

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 145-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__145_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1894.

(1900, p. 574.)

On donne les trois surfaces du second degré

$$Q_1 \equiv yz + a(z - y) + 3a^2 = 0,$$

$$Q_2 \equiv zx + a(x - z) + 3a^2 = 0,$$

$$Q_3 \equiv xy + a(y - x) + 3a^2 = 0;$$

1° Démontrer que ces surfaces passent par une même cubique gauche;

2° Trouver le lieu des centres des quadriques passant par cette cubique;

3° Trouver les droites situées sur ce lieu.

CH. BICHOE.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

1° Les surfaces cylindriques Q_1 et Q_2 contiennent toutes deux la droite de l'infini du plan xOy ; le reste de leur intersection est une cubique gauche qui appartient bien à Q_3 , à cause de l'identité

$$(x-a)Q_1 - (y+a)Q_2 + 2aQ_3 \equiv 0.$$

2° L'équation générale des quadriques passant par cette cubique gauche étant

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0,$$

on obtient pour le lieu de leurs centres la surface

$$(x-a)(y-a)(z-a) + (x+a)(y+a)(z+a) = 0.$$

3° Cette surface contient, outre les droites de l'infini des plans de coordonnées, les droites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \left\{ \begin{array}{l} x-a=0, \\ y+a=0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} y-a=0, \\ z+a=0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} z-a=0, \\ x+a=0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-a=0, \\ z+a=0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} y+a=0, \\ x+a=0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} z-a=0, \\ y+a=0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y+z=0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} y=0, \\ z+x=0, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} z=0, \\ x+y=0. \end{array} \right. \end{array}$$

1914.

(1901, p. 192.)

Si une ellipse de grandeur donnée roule sur deux droites rectangulaires :

1° Le lieu des foyers de cette ellipse se compose de quatre ovals dont chacun d'eux a une aire équivalente à celle d'un cercle ayant pour diamètre la distance focale;

2° Le lieu des sommets du grand axe se compose également de quatre ovals ayant chacun pour aire celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre;

3° Le lieu des sommets du petit axe est aussi formé par quatre ovals ayant chacun une aire équivalente à celle du cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

E.-N. BARIEN.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Considérons une ellipse d'axes $2a$ et $2b$, de centre O , dont le grand axe est dirigé suivant Ox et le petit axe suivant Oy . Soient : OX , OY les deux droites rectangulaires données, que nous prenons comme axes de coordonnées; θ l'angle que Ox fait avec OX ; α et β les coordonnées d'un point M du plan de l'ellipse par rapport à ses axes Ox , Oy .

Dans le système d'axes Ox , Oy , la tangente à l'ellipse, qui fait un angle θ avec Ox , a pour équation

$$(1) \quad x \sin \theta + y \cos \theta = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

La tangente qui lui est perpendiculaire fait un angle de $90^\circ + \theta$ avec Ox et a pour équation

$$(2) \quad x \cos \theta - y \sin \theta = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}.$$

Or, les coordonnées (X, Y) du point M par rapport à OX , OY , sont respectivement les distances de M aux droites (2) et (1). Ces coordonnées sont donc

$$(3) \quad X = -\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta + \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta},$$

$$(4) \quad Y = \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Telles sont les coordonnées paramétriques d'un point M de la courbe roulette de M entraîné dans le roulement de l'ellipse. Cette courbe se compose de quatre ovals identiques, dans chaque angle droit de OX et OY .

Étudions maintenant l'aire U de l'un de ces ovals. On a

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\theta} = Y \frac{dX}{d\theta} &= (\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta - \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}) \\ &\times \left(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta - \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \right), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\theta} = & \alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta + 2\alpha\beta \sin \theta \cos \theta \\ & - \alpha \sin \theta \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} - \beta \cos \theta \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \\ & - \frac{c^2 \alpha \sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} - \frac{c^2 \beta \sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ & + \frac{c^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Pour avoir l'aire de l'ovale, il faut intégrer de 0 à 2π ; on a donc

$$\begin{aligned} U = & \alpha^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \beta^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + 2\alpha\beta \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ & - \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta \\ & - \beta \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ & - c^2 \alpha \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ & - c^2 \beta \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ & + c^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{\alpha^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Or, il est facile de voir que toutes ces intégrales, sauf les deux premières, sont nulles. Par exemple, considérons la quatrième

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta.$$

On peut l'écrire

$$I = - \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2 - c^2 \cos^2 \theta} d(\cos \theta).$$

Pour $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, on aura $\cos \theta = 1$. Par conséquent $I = 0$.

L'aire U est donc

$$(5) \quad U = \pi(\alpha^2 + \beta^2).$$

Elle est équivalente à l'aire du cercle ayant pour rayon la distance de M au centre O de l'ellipse.

Les cas donnés par l'énoncé sont :

1^o $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$. Alors $U = \pi c^2$ (aire du cercle focal).

2^o $\alpha = \pm a$, $\beta = 0$. Alors $U = \pi a^2$ (aire du cercle principal).

3^o $\alpha = 0$, $\beta = \pm b$. Alors $U = \pi b^2$ (aire du cercle secondaire).

Ce sont bien les résultats demandés.

Pour les sommets du rectangle des axes, $\alpha = \pm a$, $\beta = \pm b$,
 $U = \pi(a^2 + b^2)$.

L'ovale a alors même aire que le cercle de Monge de l'ellipse.

Sur l'équation cartésienne du lieu dont les coordonnées paramétriques sont (3) et (4). — M. H. Brocard, ayant reçu communication de mon projet de réponse, s'est empressé de me faire connaître les études antérieures publiées à l'occasion d'un problème plus ancien, proposé sous le nom d'*ellipse-glissette*, traité ou résolu plus ou moins complètement par F. Muir, 1889-1890, 1891-1892; J.-M. Laren, 1891-1892, 1897-1899; P.-G. Tait, 1891-1892; P.-H. Schoute, 1894-1896; E.-J. Vanson, 1897-1899.

(Voir *Encyclopédie fr.-all. des Sc. math.*, t. I, vol. II, *Algèbre*, 1907, p. 107 : Élimination.)

En rendant rationnelles les équations paramétriques (3) et (4), on a

$$(6) \quad (\alpha^2 - \beta^2 - c^2) \sin^2 \theta + 2\alpha\beta \sin \theta \cos \theta \\ - 2\alpha x \cos \theta + 2\beta x \sin \theta - (x^2 + \alpha^2 - a^2) = 0;$$

$$(7) \quad (\alpha^2 - \beta^2 - c^2) \sin^2 \theta + 2\alpha\beta \sin \theta \cos \theta \\ - 2\beta y \cos \theta - 2\alpha y \sin \theta + (y^2 + \beta^2 - b^2) = 0.$$

L'élimination de θ est grandement facilitée par ce fait que les coefficients de $\sin^2 \theta$ et $\sin \theta \cos \theta$ sont les mêmes dans ces deux équations.

En les retranchant l'une de l'autre, on a

$$(8) \quad 2(\alpha x - \beta y) \cos \theta - 2(\beta x + \alpha y) \sin \theta \\ + x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

On combinera cette équation avec l'une ou l'autre des deux autres (6) ou (7). On aura ainsi une équation du second degré en $\sin \theta$. L'équation (8) est aussi du second degré en $\sin \theta$. Le résultant de ces deux équations en $\sin \theta$ donnera une équation qui est, en général, du *dixième degré*.

Dans le cas des foyers, $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$; le lieu, qui a alors les deux facteurs étrangers $x^2 - b^2$ et $y^2 - b^2$, se réduit au sixième degré, et a pour équation

$$(9) \quad x^2(y^2 - b^2)^2 + y^2(x^2 - a^2)^2 - 4c^2x^2y^2 = 0.$$

On obtient, d'ailleurs, cette équation directement, en raison des propriétés des foyers. Soient (x, y) , (x', y') leurs coordonnées. On a

$$xx' = b^2, \quad yy' = b^2, \quad (x - x')^2 + (y - y')^2 = 4c^2.$$

Il en résulte $x' = \frac{b^2}{x}$, $y' = \frac{b^2}{y}$, et l'équation du lieu est immédiatement

$$\left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2}{y}\right)^2 = 4c^2.$$

C'est bien l'équation (9).

Lorsque le point M est un des sommets de l'ellipse, ou bien est situé sur l'un des axes de l'ellipse, le lieu est du huitième degré.

C'est ainsi que, pour les sommets du grand axe ($\alpha = \pm a$, $\beta = 0$), on parvient à l'équation

$$\begin{aligned} & [(2a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + b^4]^2 - 4a^2c^2(x^4 + y^4) - 4a^2b^2(x^2 + y^2)^2 \\ & = 64a^4x^2y^2(c^2x^2 + b^4)(c^2y^2 + b^4). \end{aligned}$$

1915 (P. APPELL).

(1901, p. 331; 1917, p. 166.)

Note de la RÉDACTION.

Cette question, extraite des *Archiv. Math. Phys.*, a reçu sa solution dans un article *Sur les polynomes $U_{m,n}$, etc.*, de M. C. WILLIGENS (1911, p. 97-116). La question 1915, malheureusement, ne se trouvait pas rappelée dans cet article. Il nous semble inutile d'en reproduire ici l'énoncé.

C'est à l'obligeance de M. Appell que nous devons cette indication, et nous lui en exprimons nos remerciements les plus sincères.

1557.

(1903, p. 4-)

Une parabole est bitangente à une conique donnée S en un point fixe et en un autre point. Le lieu du foyer est une podaire de parabole.

Cas particulier : 1° *La conique donnée S est une hyperbole équilatère*; 2° *La conique S se décompose en un couple de points.*

R. GILBERT.

SOLUTION

Par l'N ABONNE.

Prenons comme origine des coordonnées le point de contact fixe et comme axe des x et des y la tangente et la normale à S en ce point.

Les équations ponctuelle et tangentielle de S sont

$$\begin{aligned}(\beta x - \alpha y)^2 - \gamma y^2 - 2\beta y &= 0, \\ u^2 + 2\alpha u + 2\beta v &= 0;\end{aligned}$$

α, β, γ désignant des constantes.

Celles de la parabole sont

$$\begin{aligned}(bx - ay)^2 - 2by &= 0, \\ u^2 + 2au + 2bv &= 0;\end{aligned}$$

a et b étant deux paramètres variables.

En retranchant les deux équations tangentielles on obtient

$$2(\alpha - \alpha')u + 2(b - \beta')v - \gamma = 0.$$

C'est l'équation du point de concours des deux tangentes communes, à S et à la parabole, autres que Ox. Pour exprimer que ces deux courbes sont tangentes, il suffit d'écrire que ce point est sur l'une des deux coniques, sur la parabole par exemple, ce qui donne

$$(bx - \alpha\beta)^2 - b\gamma(b - \beta) = 0.$$

D'autre part, si l'on exprime que la droite

$$y - y_0 - i(x - x_0) = 0$$

est tangente à la parabole; c'est-à-dire que le point x_0, y_0 est un foyer de cette courbe, on trouve

$$2(by_0 - ax_0) - 1 = 0, \quad bx_0 + ay_0 = 0;$$

d'où

$$a = -\frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}, \quad b = \frac{y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}.$$

Portant ces valeurs dans la relation ci-dessus, on obtient pour équation du lieu du foyer de la parabole

$$(\alpha y_0 + \beta x_0)^2 - \gamma y_0 [y_0 - 2\beta(x_0^2 + y_0^2)] = 0.$$

C'est une cubique circulaire unicursale: c'est-à-dire une podaire de parabole.

Si la conique S est une hyperbole équilatère, on a la relation

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2.$$

Les tangentes à la cubique au point double ont pour équation, dans cette hypothèse,

$$\beta^2 y^2 - 2\alpha\beta xy - \beta^2 x^2 = 0.$$

Elles sont rectangulaires et par suite la cubique est une strophoïde. Si la conique S se décompose en deux points, et si x_1, y_1 désignent les coordonnées du point, autres que l'origine, par lequel passent toutes les paraboles, on trouve pour équation du lieu des foyers

$$4y_1 y (x^2 + y^2) - (xy_1 + yx_1)^2 = 0.$$

Cette courbe est une cissoïde.

Autre solution par M. L. POLI.

2015.

(1905, p. 192, 1916, p. 361)

Un trièdre trirectangle a son sommet sur le côté E d'un angle donné. Du point où l'autre côté D de cet angle ren-

contre l'une des faces de ce trièdre, on élève un plan perpendiculaire à ce côté. Ce plan coupe E en un point d'où l'on abaisse la perpendiculaire A à la face considérée. On détermine de même B et C pour les autres faces du trièdre. Démontrer que les deux droites qui rencontrent A, B, C, D sont perpendiculaires à D et perpendiculaires l'une à l'autre.

MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

L'énoncé est manifestement inexact, car la droite E rencontre A, B, C, D et ne satisfait pas aux conditions données. Soit

$$E = \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0},$$

soit

$$D = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma};$$

les axes étant les arêtes du trièdre trirectangle donné, on voit de suite que les droites A, B, C ont pour équations

$$(A) \quad \begin{cases} x = x_0 - \frac{x_0 z_0}{\gamma P_0} = x_1, \\ y = y_0 - \frac{z_0 y_0}{\gamma P_0} = y_1, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} y = y_0 - \frac{y_0 x_0}{\alpha P_0} = y_2, \\ z = z_0 - \frac{z_0 x_0}{\alpha P_0} = z_2, \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} x = x_0 - \frac{y_0 x_0}{\beta P_0} = x_3, \\ z = z_0 - \frac{y_0 z_0}{\beta P_0} = z_3. \end{cases}$$

$$\text{si } P_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0.$$

Si α' , β' , γ' , l' , m' , n' sont les coordonnées d'une droite Δ s'appuyant sur A, B, C, on aura

$$n' = \alpha' y_1 - \beta' x_1, \quad l' = \beta' z_2 - \gamma' y_2, \quad m' = \gamma' x_3 - \alpha' z_3;$$

la relation $\alpha' l' + \beta' m' + \gamma' n' = 0$ devient

$$\frac{l \alpha x_0}{\alpha'} + \frac{m \beta y_0}{\beta'} + \frac{n \gamma z_0}{\gamma'} = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, l, m, n$ étant les coordonnées de D.

La relation $\alpha l' + \beta m' + \gamma n' + \alpha' l + \beta' m + \gamma' n = 0$, qui exprime que la droite Δ rencontre D, devient

$$\begin{aligned} & \alpha'(l + \gamma y_1 - \beta z_3) \\ & + \beta'(m + \alpha z_2 - \gamma x_1) + \gamma'(n + \beta x_3 - \alpha y_2) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \alpha(l + \gamma y_0 - \beta z_0) \\ & + \beta'(m + \alpha z_0 - \gamma x_0) + \gamma'(n + \beta x_0 - \alpha y_0) = 0; \end{aligned}$$

or

$$l = \beta z_0 - \gamma y_0, \quad m = \gamma x_0 - \alpha z_0, \quad n = \alpha y_0 - \beta x_0;$$

cette relation est vérifiée identiquement; D est donc sur l'hyperboloïde (ABC). Comme du reste le cône asymptotique de ABC est capable d'une infinité de trièdres trirectangles, le plan perpendiculaire à D mené par le centre de (ABC) coupe ce cône suivant deux génératrices rectangulaires, auxquelles correspondront sur (ABC) un couple de génératrices du système opposé à D, perpendiculaires entre elles et perpendiculaires à D.

2196.

(1912, p. 354.)

Une sécante quelconque d'une ellipse donnée rencontre l'ellipse de Frégier en deux points de Frégier μ et μ' et l'ellipse donnée en B et C. Le cercle de diamètre BC rencontre l'ellipse donnée en deux points A et A' qui correspondent aux points μ et μ' .

W. GAEDECKE.

DEUXIÈME SOLUTION (1)

Par M. H. BROCARD

L'ellipse donnée et l'ellipse de Frégier étant homothétiques

(1) Voir 1913, p. 573.

avec

$$m = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

pour rapport d'homothétie, on en déduit que les directions $\mu\mu$ et $\Lambda\Lambda'$ sont symétriques par rapport à Ox . Si donc un cercle passe par A, A' et rencontre l'ellipse en deux autres points B_1, C_1 , la corde B_1C_1 sera parallèle à $\mu\mu'$.

Parmi ces cercles, il y en aura donc un passant par B, C , intersections de $\mu\mu'$ avec l'ellipse. Mais BC passant par μ , ou par μ' est nécessairement vue de A ou de A' sous un angle droit. BC est donc un diamètre du cercle $BCAA'$ et l'on en conclut les propositions indiquées dans l'énoncé.

2199.

(1915, p. 38.)

On considère un point M du plan d'une parabole (P), tel que l'une des trois normales abaissées de M sur (P) soit bissectrice extérieure de l'angle des deux autres. Montrer que le lieu des sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds des normales se compose d'une parabole et d'une quadrique.

E.-N. BARISIEN

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Les formules que j'ai conseillées (1892. p. 4*), pour la solution de la question 1545, trouvent ici une application tout indiquée.

En effet, les trois normales MA, MB, MC étant issues d'un même point M , on sait que le triangle BCA a son barycentre sur l'axe Ox de la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Les ordonnées de ces trois points pourront donc être représentées par

$$-b, \quad -c, \quad +(b+c).$$

Comme la sous-normale est constante et égale à p , on voit que les coefficients d'inclinaison des trois normales MB, MC ,

MA ont pour valeurs

$$\frac{b}{p}, \quad \frac{c}{p}, \quad -\frac{b+c}{p}$$

(*loc. cit.*, p. 5*).

Les coefficients d'inclinaison λ et $-\frac{1}{\lambda}$ des bissectrices de l'angle BMC seront donc les racines de l'équation

$$\frac{\frac{b}{p} - \lambda}{1 + \frac{b\lambda}{p}} = -\frac{\lambda - \frac{c}{p}}{1 + \frac{c\lambda}{p}}$$

ou

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{p^2 - bc}{p(b+c)} - 1 = 0$$

Cette équation devant être vérifiée par le coefficient d'inclinaison de AM ou $-\frac{p}{b+c}$, on en déduira la relation

$$(E) \quad 3p^2 = (b+c)^2 + 2bc.$$

Mais on a vu (*loc. cit.*, p. 6*) que les sommets A', B', C' du triangle des tangentes en A, B, C ont pour coordonnées

$$(A') \quad \begin{matrix} x. & y. \\ \frac{bc}{2p} & -\frac{b+c}{2}, \end{matrix}$$

$$(B') \quad \begin{matrix} -\frac{c(b+c)}{2p} & \frac{b}{2}, \end{matrix}$$

$$(C') \quad \begin{matrix} -\frac{b(b+c)}{2p} & \frac{c}{2}. \end{matrix}$$

L'équation du lieu de chacun de ces points sera donc le résultat de l'élimination de b et c entre l'équation (E) et les équations (A'), (B'), (C'), ce qui donnera, pour A', la parabole

$$4y^2 = 3p^2 - 4px;$$

et pour les points B' ou C', l'équation d'une quartique.

2245.

(1915, p. 144.)

On considère : une ellipse ; l'ellipse E_1 concentrique à E , de mêmes directions d'axes et dont les longueurs d'axes sont le tiers de celles de E ; un point fixe G . Les côtés de tous les triangles inscrits dans E et ayant G pour centre de gravité enveloppent une conique Γ qui sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le point G sera à l'intérieur de E_1 , à l'extérieur de E_1 , ou situé sur E_1 . Dans quel cas Γ sera-t-elle une hyperbole équilatère ?

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

Soient $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $G(x_1, y_1)$. On sait que l'enveloppe des côtés des triangles considérés est une conique représentée par

$$\begin{aligned} & (a^2 - 9x_1^2)b^4x^2 - 18a^2b^2x_1y_1xy + (b^2 - 9y_1^2)a^4y^2 \\ & - 3(a^2b^2 - 9b^2x_1^2 - 9a^2y_1^2)(b^2x_1x + a^2y_1y) \\ & - \frac{1}{4}(a^2b^2 - 9b^2x_1^2 - 9a^2y_1^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

(voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1910, p. 220 ; 1911, p. 227). Par conséquent, suivant que

$$\text{Si } a^4b^4x_1^2y_1^2 <, \quad >, \quad = a^4b^4(a^2 - 9x_1^2)(b^2 - 9y_1^2),$$

c'est-à-dire

$$E_1 \equiv \frac{9x_1^2}{a^2} + \frac{9y_1^2}{b^2} - 1 <, \quad >, \quad = 0,$$

l'enveloppe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Quand elle est une hyperbole équilatère, on a

$$(a^2 - 9x_1^2)b^4 + (b^2 - 9y_1^2)a^4 = 0,$$

ce qui montre que le point G doit être sur l'ellipse

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{9}.$$

Autre solution par M. M.-F. EUGEN.

2252.

1910, p. 502.

On considère un volume dans lequel l'aire de la section par un plan parallèle à un plan fixe P est une fonction du second degré de la cote du plan sécant. Ce volume est limité par deux bases parallèles au plan P, dont les aires sont B et B'; l'aire de la section parallèle aux bases et équidistante des bases est B''; les cotes des plans des bases et du plan de la section B'' sont a, b, c. La cote du centre de gravité du volume a alors pour expression

$$\frac{Ba + B'b + 4B''c}{B + B' + 4B''}.$$

Le volume peut être en particulier un prismatoïde.

C. FONTENÉ.

SOLUTION

PAR UN ABONNÉ

Prenons un système d'axes rectangulaires quelconque, l'axe des z étant perpendiculaire au plan fixe. Puisque $c = \frac{a+b}{2}$, la formule à démontrer peut s'écrire

$$\frac{aB + bB' + 2(a+b)B''}{B + B' + 4B''}.$$

Soit

$$S = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

l'expression de la surface d'une section parallèle au plan fixe

On a

$$B = \alpha a^2 + \beta a + \gamma,$$

$$B' = \alpha b^2 + \beta b + \gamma,$$

$$B'' = \alpha \frac{(a+b)^2}{4} + \beta \frac{(a+b)}{2} + \gamma.$$

(159)

Si V est le volume du solide, on a aussi

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) dz \\ &= \frac{\alpha b^3}{3} + \frac{\beta b^2}{2} + \gamma b - \frac{\alpha a^3}{3} - \frac{\beta a^2}{2} - \gamma a \\ &= \frac{\alpha}{3} (b - a) (b^2 + ab + a^2) + \frac{\beta}{2} (b - a) (b + a) + \gamma (b - a) \\ &= \frac{b - a}{6} (B + B' + 4B''). \end{aligned}$$

Soit z_0 la cote du centre de gravité, on a

$$\begin{aligned} Vz_0 &= \int_a^b (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) z dz \\ &= \frac{\alpha b^4}{4} + \frac{\beta b^3}{3} + \frac{\gamma b^2}{2} - \frac{\alpha a^4}{4} - \frac{\beta a^3}{3} - \frac{\gamma a^2}{2} \\ &= (b - a) \left\{ \frac{\alpha}{4} (b + a) (b^2 + a^2) + \frac{\beta}{3} (b^2 + ab + a^2) + \frac{\gamma}{2} (b + a) \right\}; \end{aligned}$$

et par suite

$$z_0 = \frac{3}{2} \frac{\alpha (a^3 + b^3 + a^2 b + ab^2) + 2\beta (a^2 + ab + b^2) + 3\gamma (a + b)}{B + B' + 4B''}.$$

Après quelques transformations sans difficultés, on trouve bien la formule demandée.