune à (A_1) et (B_1) qui correspond à MC passe par μ' , si l'on fait correspondre aux points communs à (A_1) et (B_1) situés sur cette droite les points cycliques, (A_1) et (B_1) se transforment en deux cercles égaux tangents extérieurement, car μ' est évidemment un centre de similitude de (A_1) et (B_1). Il en résulte que si ω_1 et ω_2 sont les centres de (A_1) et (B_1), $\mu\omega_1$ et $\mu\omega_2$ sont conjugués harmoniques par rapport à μA et μM . Prenons la symétrique (B'_1) de (B_1) par rapport à $M\mu$ parallèlement à AB, (B'_1) aura son centre sur $\mu\omega_1$, axe d'aberration de courbure de (A_1) en μ ; comme elle a en ce point même rayon de courbure que (A), elle lui est surosculatrice en μ .

Question 859. — Cette proposition n'est vraie que dans un cas particulier. Soit I le point considéré; si $IAB \equiv x = 0$, $MA \equiv z = 0$, $MB \equiv y = 0$, MA et MB étant les tangentes à la cubique en A et B, l'équation générale de celle-ci sera

$$yz[ax + \beta y + \gamma z] + Bx^2(Ax + \beta y + \gamma z) = 0,$$

$ax + \beta y + \gamma z = 0$ étant la tangente d'inflexion.

Le faisceau (A) sera

$$Bx^2 + \mu z^2 + \frac{2(\alpha - A)}{\beta} xz + 2yz = 0.$$

Le faisceau (B) sera

$$Bx^2 + \mu_1 y^2 + \frac{2(\alpha - A)}{\gamma} xy + 2yz = 0.$$

Les polaires de M par rapport à (A) et (B) se coupent en un point μ fixe de la polaire harmonique ($\beta y - \gamma z = 0$ de I par rapport à la cubique); ce point μ n'est pas sur AB, sauf dans le cas où $A - \alpha = 0$, cas auquel la cubique se décompose.

Les coniques

$$(A_1) \equiv |B\beta x + (z - A)z|^2 + 2B\beta[\beta y - \gamma z]z = 0,$$

$$(B_1) \equiv |B\gamma x + (z - A)y|^2 + 2B\gamma[\gamma z - \beta y]y = 0$$

touchent $M\mu$ en μ ; les propositions démontrées plus haut montrent, du reste, qu'elles ont même rayon de courbure en μ .

La sécante commune à (A_1) et (B_1) qui correspond à la tangente $M\mu$ a pour équation

$$2B\beta\gamma(\alpha - A)x + |(\alpha - A)^2 - 2B\beta\gamma| |\beta y + \gamma z| = 0;$$

elle passe par I, qui est du reste un centre de similitude de (A_1) et (B_1) ; un raisonnement identique à celui que nous avons fait plus haut montre, dès lors, que (A_1) et la conique (B'_1) obtenue en prenant la symétrique de (B_1) par rapport à $M\mu$ parallèlement à $I\mu$, sont surosculatrices en μ .

La proposition de Ribaucour est donc inexacte et, rectifiée, doit s'énoncer comme il suit :

Si par un point d'inflexion I d'une cubique Γ , on mène une sécante coupant la courbe en A et B, il

(30)

existe une conique (A) surosculatrice à Γ en A et une conique (B) surosculatrice à Γ en B, qui touchent la polaire harmonique Δ de I par rapport à Γ au même point μ , si (B') désigne la conique obtenue en prenant la symétrique de (B) par rapport à Δ , parallèlement à $I\mu$, (B') et (A) sont surosculatrices en μ .