

T. HAYASHI

**Le produit de cinq nombres entiers  
consécutifs n'est pas le carré d'un  
nombre entier**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18  
(1918), p. 18-21

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_18\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__18_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

[119c]

**LE PRODUIT DE CINQ NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS  
N'EST PAS LE CARRE D'UN NOMBRE ENTIER ;**

PAR M. T. HAYASHI (Sendai, Japon).

---

J'ai démontré précédemment dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 150), que le produit de deux, trois ou quatre nombres entiers consécutifs n'est jamais un carré, ni un cube, ni une puissance quelconque. Reprenant et développant aujourd'hui le même sujet, je me propose de montrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs ne peut être non plus le carré d'un nombre entier, c'est-à-dire que la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$x(x^2-1)(x^2-4) = y^2$$

n'existe pas.

1. *Cas où  $x$  est un carré.* — Je vais démontrer que

l'équation

$$(x^2 - 1)(x^2 + 4) = z^2$$

ne peut avoir de solution entière.

Comme  $x^2 - 1$ ,  $x^2 - 4$  ne sont pas des carrés, nous pouvons poser

$$x^2 - 1 = A^2 r, \quad x^2 - 4 = B^2 r',$$

$r$  et  $r'$  ne contenant pas de facteurs carrés. Alors, pour que l'équation indéterminée puisse exister, il faut que l'on ait

$$r = r',$$

c'est-à-dire

$$x^2 - 1 = A^2 r \quad \text{et} \quad x^2 - 4 = B^2 r.$$

De là, par soustraction,

$$z = (A^2 - B^2)r.$$

Donc

$$r = 3 \quad \text{et} \quad A^2 - B^2 = 1.$$

Mais cette dernière relation est impossible. Donc, dans le cas où  $x$  est un carré, l'équation indéterminée proposée est impossible aussi.

**2. Cas où  $x$  n'est pas un carré.** — Soit alors

$$(1) \quad x = X^2 \xi,$$

où  $\xi$  est considéré comme une quantité ne contenant pas de facteur carré; comme dans le cas précédent; on a

$$(2) \quad x^2 - 1 = A^2 r$$

et

$$(3) \quad x^2 - 4 = B^2 r',$$

attendu que  $r$  et  $r'$  ne peuvent être égaux.

$x$  et  $x^2 - 1$  sont des nombres premiers entre eux; et par suite  $\xi$  ou un de ses facteurs n'est pas facteur de  $x^2 - 1$ , mais il l'est de 4. Donc  $\xi$  n'est autre chose que 2.

En outre,  $r$ , ou l'un de ses facteurs, ne pouvant pas être facteur de  $x$ , est facteur de  $x^2 - 4$ , et par suite de  $(x^2 - 1) - (x^2 - 4)$ . Donc  $r$  ne peut être que 3. Par conséquent, si l'équation indéterminée proposée existait,  $r'$  serait  $2 \times 3$ .

Donc (1), (2) et (3) deviennent respectivement

$$(4) \quad x = 2X^2,$$

$$(5) \quad x^2 - 1 = 3A^2,$$

$$(6) \quad x^2 - 4 = 6B^2.$$

Cette dernière équation (6) indique que 3 est facteur de  $x - 2$  ou  $x + 2$ .

3. Si 3 était facteur de  $x - 2$ , d'après (4), 2 étant aussi facteur de  $x - 2$ , (6) se décomposerait en deux équations

$$x - 2 = 6B_1^2, \quad x + 2 = B_2^2;$$

ou bien

$$x - 2 = 6B_1^2s, \quad x + 2 = B_2^2s,$$

$s$  désignant un facteur non carré.

Or si l'on admet que

$$x + 2 = B_2^2,$$

d'après l'équation indéterminée proposée, comme le produit de quatre nombres entiers consécutifs

$$(x - 2)(x - 1)x(x + 1)$$

ne peut être un carré, l'équation proposée n'existe pas.  $s$  sera alors facteur de  $(x + 2) - (x - 2)$ ; par suite sa valeur sera 2.

Dans ce cas on a

$$x - 2 = 12B_1^2, \quad x + 2 = 2B_2^2.$$

Mais d'après (4) cette dernière équation devient

$$X^2 + 1 = B_2^2,$$

ce qui est impossible.

4. Si 3 était facteur de  $x + 2$ , d'après (4), 2 étant aussi facteur de  $x + 2$ , (6) serait décomposée comme suit en deux relations

$$x + 2 = 6B_1^2, \quad x - 2 = B_2^2;$$

ou bien

$$x + 2 = 6B_1^2s, \quad x - 2 = B_2^2s.$$

La première de ces équations, exprimant que le produit de quatre entiers consécutifs

$$(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$$

est un carré, ne peut pas exister; et la valeur de  $s$  est 2 comme dans le cas précédent. Donc on a

$$x + 2 = 12B_1^2, \quad x - 2 = 2B_2^2.$$

Or cette dernière équation, d'après la relation (4), se transforme en

$$X^2 - 1 = B_2^2,$$

équation qui est impossible.

Donc l'équation indéterminée proposée est impossible aussi.