NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XVIII.

(LXXVII[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C[ie], ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1918

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[$L^2$11,12]

SUR DEUX THÉORÈMES DE MANNHEIM ET DE M. BRICARD CONCERNANT LES LIGNES DE COURBURE ET LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES QUADRIQUES;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

Je commencerai par donner la solution de la question 1657 (1893, p. 53) proposée par Mannheim. Cette question conduit tout naturellement à étudier les rapports entre la surface des ondes et une certaine famille de quadriques homofocales et à retrouver, par la voie même qui y conduisit leur auteur, des théorèmes dus à Mannheim.

Le plus intéressant est une propriété des lignes de courbure des quadriques. M. Bricard a prouvé récemment (*Nouvelles Annales*, janvier 1908) que cette propriété est commune aux lignes de courbure et aux lignes géodésiques et qu'elle constitue par suite une interprétation nouvelle de la relation de Joachimsthal. J'aurai l'occasion de donner dans la deuxième Partie des démonstrations immédiates de ces propriétés.

I.

1. Voici l'énoncé de la question 1657.

On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents. Déterminer :

1° *L'équation de la surface qui limite la région occupée par toutes les ellipses de contour apparent ainsi obtenues ;*

2° *Le nombre des points de contact de cette surface et de l'une de ces ellipses* (1).

Les plans tangents à l'ellipsoïde dépendent de deux paramètres ; dans chacun d'eux nous avons une ellipse contour apparent, en projection orthogonale, de l'ellipsoïde donné. Donc une congruence d'ellipses. Par chaque point P de l'espace passent plusieurs de ces ellipses. On demande d'abord quelle est la région où doit se trouver P pour que l'une au moins de ces ellipses soit réelle. Cette région est évidemment limitée par certaines nappes de la surface focale de la congruence et chaque ellipse étant tangente en plusieurs points à cette surface focale, la deuxième question de l'énoncé est toute naturelle.

2. Soit P un point de l'espace. Pour qu'une conique de la congruence passe par P, il faut et il suffit que le plan Π de cette conique soit tangent à l'ellipsoïde E donné et que la perpendiculaire PA à Π en P soit aussi tangente à E. Donc PA doit être commun au cône

---

(1) Je copie cet énoncé dans le numéro de juillet 1916 en rectifiant une coquille évidente. On avait imprimé « l'axe de ces ellipses » au lieu de « l'une de ces ellipses ».

circonscrit à E de sommet P et à son cône supplémentaire. Π est un plan tangent commun à ces deux cônes. Par chaque point de l'espace il passe donc quatre coniques de la congruence. Étudions la réalité de ces coniques.

Coupons un cône par un de ses plans principaux contenant deux génératrices réelles; l'angle de ces deux génératrices (angle principal) est le supplément de l'angle analogue du cône supplémentaire. Donc pour qu'il y ait des génératrices communes à un cône et à son supplémentaire il faut et il suffit que les deux angles principaux de ce cône soient l'un aigu, l'autre obtus. Sans quoi l'un des deux cônes serait intérieur à l'autre.

Ceci étant, prenons le point P tout près de l'ellipsoïde et extérieur à lui. Le cône circonscrit de sommet P a ses deux angles principaux obtus; il n'y a pas d'ellipse réelle passant par P.

Prenons P un peu plus loin de E; le cône aura un angle principal aigu et l'autre obtus; il y a ura quatre ellipses réelles passant par P.

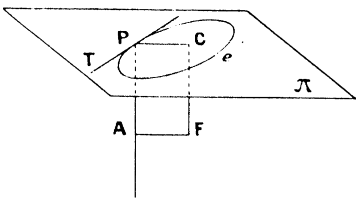
Prenons P plus loin encore; le cône circonscrit aura des angles principaux aigus, les quatre ellipses passant par P seront imaginaires.

De cet aperçu, il résulte que la région demandée est limitée par tout ou partie de la surface Σ lieu des sommets des cônes circonscrits à E et dont un angle principal est droit; que Σ comprend au moins deux nappes réelles : l'une, la plus proche de E, est le lieu des sommets pour lesquels le second angle principal est obtus; l'autre, la plus éloignée de E, est le lieu des sommets pour lesquels le second angle principal est aigu. Ces deux nappes auront pour points communs les sommets des cônes de révolution circonscrits à E et dont l'angle principal est droit. Ces points, qui sont les points de rencontre de Σ et des focales de E, seront donc des points singuliers de Σ.

Si l'on tient à remplacer cet aperçu par un raisonnement plus serré on pourra remarquer que le nombre de plans Π réels, issus de P, ne peut changer, quand P varie, que si deux de ses plans sont réels et confondus. Or cela n'arrive que si le cône circonscrit à E de sommet P est tangent à son cône supplémentaire suivant une génératrice réelle ; donc ces deux cônes sont bitangents, ce qui exige qu'ils aient un angle principal droit.

3. Avant de former l'équation de Σ, je traite la seconde partie. Soient Π un plan tangent à E en un point C, P un point de l'ellipse *e* de la congruence qui est située dans Π, PA la tangente à E perpendiculaire à Π et issue de P (*fig.* 1). Pour que P appartienne

Fig. 1.



à Σ, il faut que PA et PC, qui sont deux génératrices communes au cône circonscrit de sommet P et à son supplémentaire, soient des génératrices principales de ces cônes. Donc que PAC soit un plan principal du cône. Or si TP est la tangente à *e* en P, ATP est le plan tangent aux deux cônes suivant PA. Donc PAC et ATP doivent être rectangulaires, c'est-à-dire que

CP et TP doivent être orthogonales. On vérifiera facilement la réciproque.

Concluons : l'ellipse e de la congruence touche la surface focale Σ en quatre points réels ou imaginaires qui sont les pieds des normales abaissées sur e du point de contact c du plan de e et de l'ellipsoïde.

4. Soit

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2 = 0$$

l'équation d'un cône ; il aura un angle principal droit si, et seulement si, deux racines de l'équation en S sont égales et de signes contraires. D'avec les notations ordinaires l'équation en S est

$$\begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & A \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = \delta - \theta_1 S + \theta S^2 - S^3 = 0$$

avec

$$\theta = A + A' + A'', \qquad \theta_1 = \sum A'A'' - B^2 = \Sigma a,$$
$$\delta = \sum A a + 2BB'B'' - 2AA'A''.$$

Si l'équation en S a deux racines non nulles, égales et de signes contraires, la somme Θ des racines est la troisième solution en S et inversement. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône ait un angle principal droit est

$$\theta\theta_1 - \delta = 0.$$

Ceci s'écrit encore

$$\sum A(a' + a'') - 2BB'B'' + 2AA'A'' = 0 \quad (1).$$

---

(1) Si la quadrique n'était pas un cône, cette condition exprimerait que l'une des sections principales est une hyperbole équilatère.

5. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P. Le cône circonscrit à l'ellipse

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et de sommet P a pour équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$\times\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2}\right)^2 = 0.$$

Donc on a, en supprimant les indices,

$$A = \frac{E}{a^2} - \frac{x^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}\left(E - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right);$$

$$B = -\frac{xy}{a^2 b^2};$$

$$a = \frac{1}{b^2 c^2}\left(E - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(E - \frac{z^2}{c^2}\right) - \frac{y^2 z^2}{b^4 c^4}$$
$$= \frac{E}{b^2 c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right);$$

$$a' + a'' = \frac{E}{a^2 b^2 c^2}[y^2 + z^2 - b^2 - c^2].$$

Nous aurons l'équation de Σ en écrivant que le cône considéré satisfait à la condition du numéro précédent ; il vient :

$$\frac{E}{a^2 b^2 c^2} \mathbf{S} \frac{1}{a^2}\left(E - \frac{x^2}{a^2}\right)(y^2 + z^2 - b^2 - c^2)$$
$$+ 2\frac{x^2 y^2 z^2}{a^4 b^4 c^4} + \frac{2}{a^2 b^2 c^2}\left(E - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(E - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(E - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0.$$

Cette équation est divisible par E, comme on le voit en développant le dernier terme qui s'écrit

$$\frac{2}{a^2 b^2 c^2}\left\{E^2\left[E - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right] + E \mathbf{S} \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} - \frac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2}\right\}.$$

D'où l'équation de Σ :

$$\mathrm{S}\frac{1}{2a^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)(y^2+z^2-b^2-c^2)+\mathrm{S}\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-\mathrm{E}=0.$$

On voit que Σ est du quatrième degré ; donc Σ ne peut contenir que les deux nappes dont nous avons prévu l'existence et nous avons trouvé tous les points communs à Σ et à une ellipse e de la congruence.

Pour reconnaître la nature de Σ, il nous suffit de savoir qu'elle est du quatrième degré. Σ, étant le lieu des sommets des cônes circonscrits à E dont un angle principal est droit, contient évidemment les cercles orthoptiques des sections principales de E. Et, puisque Σ est du quatrième degré, le plan principal $y=0$, par exemple, coupe Σ suivant la circonférence de rayon $\sqrt{a^2+c^2}$ plus une conique dont les deux demi-axes sont les rayons $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ des deux autres circonférences orthoptiques principales.

Si donc on dispose des trois paramètres dont dépend la surface des ondes la plus générale, ayant mêmes axes que E, de façon à la faire passer par les trois circonférences orthoptiques principales, cette surface des ondes passera aussi par les ellipses qui complètent les sections de Σ par les plans principaux.

La surface des ondes et Σ seront même tangentes tout le long de ces trois circonférences et de ces trois ellipses. Donc elles coïncideront, puisqu'elles seront tangentes tout le long d'une courbe du 12[e] degré.

La surface Σ est donc une surface des ondes. Ses points doubles réels sont dans le plan $y=0$, à l'intersection de la circonférence et de l'ellipse sections de Σ par ce plan.

Je laisse au lecteur le soin de transformer l'équation de Σ de façon à la ramener à l'une des formes classiques de l'équation de la surface des ondes.

6. Mannheim déduit la nature de Σ d'un résultat de Painvin. Celui-ci a étudié le complexe des droites D d'où l'on peut mener deux plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde E. Si P est un point quelconque, le cône du complexe de sommet P est évidemment le cône $\mathcal{C}_1$ du second degré lieu des droites issues de P par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires au cône $\mathcal{C}$ circonscrit à E et de sommet P. La surface du complexe est le lieu des points P pour lesquels $\mathcal{C}_1$ est décomposable. Or si $\mathcal{C}_1$ est décomposable, il passe par l'un de ses axes, c'est-à-dire par l'un des axes de $\mathcal{C}$. Donc par cet axe on peut mener deux plans tangents rectangulaires à $\mathcal{C}$ et l'angle principal de $\mathcal{C}$, situé dans le plan perpendiculaire à l'axe considéré, est un angle droit. La surface du complexe de Painvin est donc notre surface Σ. Or, on démontre que cette surface du complexe est une surface des ondes ([1]).

7. La question posée par Mannheim est entièrement traitée ([2]), mais il est naturel de se demander quelles sont les courbes Γ enveloppes des ellipses de la congruence.

Les courbes Γ sont tracées sur Σ; elles sont données

([1]) Ce résultat de Painvin est reproduit dans la géométrie analytique de Pruvost.

([2]) Sa solution est implicitement contenue dans un Mémoire de Mannheim des *Proceedings of the royal Society* (1881). Ce Mémoire, reproduit à peu près textuellement dans les *Leçons et développement de Géométrie cinématique*, contient les résultats que nous allons démontrer maintenant par les méthodes mêmes de Mannheim.

par une équation différentielle du premier ordre qui exprime que celle de ces courbes qui passe par le point P (n° 3, *fig.* 1) est tangente à la droite PT. Or PT, étant perpendiculaire au plan principal APC du cône Θ de sommet P et circonscrit à E, est un axe principal de ce cône, donc est tangent à deux des quadriques homofocales à E qui passent par P.

Ces deux quadriques coupent Σ suivant deux courbes Γ_1 et Γ_2 passant par P et qui sont donc aussi solutions de l'équation différentielle donnant les courbes Γ, donc en réalité Γ_1 et Γ_2 coïncident avec l'enveloppe Γ passant par P.

Et comme la quadrique homofocale à E contenant Γ varie avec Γ, puisque Σ n'est pas une quadrique, on peut dire que Σ *coupe toute quadrique* Q *homofocale à* E *suivant une ligne de courbure* Γ *de* Q. *Le reste de l'intersection est une courbe* Λ *du quatrième degré.*

Soit Q_1 la quadrique homofocale à E et normale en P à PT. La partie de son intersection avec Σ qui passe par P, n'étant pas tangente à PT, est une courbe Λ. Or, on voit qu'en P, Q_1 et Σ sont orthogonales ainsi que Λ et Γ, et, puisque P est quelconque : *Les courbes* Λ *sont les trajectoires orthogonales des courbes* Γ. *La quadrique homofocale à* E *qui contient une courbe* Λ *est coupée orthogonalement par* Σ *tout le long de cette courbe* Λ.

On sait que, quand un plan se déplace, les plans normaux aux trajectoires des différents points de ce plan passent par un point fixe F de ce plan. Ceci posé, supposons que le point P se déplace sur Σ en entraînant l'angle droit APC qui est bien déterminé pour chaque position de P. Le point F est alors évidemment le quatrième sommet d'un rectangle APCF, ce qui le détermine, (*fig.* 1). FP étant une normale à la trajectoire de P, quel que soit le déplacement de P sur Σ, FP *est la normale à* Σ.

Le plan normal à A en P est donc le plan TPF. Mais, si l'on considère le contour apparent de E sur le plan APC, c'est une ellipse tangente à PA et PC en A et C; donc une ellipse dont le centre est sur PF. C'est dire que le plan TPF passe par le centre O de E, et comme ce plan est normal à A, A *est une courbe sphérique tracée sur une sphère de centre* O.

Le lecteur verra de suite que tous les raisonnements de ce numéro, sauf le dernier, s'appliquent également au cas plus général de la surface Σ' lieu des sommets des cônes circonscrits à E et dont un angle principal est donné.

8. Après les résultats du numéro précédent, il apparaît clairement qu'on aurait eu avantage à remplacer les calculs des n^{os} 4 et 5 par des calculs en coordonnées elliptiques. C'est ce que je vais faire rapidement.

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les paramètres des trois quadriques homofocales à E et passant par P (x, y, z) et soit s_3 la racine de l'équation en S du cône circonscrit de sommet P qui fournit le plan principal tangent à la quadrique ρ_3, on a

$$\mathbf{S}\frac{X^2}{a^2}E - \left(\mathbf{S}\frac{Xx}{a^2}\right)^2 - s_3(x^2+y^2+z^2)$$
$$\equiv M\left(\mathbf{S}\frac{Xx}{a^2-\rho_1}\right)^2 + N\left(\mathbf{S}\frac{Xx}{a^2-\rho_2}\right)^2.$$

Ceci donne

$$(1) \qquad \frac{E}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} - s_3 = M\frac{x^2}{(a^2-\rho_1)^2} + N\frac{x^2}{(a^2-\rho_2)^2},$$

$$(2) \qquad -\frac{xy}{a^2b^2} = M\frac{xy}{(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)} + N\frac{xy}{(a^2-\rho_2)(b^2-\rho_2)},$$

et des relations analogues. En posant

$$M = \frac{(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(c^2-\rho_1)}{a^2b^2c^2}m,$$

$$N = \frac{(a^2-\rho_2)(b^2-\rho_2)(c^2-\rho_2)}{a^2b^2c^2}n,$$

l'équation (2) devient

$$m(c^2-\rho_1)+n(c^2-\rho_2)+c^2=0.$$

Or, on a le droit de remplacer c^2 par a^2 et b^2, d'où

$$m+n+1=0, \qquad m\rho_1+n\rho_2=0,$$

$$M = \frac{(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(c^2-\rho_1)}{a^2b^2c^2}\,\frac{\rho_2}{\rho_1-\rho_2},$$

$$N = \frac{(a^2-\rho_2)(b^2-\rho_2)(c^2-\rho_2)}{a^2b^2c^2}\,\frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}.$$

Ces valeurs portées dans (1) donnent, par un calcul facile quoique un peu long,

$$s_3 = -\frac{\rho_1\rho_2}{a^2b^2c^2}.$$

L'équation réduite du cône est donc (1)

$$\frac{X_1^2}{\rho_1}+\frac{X_2^2}{\rho_2}+\frac{X_3^2}{\rho_3}=0.$$

Ses angles principaux sont donnés par des relations telles que

$$(3) \qquad \rho_1\sin^2\frac{\alpha_3}{2}+\rho_2\cos^2\frac{\alpha_3}{2}=0.$$

L'équation d'une surface Σ' s'obtiendra donc en faisant $\rho_2=k\rho_1$ dans l'expression générale des coor-

(1) On trouvera dans les ouvrages classiques des artifices donnant assez rapidement ce résultat. *Voir* aussi un article de M. F. Egan (*N. A.*, mars 1909).

données en fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3 et en particulier on a, pour la surface Σ, $\rho_1 + \rho_2 = 0$, d'où, en posant $\rho_3 = u$, $\rho_1^2 = v$,

$$x^2 = \frac{(a^2-u)(a^4-v)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2-u)(b^4-v)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2-u)(c^4-v)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Ces expressions paramétriques des points de la surfaces des ondes, qui sont antérieures au Mémoire de Mannheim, fournissent immédiatement les résultats des numéros précédents. Ces formules sont dues à W. Roberts et Massieu.

II.

9. Comme on l'a vu, l'étude des surfaces Σ et Σ' a conduit indirectement Mannheim à un résultat, qui découle immédiatement de la formule (3), et qu'on peut énoncer ainsi :

Si, par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique Q, *on mène des plans tangents à une quadrique homofocale* E, *le dièdre ainsi obtenu est de grandeur constante.*

Le plan tangent à Q, au point de contact de la tangente considéré, étant toujours bissecteur du dièdre des plans tangents, on peut donner à l'énoncé cette nouvelle forme :

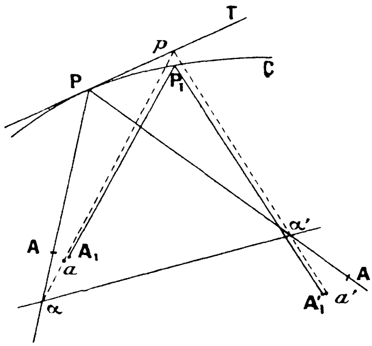
Si, par une tangente variable à une ligne de courbure d'une quadrique Q, *on mène des plans tangents à diverses quadriques homofocales à* Q, *le faisceau de plans ainsi obtenu est de grandeur constante.*

Cette proposition est presque immédiate; montrons en effet que :

Si les plans menés par une tangente variable PT *d'une courbe* C, *tangentiellement à deux surfaces* F *et* F′, *ont leurs points de contact* A *et* A′ *constamment contenus dans le plan normal en* P *à la courbe* C, *l'angle de ces deux plans est constant.*

En effet (*fig.* 2), soit P_1 un point de C voisin de P et soient A_1, A'_1 les points de contact des plans menés par la tangente en P_1. Prenons PP_1 pour infiniment

Fig. 2.



petit principal; à des infiniment petits d'ordre supérieur près on peut remplacer P_1 par un point p de la tangente PT, A_1 et A'_1 par des points a et a' des plans TPA, TPA′ et par suite remplacer l'angle $A_1P_1A'_1$ par apa'. Soient α et α' les points de rencontre de PA et pa, de PA′ et pa'. On passe de APA′ à apa' en coupant le dièdre (TPA, TPA′) par un plan tournant autour de $\alpha\alpha'$ et prenant successivement les deux positions APA′, apa'. L'angle de ces deux positions est un infiniment petit au moins du premier ordre, et comme l'angle de section du dièdre passe par un maximum ou un minimum pour la position APA$'$ du plan sécant, la différence entre les deux angles sections APA$'$, apa' est au moins du second ordre. Donc la différence entre APA$'$ et $A_1P_1A'_1$ est rigoureusement nulle.

La proposition est donc démontrée; or, on obtient le théorème de Mannheim en prenant pour C une ligne de courbure d'une quadrique Q et pour F et F$'$ deux surfaces homofocales à Q, distinctes ou non.

10. L'énoncé auxiliaire que nous venons de légitimer est bien plus immédiat encore si l'on fait appel au théorème de Joachimsthal sur les développées des courbes gauches. En effet, les deux plans TPA, TPA$'$ enveloppent, quand P varie, deux développables. Les génératrices de contact sont PA et PA$'$; donc ces droites, qui sont normales à C, enveloppent deux développées de C et par suite leur angle APA$'$ est constant.

Le raisonnement de géométrie infinitésimale fait au numéro précédent doit donc permettre aussi de démontrer le théorème de Joachimsthal.

En effet, soient C une courbe gauche, PA et PA$'$ deux normales à cette courbe au point P. Soit $\alpha\alpha'$ la droite caractéristique du plan normal APA$'$. Si PA fait partie d'une famille de normales ayant une enveloppe, α sera son point de contact et la normale voisine sera assimilable à $p\alpha$. De même pour PA$'$. Or, supposons que PA fasse partie d'une famille ayant une enveloppe, il en sera de même de PA$'$ si, et seulement si, la normale voisine de PA$'$ est assimilable à $p\alpha'$; donc si, et seulement si, l'angle APA$'$ reste constant quand P varie.

11. M. Bricard a montré que les deux énoncés

donnés au commencement du n° 9 restaient exacts si les plans tangents, au lieu d'être menés par une tangente d'une ligne de courbure d'une quadrique Q, étaient menés par une droite tangente à deux quadriques Q, Q′ d'une famille de quadriques homofocales. En particulier la droite peut donc rester tangente à une ligne géodésique d'une quadrique Q. D'ailleurs il suffit de légitimer l'énoncé de M. Bricard pour ce cas particulier, car on passe d'une tangente commune à Q et Q′ à une autre tangente commune à ces deux quadriques en déplaçant la première droite d'abord tangentiellement à une géodésique de Q, ce qui la laisse tangente à Q′, puis tangentiellement à une géodésique de Q′.

Nous nous proposerons donc seulement de démontrer que l'énoncé du début du n° 9 subsiste si l'on y remplace les mots « ligne de courbure » par « ligne géodésique ». Nous allons d'ailleurs légitimer à la fois ces deux énoncés.

Soit C une courbe tracée sur une quadrique Q, par les tangentes à cette courbe nous menons des plans tangents à une quadrique homofocale E. Soient P un point de C, PT sa tangente et $\mathcal{C}$ le cône circonscrit à E et de sommet P. Soit P_1 un point de C voisin de P, la tangente à C en P_1 peut être assimilée à sa parallèle Pt menée par P, à des infiniment petits négligeables près. Il suffit donc d'apercevoir des cas dans lesquels les plans tangents à $\mathcal{C}$ menés par PT et par Pt font des angles dont la différence est d'ordre supérieur en premier pour avoir les courbes C auxquelles s'applique l'énoncé du début du n° 9.

1° PT est un axe du cône $\mathcal{C}$. Si l'on fait varier une droite PX dans le plan PTt, l'angle des plans tangents à $\mathcal{C}$ menés par PX passe par un maximum ou un minimum quand PX vient en PT, par raison de symétrie. Donc cet angle ne varie que d'un infiniment petit d'ordre négligeable quand on passe de PT à Pt. L'énoncé de Mannheim est justifié.

2° Le plan PTt est normal au plan principal du cône $\mathcal{C}$ qui est tangent à Q. Si l'on prend une droite PX dans le plan PTt, l'angle des plans tangents à $\mathcal{C}$ passe encore par un maximum ou un minimum quand PX vient en PT, par raison de symétrie. L'énoncé de M. Bricard est justifié.

12. Le raisonnement qui conduisit M. Bricard à son théorème est tout à fait différent. En imitant ce raisonnement nous obtiendrons une nouvelle forme de l'énoncé à un certain égard plus générale.

Soit une famille de quadriques homofocales. Soient P_1, P'_1 ; P_2, P'_2 ; P_3, P'_3 *des plans menés respectivement par deux droites* D *et* D' *tangentiellement aux quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *de la famille. Si la figure* P_1, P_2, P_3 *est égale à la figure* P'_1, P'_2, P'_3, *le faisceau des plans tangents menés par* D *aux quadriques de la famille est égal au faisceau analogue formé par les plans issus de* D'. *Les droites* D *et* D' *sont tangentes aux deux mêmes quadriques du faisceau.*

Soient

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad P'_1 + \mu P'_2 = 0$$

les équations des plans menés par D et D'. On peut supposer que pour $\lambda = \mu$ les deux plans correspondants de ces deux faisceaux sont ceux qui viendraient en coïncidence si l'on transportait P_1 sur P'_1 et P_2 sur P'_2.

Soit

$$Q_1 + \rho Q_2 = 0$$

l'équation tangentielle des quadriques du faisceau considéré. La condition de tangence entre un plan $P_1 + \lambda P_2$ et une quadrique $Q_1 + \rho Q_2$ est évidemment du premier degré en ρ et du second en λ. Soit

$$A(\lambda)\rho + B(\lambda) = 0.$$

On obtient de même une condition de tangence de $P'_1 + \mu P'_2$ avec $Q_1 + \rho Q_2$, soit

$$C(\mu)\rho + D(\mu) = 0;$$

d'où la relation entre λ et μ

$$A(\lambda)\,D(\mu) - B(\lambda)\,C(\mu) = 0$$

qui est du second degré en λ et en μ.

Faisons-y $\lambda = \mu$. Nous avons une équation du quatrième degré au plus. Or, nous en connaissons cinq solutions ; les λ des plans P_1, P_2, P_3 et des deux plans isotropes passant par D, puisque l'ombilicale est une quadrique du faisceau. Donc la relation entre λ et μ est divisible par $\lambda - \mu$; elle s'écrit :

$$(\lambda - \mu)[a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d] = 0.$$

La présence du facteur $\lambda - \mu$ montre que deux plans correspondants des faisceaux D et D′ sont tangents à la même quadrique. Ceci suffit à légitimer la première partie de l'énoncé. Quant à la seconde : si D est tangente à Q, les deux plans tangents à Q issus de D sont confondus ; or, les plans tangents à Q issus de D′ correspondent à ceux-là, donc ils sont aussi confondus. D et D′ sont donc tangentes aux mêmes quadriques du faisceau.

La relation homographique entre λ et μ qu'on obtient en égalant à zéro le second facteur est donc la relation qui lie les paramètres des deux plans (issus de D ou de D', peu importe) tangents à une même quadrique; c'est une relation involutive. Mais, dans cette correspondance, les deux plans isotropes issus de D se correspondent, donc les plans doubles sont rectangulaires et l'on retrouve ainsi ce fait bien connu que les deux plans, passant par D et tangents aux deux quadriques homofocales tangentes à D, sont rectangulaires.

[I19c]

LE PRODUIT DE CINQ NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS N'EST PAS LE CARRÉ D'UN NOMBRE ENTIER;

Par M. T. HAYASHI (Sendaï, Japon).

J'ai démontré précédemment dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 150), que le produit de deux, trois ou quatre nombres entiers consécutifs n'est jamais un carré, ni un cube, ni une puissance quelconque. Reprenant et développant aujourd'hui le même sujet, je me propose de montrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs ne peut être non plus le carré d'un nombre entier, c'est-à-dire que la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$x(x^2-1)(x^2-4)=y^2$$

n'existe pas.

1. *Cas où x est un carré.* — Je vais démontrer que

l'équation

$$(x^2-1)(x^2+4)=z^2$$

ne peut avoir de solution entière.

Comme x^2-1, x^2-4 ne sont pas des carrés, nous pouvons poser

$$x^2-1=A^2r, \qquad x^2-4=B^2r',$$

r et r' ne contenant pas de facteurs carrés. Alors, pour que l'équation indéterminée puisse exister, il faut que l'on ait

$$r=r',$$

c'est-à-dire

$$x^2-1-A^2r \qquad \text{et} \qquad x^2-4=B^2r.$$

De là, par soustraction,

$$z=(A^2-B^2)r.$$

Donc

$$r=3 \qquad \text{et} \qquad A^2-B^2=1.$$

Mais cette dernière relation est impossible. Donc, dans le cas où x est un carré, l'équation indéterminée proposée est impossible aussi.

2. *Cas où x n'est pas un carré.* — Soit alors

(1) $$x=X^2\xi,$$

où ξ est considéré comme une quantité ne contenant pas de facteur carré; comme dans le cas précédent; on a

(2) $$x^2-1=A^2r$$

et

(3) $$x^2-4=B^2r',$$

attendu que r et r' ne peuvent être égaux.

x et $x^2 - 1$ sont des nombres premiers entre eux; et par suite ξ ou un de ses facteurs n'est pas facteur de $x^2 - 1$, mais il l'est de 4. Donc ξ n'est autre chose que 2.

En outre, r, ou l'un de ses facteurs, ne pouvant pas être facteur de x, est facteur de $x^2 - 4$, et par suite de $(x^2 - 1) - (x^2 - 4)$. Donc r ne peut être que 3. Par conséquent, si l'équation indéterminée proposée existait, r' serait 2×3.

Donc (1), (2) et (3) deviennent respectivement

$$x = 2X^2, \tag{4}$$

$$x^2 - 1 = 3A^2, \tag{5}$$

$$x^2 - 4 = 6B^2. \tag{6}$$

Cette dernière équation (6) indique que 3 est facteur de $x - 2$ ou $x + 2$.

3. Si 3 était facteur de $x - 2$, d'après (4), 2 étant aussi facteur de $x - 2$, (6) se décomposerait en deux équations

$$x - 2 = 6B_1^2, \qquad x + 2 = B_2^2;$$

ou bien

$$x - 2 = 6B_1^2 s, \qquad x + 2 = B_2^2 s,$$

s désignant un facteur non carré.

Or si l'on admet que

$$x + 2 = B_2^2,$$

d'après l'équation indéterminée proposée, comme le produit de quatre nombres entiers consécutifs

$$(x - 2)(x - 1)x(x + 1)$$

ne peut être un carré, l'équation proposée n'existe pas. s sera alors facteur de $(x + 2) - (x - 2)$; par suite sa valeur sera 2.

Dans ce cas on a

$$x - 2 = 12 B_1^2, \qquad x + 2 = 2 B_2^2.$$

Mais d'après (4) cette dernière équation devient

$$X^2 + 1 = B_2^2,$$

ce qui est impossible.

4. Si 3 était facteur de $x+2$, d'après (4), 2 étant aussi facteur de $x+2$, (6) serait décomposée comme suit en deux relations

$$x + 2 = 6 B_1^2, \qquad x - 2 = B_2^2;$$

ou bien

$$x + 2 = 6 B_1^2 s, \qquad x - 2 = B_2^2 s.$$

La première de ces équations, exprimant que le produit de quatre entiers consécutifs

$$(x-1)x(x+1)(x+2)$$

est un carré, ne peut pas exister; et la valeur de s est 2 comme dans le cas précédent. Donc on a

$$x + 2 = 12 B_1^2, \qquad x - 2 = 2 B_2^2.$$

Or cette dernière équation, d'après la relation (4), se transforme en

$$X^2 - 1 = B_2^2,$$

équation qui est impossible.

Donc l'équation indéterminée proposée est impossible aussi.

[K¹1,8]

ANALOGIES ENTRE LE TRIANGLE ET LE QUADRILATÈRE;

Par M. J. BOUCHARY.

Triangle.

1. Dans un triangle le centre O du cercle circonscrit, le centre de gravité G, le point de concours H des hauteurs sont en ligne droite et l'on a

$$2.\mathrm{OG} = \mathrm{GH}.$$

2. Les milieux des côtés d'un triangle quelconque forment un triangle semblable au premier, mais inversement placé. Rapport d'homothétie : $\frac{1}{2}$.

3. Le centre d'homothétie est le point G.

4. Si par les milieux A′B′C′ des côtés BC, CA, AB on mène des parallèles à BB′, CC′ et AA′ qui coupent GC, GA, GB en MNP, le triangle MNP est semblable au triangle ABC dans le rapport de 1 à 2.

5. L'aire de ce nouveau triangle est égale au quart de l'aire du premier triangle.

Quadrilatère.

1. Dans un quadrilatère le point d'intersection O des diagonales, le milieu m de la droite joignant les milieux des diagonales le centre de gravité G sont en ligne droite et

$$\mathrm{O}m = 3m\mathrm{G}.$$

2. Les centres de gravité des triangles qui deux à deux forment le quadrilatère donne un quadrilatère semblable au premier, inversement placé. Rapport d'homothétie : $\frac{1}{3}$.

3. Le centre d'homothétie est le point m.

4. Si l'on joint les points où les droites joignant les milieux de deux côtés adjacents coupent les diagonales du quadrilatère, on a un quadrilatère semblable au premier dans le rapport de 1 à 2.

5. L'aire de ce nouveau quadrilatère est égale au quart de de l'aire du premier quadrilatère.

6. Quand on projette les sommets A, B, C d'un triangle en a, b, c sur une droite Δ du plan, l'aire algébrique du triangle ABC est

$$\text{aire ABC} = \text{aire A}bc + \text{aire B}ca + \text{aire C}ab$$

6. Quand on projette les sommets A, B, C, D d'un quadrilatère en a, b, c, d sur une droite Δ du plan, on a

$$\text{aire A}bd + \text{aire B}ca + \text{aire C}db + \text{aire D}ac = \text{aire ABCD}.$$

7. Si l'on joint les milieux des côtés d'un triangle on a un nouveau triangle, si sur ce triangle on répète la même opération, on a un troisième triangle et ainsi de suite la limite de ces triangles et le centre de gravité G du triangle primitif.

7. Si l'on joint les centres de gravité des triangles qui deux à deux composent le quadrilatère on a un quadrilatère semblable au premier, si sur ce quadrilatère on répète la même opération et ainsi de suite, la limite de ces quadrilatères est le centre de gravite G du quadrilatère primitif.

8 Si par les milieux A'B'C' d'un triangle ABC on mène des parallèles aux côtés, on a un triangle A'B'C' dont le centre de gravité G coïncide avec celui du triangle ABC.

8. Si par les milieux E, F des diagonales AC et BD d'un quadrilatère ABCD on mène des parallèles EM' et FM' à BD et AC, le centre de gravité du quadrilatère coïncide avec le centre de gravité du triangle EM'F.

[M¹3g]

SUR LES FOYERS DES COURBES PLANES;

Par M. J. JUHEL-RÉNOY.

Théorème. — *Soient trois courbes* C, S, Σ *de classe* $2n$ *ayant les mêmes tangentes communes;* $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{2n}$ *les* $2n$ *foyers réels de la courbe* Σ :

il existe une courbe de classe $2n$ *homofocale à la courbe* C *et tangente à toutes les tangentes menées des points* $F_1, F_2, \ldots, F_{2n}$ *à la courbe* S.

En effet, soient

$$f(u, v) = 0, \qquad \varphi(u, v) = 0,$$
$$f(u, v) + K\varphi(u, v) \equiv K' F_1 F_2 \ldots F_{2n} - K''(u^2 + v^2)^n,$$

les équations des trois courbes C, S, Σ, le foyer F_i ayant pour équation

$$F_i = 0.$$

De l'équation de la courbe Σ, on tire

$$f(u, v) + K''(u^2 + v^2)^n = - K\varphi(u, v) + K' F_1 F_2 F_3 \ldots F_{2n}.$$

Or le premier membre représente une courbe de classe $2n$ homofocale à la courbe C; le second membre, une courbe de classe $2n$ tangente à toutes les tangentes menées des foyers $F_1, F_2, \ldots, F_{2n}$ à la courbe S.

La proposition est donc démontrée.

Son application aux coniques nous donne les deux théorèmes suivants :

Théorème. — *Soient trois coniques* C, S, Σ *inscrites dans un même quadrilatère,* F_1 *et* F_2 *les foyers réels de la conique* Σ; *il existe une conique homofocale à* C, *inscrite dans le quadrilatère des tangentes menées des points* F_1 *et* F_2 *à la conique* S.

Dans le cas où les deux foyers F_1 et F_2 se confondent, ce théorème devient :

Théorème. — *Soient deux coniques bitangentes* S *et* Σ; *le quadrilatère des tangentes communes à l'une des coniques* S *et à une conique* C *homofocale* *à l'autre conique* Σ *est circonscriptible à un cercle : le centre du cercle est le pôle par rapport à la conique* S *de la corde des contacts des deux coniques* S et Σ.

Ces deux théorèmes comprennent, comme cas particuliers, les beaux théorèmes de Chasles sur les coniques homofocales.

[O29]

SUR DEUX PROPOSITIONS DE RIBAUCOUR (QUESTIONS 858, 859);

PAR M. R. BOUVAIST.

Je démontrerai tout d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient deux points* M *et* (M′) *décrivant deux courbes* (M) *et* (M′) *de telle sorte que la droite* MM′ *touche en* T *une courbe* (T), *les tangentes à* (M) *et* (M′) *en* M *et* M′ *se coupent sur une courbe* (K) *en* K, *la tangente à* (K) *en* K *coupe* MM′ *en* S; *si* ρ_M *et* $\rho_{M'}$ *désignent les rayons de courbure en* M *et* M′ *à* (M) *et* (M′) *on a la relation*

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{MS.M'T}{M'S.MT}\,\frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3},$$

Soient N l'intersection des normales à (M) et (M′) en M et M′, μ et μ' les centres de courbure de ces courbes en M et M′, α et β les intersections de la normale en K à (K) avec NM, NM'. Posons

$$\widehat{NMM'} = \theta, \qquad \widehat{NM'M} = \theta', \qquad \widehat{MK\alpha} = \varphi, \qquad \widehat{M'K\beta} = \varphi',$$

nous aurons

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{MK}{M'K}\,\frac{TM}{TM'}, \qquad d(K) = K\alpha\,\frac{d(M)}{M\mu} = K\beta\,\frac{d(M')}{M'\mu'},$$

d'où

$$\frac{KM}{KM'}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{KM'}{KM}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}, \qquad \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M'K}^2}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'},$$

d'où, en remarquant que $\dfrac{MS}{\cos\varphi} = \dfrac{KS}{\cos\theta}$, $\dfrac{M'S}{\cos\varphi'} = \dfrac{KS}{\cos\theta'}$,

$$\frac{MS}{M'S} : \frac{MT}{M'T} = \frac{M'\mu'}{M\mu}\,\frac{\cos^3\theta'}{\cos^3\theta},$$

d'où enfin

$$\frac{\rho M'}{\rho M} = \frac{MS}{M'S}\,\frac{M'T}{MT}\,\frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3}.$$

Un cas particulièrement simple sera celui où le rapport $\dfrac{MS}{M'S} : \dfrac{MT}{M'T}$ sera harmonique; nous aurons alors

$$\frac{\rho_{M'}}{\rho_M} = \frac{\overline{KM'}^3}{\overline{KM}^3}.$$

En voici deux exemples géométriques :

1° Les courbes (M) et (M') sont une seule et même conique, la courbe (K) est une droite. On voit que :

Si les deux tangentes à une conique en M *et* M' *se coupent en* K, *le rapport des rayons de courbure à cette courbe en* M *et* M' *est égal au cube du rapport* $\dfrac{KM}{KM'}$.

2° Les courbes (M) et (M') sont une seule et même cubique, le point T est un point d'inflexion de cette courbe, le point K décrit alors la polaire harmonique (K) de T; d'où la proposition suivante :

Une sécante issue d'un point d'inflexion T *d'une cubique coupe la courbe en* M *et* M', *les tangentes à la courbe en* M *et* M' *se coupent en* K, *le rapport des rayons de courbure de la cubique en* M *et* M' *est égal au cube du rapport* $\frac{KM}{KM'}$.

Ceci posé, les deux propositions de Ribaucour que je considère sont les suivantes :

Question proposée 858 (1868, p. 190; réimprimée 1917, p. 157).

D'un point M *dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes* MA *et* MB, *puis par* M, *on mène une droite* MC.

Aux points A *et* B *on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à* MC.

Démontrer : 1° *que ces coniques touchent* MC *au même point* C; 2° *que si l'on fait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de* MC *du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en* C *quatre points communs confondus.*

Question proposée 859 (1868, p. 190; réimprimée 1917, p. 157) :

Démontrer la même proposition pour les courbes *du troisième degré, lorsque* M *est sur la polaire d'un point d'inflexion.*

I. *Question* 858. — Soit μ le point où MC coupe AB, soient (E) la conique donnée, (A) et (B) les faisceaux formés par les coniques qui surosculent (E) en A et B, μ conjugué de M par rapport à (E) est le second point double de l'involution déterminée sur MC par les coniques (A) et (B); il existe donc deux coniques (A_1) et (B_1) se touchant en μ. Une des propositions données plus haut montre qu'elles ont même rayon de courbure en μ.

Soit μ' le conjugué harmonique de μ par rapport à A et B. La sécante commune à (A_1) et (B_1) qui correspond à MC passe par μ', si l'on fait correspondre aux points communs à (A_1) et (B_1) situés sur cette droite les points cycliques, (A_1) et (B_1) se transforment en deux cercles égaux tangents extérieurement, car μ' est évidemment un centre de similitude de (A_1) et (B_1). Il en résulte que si ω_1 et ω_2 sont les centres de (A_1) et (B_1), $\mu\omega_1$ et $\mu\omega_2$ sont conjugués harmoniques par rapport à μA et μM. Prenons la symétrique (B'_1) de (B_1) par rapport à Mμ parallèlement à AB, (B'_1) aura son centre sur $\mu\omega_1$, axe d'aberration de courbure de (A_1) en μ; comme elle a en ce point même rayon de courbure que (A), elle lui est surosculatrice en μ.

Question 859. — Cette proposition n'est vraie que dans un cas particulier. Soit I le point considéré; si $IAB \equiv x = 0$, $MA \equiv z = 0$, $MB \equiv y = 0$, MA et MB étant les tangentes à la cubique en A et B, l'équation générale de celle-ci sera

$$yz[\alpha x + \beta y + \gamma z] + Bx^2(Ax + \beta y + \gamma z) = 0,$$

$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ étant la tangente d'inflexion.

Le faisceau (A) sera

$$Bx^2 + \mu z^2 + \frac{2(\alpha - A)}{\beta} xz + 2yz = 0.$$

Le faisceau (B) sera

$$Bx^2 + \mu_1 y^2 + \frac{2(\alpha - A)}{\gamma} xy + 2yz = 0.$$

Les polaires de M par rapport à (A) et (B) se coupent en un point μ fixe de la polaire harmonique ($\beta y - \gamma z = 0$ de I par rapport à la cubique) ; ce point μ n'est pas sur AB, sauf dans le cas où $A - \alpha = 0$, cas auquel la cubique se décompose.

Les coniques

$$(A_1) \equiv | B\beta x + (\alpha - A)z|^2 + 2B\beta[\beta y - \gamma z]z = 0,$$
$$(B_1) \equiv | B\gamma x + (\alpha - A)y|^2 + 2B\gamma[\gamma z - \beta y]y = 0$$

touchent $M\mu$ en μ; les propositions démontrées plus haut montrent, du reste, qu'elles ont même rayon de courbure en μ.

La sécante commune à (A_1) et (B_1) qui correspond à la tangente $M\mu$ a pour équation

$$2B\beta\gamma(\alpha - A)x + |(\alpha - A)^2 - 2B\beta\gamma| \, |\beta y + \gamma z| = 0;$$

elle passe par I, qui est du reste un centre de similitude de (A_1) et (B_1); un raisonnement identique à celui que nous avons fait plus haut montre, dès lors, que (A_1) et la conique (B'_1) obtenue en prenant la symétrique de (B_1) par rapport à $M\mu$ parallèlement à $I\mu$, sont surosculatrices en μ.

La proposition de Ribaucour est donc inexacte et, rectifiée, doit s'énoncer comme il suit :

Si par un point d'inflexion I *d'une cubique* Γ, *on mène une sécante coupant la courbe en* A *et* B, *il* *existe une conique* (A) *surosculatrice à* Γ *en* A *et une conique* (B) *surosculatrice à* Γ *en* B, *qui touchent la polaire harmonique* Δ *de* I *par rapport à* Γ *au même point* μ, *si* (B') *désigne la conique obtenue en prenant la symétrique de* (B) *par rapport à* Δ, *parallèlement à* Iμ, (B') *et* (A) *sont surosculatrices en* μ.

[$M^2 1$]

SUR L'ORDRE DE SURFACES ENGENDRÉES PAR COURBES D'UN ORDRE DONNÉ;

PAR M. C.-H. SISAM.

On sait que si chaque génératrice rectiligne g sur une surface réglée coupe toutes les autres génératrices en un point variant avec g, la surface est un plan. Des théorèmes analogues pour des surfaces engendrées par des coniques se coupant en un ou plusieurs points ont été démontrés par M. Kœnigs dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (3^e série, t. V, p. 177-192) et pour des surfaces engendrées par des cubiques par M. Humbert dans le *Journal de Mathématiques* (4^e série, t. X, p. 169-201). Les résultats obtenus constituent tous des cas spéciaux du théorème suivant :

Si une surface d'ordre m *est engendrée par des courbes irréductibles d'ordre* n *de telle façon que deux courbes génératrices arbitraires se coupent en* ν *points variables, nous aurons* $m\nu \leqq n^2$.

Une surface d'ordre $x\nu > m$ contient une courbe donnée du système générateur sur la surface donnée si elle contient $x\nu n+1$ points sur la courbe, c'est-à-dire si les coefficients dans son équation satisfont, au maximum, à $x\nu n+1$ équations linéaires indépendantes. Elle contient une deuxième courbe donnée, si ils satisfont, au maximum, à $x\nu n+1-\nu$ autres équations indépendantes. Continuant de cette façon, nous trouvons que la surface d'ordre $x\nu$ possède $x\nu n+1$ points communs avec toute autre courbe du système générateur et, par conséquent, a la surface donnée comme composante si les coefficients dans son équation satisfont, au plus, à

$$(1)\qquad x\nu n+1+x\nu n+1-\nu+x\nu n+1-2\nu+\ldots+1 = \frac{(xn+1)(x\nu n+2)}{2}$$

conditions linéaires indépendantes.

Mais le nombre réel de conditions auxquelles les coefficients doivent satisfaire pour que la surface d'ordre $x\nu$ ait la surface donnée comme composante est

$$(2)\quad \mathrm{N}(x\nu)+1-\mathrm{N}(x\nu-m)-1=\frac{(x\nu+1)(x\nu+2)(x\nu+3)}{6} - \frac{(x\nu-m+1)(x\nu-m+2)(x\nu-m+3)}{6} = \frac{3mx^2\nu^2+3(4m-m^2)x\nu+11m-6m^2+m^3}{6},$$

puisque toute surface d'ordre $x\nu-m$, avec la surface donnée, constitue une telle surface d'ordre $x\nu$. Puisque (1) donne une limite supérieure pour (2), nous avons, pour toutes les valeurs de x plus grandes que $\frac{m}{\nu}$,

$$\frac{(xn+1)(xn\nu+2)}{2} \geqq \frac{3m\nu^2x^2+3(4m-m^2)\nu x+11m-6m^3+m^3}{6}$$

ou

$$3(n^2 - m\nu)\nu x^2 + 3(2n + n\nu + m^2\nu - 4m\nu)x \\ - (m-1)(m-2)(m-3) \geqq 0.$$

Le coefficient de x^2 ne peut être négatif. Sinon, en prenant x suffisamment grand, nous pourrions rendre le premier membre de cette inégalité négatif. D'où $m\nu \leqq n$.

En particulier, si $m > n^2$, il viendra $\nu = 0$, c'est-à-dire :

Sur une surface d'ordre plus grand que n^2, un système algébrique, ∞^1, de courbes d'ordre n, constitue un faisceau.

CORRESPONDANCE.

M. **d'Ocagne**. — *Sur le lieu du milieu du rayon de courbure.* — Le théorème donné dans le n° **2** d'une note récente de M. Ch. Michel (*N. A.*, 1917, p. 366) n'est qu'un cas particulier de ce théorème bien connu, de Mannheim : *Si les normales aux lieux décrits par les points* M *et* I *rencontrent en* M_1 *et* I_1 *la normale à l'enveloppe de la droite* MI, *la normale au lieu décrit par le milieu* P *de* MI *passe au milieu* P_1 *de* M_1I_1.

Si le point I est le centre de courbure de la courbe (M), le point M_1 se confond avec I, et le point I_1 est le centre de courbure de (I). On voit ainsi que la normale au lieu de P passe par le milieu P_1 de II_1, et, comme la droite PP_1 est alors parallèle à MI_1 que *la tangente au lieu de* P *est perpendiculaire à la droite joignant* *le point* M *au centre de courbure correspondant* I, *de la développée*. C'est là le théorème qu'à retrouver M. Ch. Michel.

CORRESPONDANCE.

M. **d'Ocagne**. — *Sur le centre de courbure des conchoïdes*. — Le théorème général d'où M. Goormaghtigh fait remarquer (*N. A.*, 1917, p. 434) que l'on peut déduire la construction du centre de courbure de la conchoïde de Nicomède, qui fait l'objet de la question **2254**, est précisément celui d'où je l'ai tirée. Ce théorème général se trouve démontré à la page 286 de mon *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* (Gauthier-Villars; 1896).

M. **V. Thébault**. — *Au sujet de la question* **2324**. — Cette propriété n'est qu'une forme particulière de la suivante, très répandue dans les recueils élémentaires :

Si, dans un triangle ABC, *l'angle* A *est égal à* 120°, *l'inverse de la bissectrice intérieure relative à cet angle est égal à la somme des inverses des côtés qui le comprennent.*

Voir par exemple le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1901 p. 77.

M. **V. Thébault**. — *Sur une proposition de Laguerre*. — Voici une autre démonstration, pour le *cas du triangle*, de la proposition de Laguerre envisagée par M. R. Bouvaist, (*N. A.* 1917, p. 315).

1. Soient une conique et un cercle représentés par les équations

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S' \equiv (x-\alpha)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0.$$

Leurs invariants sont

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}, \qquad \theta = \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - R^2),$$

$$\theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - R^2\left(\frac{a^2}{1} + \frac{1}{b^2}\right), \qquad \Delta' = -R^2.$$

La condition pour qu'il soit possible de circonscrire à la conique un triangle ABC qui soit en même temps inscrit dans le cercle, s'écrit

$$(1) \qquad \theta^2 = 4\Delta\theta'.$$

2. Soient F et F' les deux foyers de la conique S, F'' l'inverse de F par rapport au cercle S' et O le centre de ce cercle; désignons par u et v les longueurs OF et OF', on a

$$u^2 = (\alpha - c)^2 + \beta^2, \qquad v^2 = (\alpha + c)^2 + \beta^2,$$

d'où

$$\frac{u^2 + v^2}{2} = \alpha^2 + \beta^2 + c^2, \qquad u^2v^2 = \frac{(u^2+v^2)^2}{4} - 4\alpha^2c^2;$$

et

$$\alpha^2 = \frac{(u^2-v^2)^2}{4c^2}, \qquad \beta^2 = \frac{-(u^2-v^2)^2 - 2c^2(u^2+v^2) + 4c^4}{4c^2}.$$

En substituant ces dernières valeurs dans l'égalité (1) on obtient la relation de Laguerre

$$(2) \qquad (R^2 - u^2)(R^2 - v^2) = 4b^2R^2.$$

3. Cette relation (2) peut être transformée et donner

---

(1) Cf. *Nouvelles Annales*, 1903, 214.

d'abord

$$\frac{\overline{\mathrm{F'F''}}^2 \times \mathrm{OF}}{\mathrm{OF''}} = 4a^2 \qquad (\text{Laguerre}),$$

puis

$$\mathrm{F'R} \times \mathrm{F'F''} = 4a^2 \qquad (\text{Laguerre}).$$

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES

2145 (**1910**, 95). — Si l'on pose [1]

$$x = \frac{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{-5} + d\sqrt{2}\sqrt{-5}}{\sqrt{2}},$$

a, b, c, d étant entiers, a et c étant de même parité :

1° Les nombres x sont des entiers algébriques;

2° La somme ou le produit de deux nombres n est un nombre x;

3° La norme du nombre x (c'est-à-dire le produit de ce nombre par ceux qu'on obtient en changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$, ou $\sqrt{-5}$ en $-\sqrt{-5}$, ou en faisant ces deux changements à la fois, est

$$\mathrm{X} = \left(\frac{a^2 - 2b^2 + 5c^2 - 10d^2}{2}\right)^2 + 10(ad - bc)^2;$$

4° La norme du produit de deux facteurs est égale au produit des normes de ces facteurs;

5° Étant donnés deux nombres de la forme indiquée, peut-on trouver un nombre de même forme $\frac{m + n\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}$ appelé *quotient*, et un autre nombre de même forme $\frac{r + s\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}$ appelé *reste*, tels qu'on ait

$$\frac{a + b\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} = \frac{e + f\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}\,\frac{m + n\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} + \frac{r + s\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}},$$

tels, de plus, que la norme du reste soit inférieure à celle du diviseur? G. FONTENÉ.

2151 (**1910**, 239). — Établir directement (pour $n \neq 1$) l'égalité

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & \dots & \dots \\ \dots\dots & \dots & . & . & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & . & . & \dots & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix} = 0.$$

relative à la formule de sommation d'Euler-Maclaurin.

G. FONTENÉ.

2156 (**1910**, 335). — On considère la suite des polynomes en x

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \dots, \quad P_n, \quad \dots$$

tels que

$$\begin{aligned} nP_n = (3n-2)P_{n-1} - (3n-4+x^2)P_{n-2} \\ +(1-x^3)(n-2)P_{n-3} \end{aligned}$$

avec

$$P_0 = P_1 = 1,$$
$$P_2 = 1 - \frac{x^2}{2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

1° Montrer que l'on a

$$P_n = a_0 + C_n^1 a_1 x + C_n^2 a_2 x^2 + \dots + C_n^p a_p x^p + \dots + C_n^n a_n x^n,$$

C_n^p étant le nombre des combinaisons de n lettres p à p et a_p étant fonction de p seul indépendant de x et n;

2° Montrer qu'il y a une relation linéaire entre a_p, a_{p-1}, a_{p-2} vérifiée quel que soit p. En conclure la valeur de a_p en fonction de p. R. GILBERT.

2161 (**1910**, 336). — Une pyramide régulière, de sommet S, a pour base un rectangle ABCD. On considère le paraboloïde de révolution de sommet S qui passe par le cercle circonscrit au rectangle ABCD et le parallélépipède indéfini dont ce rectangle est la section droite. Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci. M. D'OCAGNE.

Nous terminons ici la réimpression des *Anciennes questions* (1842-1910) non résolues. On trouvera plus loin (p. 43) les Nos des questions restées sans solution au 31 Décembre 1917.

(N. d. l. R.)

QUESTIONS.

2350. Si l'on désigne par F_i^p le $i^{\text{ième}}$ nombre figuré d'ordre p

$$F_i^p = \frac{i(i+1)\ldots(1+p-1)}{p!}, \qquad F_i^0 = 1,$$

la somme

$$F_1^p + F_2^p x + F_3^p x^2 + \ldots + F_n^p x^{n-1}$$

a pour expression

$$\frac{1 + Ax^n + Bx^{n+1} + \ldots + Hx^{n+p}}{(1-x)^{p+1}},$$

les coefficients A, B, ... étant tels que le numérateur soit divisible par le dénominateur. Le numérateur est de la forme

$$1 - N\left[\frac{x^n}{n} - C_p^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_p^2 \frac{x^{n+2}}{n+2} - \ldots + (-1)^p C_p^p \frac{x^{n+p}}{n+p}\right],$$

et l'on aura

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p!}.$$

La série entière

$$F_1^p + F_2^p x + F_3^p x^2 + \ldots + F_n^p x^{n-1} + \ldots$$

est convergente pour $|x| < 1$, et a alors pour somme

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$

G. FONTENÉ.

2351. Considérant le réseau formé dans l'espace à trois dimensions par les points à coordonnées entières dans un système d'axes rectangulaires, on demande de déterminer les triangles isoscèles ayant comme sommets trois points du réseau. E. CAHEN.

2352 Soit ABA'B' une section principale d'un ellipsoïde dont les axes sont AA', BB', CC'. Par le sommet C, on mène la parallèle CD à l'un des axes AA' de cette section; par le sommet C', une parallèle C'D' à l'autre axe BB'. Si une droite Δ se déplace en rencontrant constamment l'ellipse ABA'B' et les droites CD et C'D', le volume enfermé dans la portion de surface qu'engendre le segment de Δ compris entre les droites CD et C'D' est égal au volume de l'ellipsoïde.

M. D'OCAGNE.

2353. Construire deux cercles de même rayon, tangents entre eux, et touchant chacun une droite donnée en un point donné, en ayant soin d'examiner quel est le nombre des solutions réelles. M. D'OCAGNE.

2354. Quand une droite se déplace dans un plan, les centres de courbure des éléments décrits simultanément par des points marqués sur cette droite appartiennent, d'après un théorème connu, à une conique; démontrer que le lieu des deuxièmes centres de courbure correspondants est une sextique. R. GOORMAGHTIGH.

2355. — On considère une tige guidée BB', glissant le long de $O'x$, dont l'extrémité B est reliée au bouton A d'une manivelle OA tournant autour de O, non situé sur $O'x$, avec une vitesse angulaire constante. Soit δ la distance de O à $O'x$ et posons

$$OA = a, \qquad AB = l, \qquad ABO' = \varphi, \qquad l > a + \delta.$$

Démontrer que les valeurs des angles φ, correspondant aux positions du point B pour lesquelles la vitesse de ce point est maximum, sont données par l'équation

$$\begin{aligned} & l^2(l^2-a^2)\sin^6\varphi - 4l^3\delta\sin^5\varphi - l^2(l^2-a^2-5\delta^2)\sin^4\varphi \\ & \quad + 2l\delta(3l^2+a^2-\delta^2)\sin^3\varphi - l^2(l^2-a^2+10\delta^2)\sin^2\varphi \\ & \quad + 2l\delta(l^2-3a^2+3\delta^2)\sin\varphi \\ & = (l^2-a^2+\delta^2)(\delta^2-a^2). \end{aligned}$$

R. Goormaghtigh.

2356. Trouver une suite indéfinie de nombres entiers x_1, x_2, ..., x_n, ..., telles que tous les produits

$$x_1, \quad x_1 x_2, \quad \ldots, \quad x_1 x_2 \ldots x_n, \quad \ldots$$

soient des carrés augmentés de l'unité.

Il existe une infinité de telles suites. En effet $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, étant supposés connus, on peut trouver une infinité de valeurs satisfaisantes de x_n. L'intérêt de la question est de former la plus simple de ces suites, c'est-à-dire celle pour laquelle la valeur satisfaisante dont il s'agit est minimum, quel que soit n.

P. Carissan.

2357. Un tétraèdre inscrit à un ellipsoïde de révolution a pour centre de gravité le centre de celui-ci. On joint les sommets du tétraèdre à l'un quelconque des foyers de l'ellipsoïde, chacune des droites obtenues étant limitée au sommet dont elle est issue et à la face opposée. Démontrer que les quatre segments ainsi déterminés ont même longueur.

R. Bricard.

2358. Si ABCD est un quadrilatère plan fixe, A'B'C'D' un autre quadrilatère plan, mobile dans l'espace, mais invariable de forme, il existe une infinité de positions de ce second quadrilatère pour lesquelles il est perspectif du premier, c'est-à-dire telles que les droites AA', BB', CC', DD' concourent en un même point S. Démontrer que le lieu de ce point S est un cercle.

Béjot.

N^{os} des Anciennes questions des Nouvelles Annales (de 1842 à 1910, N^{os} 1 à 2166) restées sans solution au 31 décembre 1917.

62	126	266	333	383	424	554	592
593	598	604	617	643	703	730	731
732	774	791	805	812	880	888	891
893	947	967	999	1000	1042	1058	1063
1074	1078	1107	1108	1149	1206	1234	1236
1256	1305	1361	1365	1366	1446	1486	1490
1519	1522	1523	1530	1564	1571	1596	1599
1600	1609	1629	1631	1647	1686	1687	1688
1689	1690	1691	1692	1693	1694	1695	1705
1715	1731	1738	1747	1761	1762	1763	1776
1777	1810	1821	1824	1826	1828	1837	1838
1847	1850	1854	1856 *bis*	1859	1884	1885	1886
1889	1890	1892	1911	1937	1944	1956	1988
2003	2010	2038	2039	2045	2057	2065	2096
2116	2141	2145	2156				

La comparaison avec le Tableau publié précédemment (1915, p. 246) montre qu'un nombre notable de questions ont été récemment résolues, grâce aux efforts de nos lecteurs.

Nous les en remercions, et nous comptons sur leur persévérance.

On voit que 116 questions seulement restent sans solutions.

[$L^1 11a$]

GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE; EXERCICE PROPOSÉ;

PAR M. P. APPELL.

Problème. — Soient quatre points pris sur une hyperbole équilatère A_1, B_1, C_1, D_1; les hauteurs du triangle $B_1\,C_1\,D_1$ se coupent en un point A_2 situé sur l'hyperbole, de même les hauteurs de $C_1\,D_1\,A_1$ se coupent en un point B_2 de la courbe, etc. On déduit ainsi des quatre points A_1, B_1, C_1, D_1, quatre nouveaux points A_2, B_2, C_2, D_2; de même de ces quatre points on en déduira quatre autres A_3, B_3, C_3, D_3, ... et ainsi de suite. Étudier la suite de ces groupes de points : est-il possible que le groupe A_n, B_n, C_n, D_n coïncide en tout ou en partie avec A_1, B_1, C_1, D_1.

Indications sur la solution. — L'étude générale des groupes de points sur une courbe algébrique se rattache au théorème d'Abel. Le problème actuel se traite d'une façon élémentaire, à l'aide de la fonction exponentielle.

Soit $xy = 1$ l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes; chaque point est défini par son abscisse. Si les sommets d'un triangle ont pour abscisses x', x'', x''', le point de concours des hauteurs a une abscisse x donnée par

$$xx'x''x''' = -1.$$

Posons pour un point de la courbe

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}.$$

Les quatre premiers points A_1, B_1, C_1, D_1 correspondent à des valeurs de t : α_1, β_1, γ_1, δ_1. On a ensuite, en appelant α_n, β_n, γ_n, δ_n les valeurs de t correspondant à A_n, B_n, C_n, D_n,

$$\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \equiv \pi i,$$
$$\beta_2 + \gamma_1 + \delta_1 + \alpha_1 \equiv \pi i,$$
$$\gamma_2 + \delta_1 + \alpha_1 + \beta_1 \equiv \pi i,$$
$$\delta_2 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \equiv \pi i$$

et en général

$$\alpha_{p+1} + \beta_p + \gamma_p + \delta_p \equiv \pi i,$$
$$\beta_{p+1} + \gamma_p + \delta_p + \alpha_p \equiv \pi i,$$
$$\gamma_{p+1} + \delta_p + \alpha_p + \beta_p \equiv \pi i,$$
$$\delta_{p+1} + \alpha_p + \beta_p + \gamma_p \equiv \pi i,$$

le signe $\equiv$ indiquant une égalité à des multiples de $2\pi i$ près. Si l'on pose

$$S_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n,$$

on a

$$S_{p+1} + 3S_p \equiv 0,$$

formule qui permet de calculer S_n. On a ensuite

$$\alpha_{p+1} - \alpha_p + S_p \equiv \pi i,$$
$$\beta_{p+1} - \beta_p + S_p \equiv \pi i,$$
$$\gamma_{p+1} - \gamma_p + S_p \equiv \pi i,$$
$$\delta_{p+1} - \delta_p + S_p \equiv \pi i.$$

[I19a]

AU SUJET D'UN ARTICLE DE M. A. GÉRARDIN ;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916, p. 62-74) ont publié un intéressant article sur les *Distances, en nombres entiers, de trois points et de leur centre isogone à* 120° de M. A. GÉRARDIN (Nancy). Il s'agit de la résolution en nombres entiers et positifs des trois équations simultanées :

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+xy+y^2=\square, \\ y^2+yz+z^2=\square, \\ z^2+zx+x^2=\square. \end{cases}$$

Le symbole $\square$ que j'utilise signifie *carré parfait*, selon la notation habituelle des anciens géomètres.

Je crois utile de signaler ici, et très rapidement d'ailleurs, quelques remarques fondamentales sur le système précédent d'équations indéterminées et sur un système beaucoup plus général. Il est manifeste que, sans restriction de généralité, il est possible de remplacer l'hypothèse que les nombres x, y, z sont des entiers par celle de la rationalité de ces nombres. Plus généralement encore, je supposerai qu'on ne fait aucune hypothèse sur les signes de x, y et z.

Dans ces conditions, je considérerai un système de trois équations simultanées quadratiques et homogènes de la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \square, \\ Dy^2 + Eyz + Fz^2 = \square, \\ Gz^2 + Hzx + Ix^2 = \square, \end{cases}$$

où les neuf coefficients A, B, ..., H et I sont des nombres rationnels algébriques quelconques. Chacune des trois équations constitutives d'un tel système n'est autre qu'une équation de Brahmagupta-Fermat,

$$A + Bt + Ct^2 = \square,$$

mise sous forme homogène. Relativement à ce système (2) j'établirai tout d'abord la proposition suivante :

Lorsque chacune des trois équations de Brahmagupta-Fermat constitutives du système (2) *est résoluble* (abstraction faite des deux autres équations), *l'étude du système* (2) *est équivalente à celle, dépendant des fonctions elliptiques, des arithmopoints d'une surface du sixième degré de l'espace ordinaire.*

Je suppose, en effet, que chacune des équations (2) est résoluble ; il en résulte que chacune de ces trois équations admet une infinité de solutions ; si, pour fixer les idées, l'équation de Brahmagupta-Fermat

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \square$$

admet la solution particulière $(x = x_0, y = y_0)$, sa solution générale en nombres rationnels algébriques est susceptible d'être représentée par l'arithmopoint courant de l'arithmoconique d'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2.$$

Les coordonnées de cet arithmopoint courant s'obtiennent alors comme intersection de cette arithmoconique avec une arithmodroite arbitraire pivotant autour de l'arithmopoint connu *a priori*. Soit

$$y - y_0 = Z(x - x_0)$$

l'équation de cette arithmodroite, Z étant un nombre rationnel algébrique. L'arithmopoint d'intersection autre que le pivot ($x = x_0$, $y = y_0$) a donc pour coordonnées

$$x = \frac{Cx_0Z^2 - 2Cy_0Z - (Ax_0 + By_0)}{CZ^2 + BZ + A},$$

$$y = \frac{-(Bx_0 + Cy_0)Z^2 - 2Ax_0Z + Ay_0}{CZ^2 + BZ + A},$$

de sorte que le rapport $\frac{y}{x}$ qui seul nous intéresse ici a pour expression en fonction de Z :

$$(3) \qquad \frac{y}{x} = \frac{(Bx_0 + Cy_0)Z^2 + 2Ax_0Z - Ay_0}{-Cx_0Z^2 + 2Cy_0Z + Ax_0 + By_0}.$$

A chaque arithmopoint ou solution de l'équation de Brahmagupta-Fermat considérée correspond une valeur du paramètre $Z = \frac{y - y_0}{x - x_0}$; réciproquement, à toute valeur rationnelle de Z correspond ainsi une solution (à un facteur près d'homogénéité) de l'équation de Brahmagupta-Fermat.

Cette remarque faite, si le système (2) est constitué de trois équations de Brahmagupta-Fermat séparément résolubles, la méthode précédente donnera des expressions rationnelles de $\frac{z}{y}$ et de $\frac{x}{z}$ analogues à l'expression (3) : le rapport $\frac{z}{y}$ s'exprimera au moyen d'un paramètre $X = \frac{z - z_1}{y - y_1}$ et le rapport $\frac{x}{z}$ au moyen d'un paramètre $Y = \dfrac{x - x_2}{y - y_2}$ par les formules

$$(3\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{z}{y} &= \frac{(Ey_1 + Fz_1)X^2 + 2Dy_1X - Dz_1}{-Fy_1X^2 + 2Fz_1X + Dy_1 + Ez_1},\\ \frac{x}{z} &= \frac{(Hz_2 + Ix_2)Y^2 + 2Gz_2Y - Gx_2}{-Iz_2Y^2 + 2Ix_2Y + Gz_2 + Hx_2};\end{aligned}\right.$$

(y_1, z_1) est une solution de la seconde équation du système (2); (z_2, x_2) est de même solution particulière de la troisième équation. Il n'est pas nécessaire de supposer qu'il existe des relations spéciales entre x_0, y_0, y_1, z_1, z_2 et x_2.

Il résulte maintenant de tout ce qui précède que l'on peut établir une correspondance entre une solution quelconque (x, y, z) du système (2) et un groupe de valeurs des trois paramètres X, Y, Z, sous la seule condition que le produit des trois rapports $\dfrac{y}{z}$, $\dfrac{z}{y}$ et $\dfrac{x}{z}$ soit égal à l'unité. Cette condition étant vérifiée, la connaissance de X, Y, Z entraîne celle d'une solution du système (2) à un facteur d'homogénéité près. La proposition énoncée plus haut est donc établie et l'équation de la surface du sixième degré dont l'étude arithmogéométrique est équivalente à l'étude du système des trois équations de Brahmagupta-Fermat est finalement, dans un espace rapporté à trois axes OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned} &[(Bx_0 + Cy_0)Z^2 + 2Ax_0Z - Ay_0]\\ &\times[(Ey_1 + Fz_1)X^2 + 2Dy_1X - Dz_1]\\ &\times[(Hz_2 + Ix_2)Y^2 + 2Gz_2Y - Gx_2]\\ = \quad &[-Cx_0Z^2 + 2Cy_0Z + Ax_0 + By_0]\\ &\times[-Fy_1X^2 + 2Fz_1X + Dy_1 + Ez_1]\\ &\times[-Iz_2Y^2 + 2Ix_2Y + Gz_2 + Hx_2]. \end{aligned}$$

Cette surface du sixième degré est d'une nature bien spéciale, ce qui simplifie heureusement l'étude arithmogéométrique. Les lignes de niveau (l'un quelconque des plans coordonnés étant pris pour plan horizontal) sont des quartiques planes très particulières. Une telle quartique a, en effet, une équation de la forme

$$\alpha X^2 Y^2 + XY(\beta X + \gamma Y) + \varphi_2(X, Y) = 0,$$

$\varphi_2(X, Y)$ étant un polynome quadratique en X et Y. Il est manifeste que cette quartique plane n'est autre que la projection de la biquadratique gauche d'équations

$$XY = Z,$$
$$\alpha Z^2 + Z(\beta X + \gamma Y) + \varphi_2(X, Y) = 0.$$

De cette nouvelle remarque importante il résulte qu'*on se trouve en présence d'une question intimement liée à l'étude arithmogéométrique d'une biquadratique gauche*. Je n'insisterai pas sur cette belle question que j'ai longuement étudiée, sous le point de vue arithmogéométrique, dans les *Notions d'Arithmogéométrie* en cours de publication dans l'*Enseignement mathématique* (1).

Ainsi donc, dans sa plus grande généralité, le problème étudié par M. A. Gérardin « problème que l'on peut classer parmi les questions ardues d'analyse indéterminée en entiers positifs... » se rattache intimement aux applications géométriques des fonctions elliptiques. Les équations (1) sont manifestement, en effet, des équations individuellement résolubles. L'équation

$$x^2 + xy + y^2 = a^2$$

(1) Cf. *Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise* (*L'Enseignement Mathématique*, t. XVII, 1915, p. 315-324); *Notions d'Arithmogéométrie* (*Ibid.*, t. XVIII, 1916, p. 81-110 à p. 397-428 et à suivre).

admet la solution banale $x=0$, $y=a$; d'où, en posant

$$y = a + Zx,$$

se déduit la solution générale :

$$x = -a\frac{2Z+1}{Z^2+Z+1},$$

$$y = a\frac{1-Z^2}{Z^2+Z+1}.$$

L'équation de la surface du sixième degré associée s'obtient immédiatement par multiplication membre à membre des équations

$$(Z^2-1)x = (2Z+1)y,$$
$$(X^2-1)y = (2X+1)z,$$
$$(Y^2-1)z = (2Y+1)x;$$

on est ainsi conduit à l'équation relativement simple

$$(X^2-1)(Y^2-1)(Z^2-1) = (2X+1)(2Y+1)(2Z+1).$$

La biquadratique associée a donc pour équations

$$XY = \zeta,$$
$$(\zeta^2 - X^2 - Y^2+1)(h^2-1) = (2h+1)[4\zeta+2(X+Y)+1];$$

h est un paramètre rationnel quelconque; X, Y, Z sont les coordonnées cartésiennes dans le système d'axes auxquels est supposé rapporté l'espace qui contient cette biquadratique gauche.

Il n'est peut-être point sans intérêt de rappeler ici un autre remarquable cas particulier des équations du type (2). C'est celui du système des trois équations indéterminées

$$x^2+y^2 = \square,$$
$$y^2+z^2 = \square,$$
$$z^2+x^2 = \square,$$

du problème des *parallélépipèdes rectangles dont les arêtes et les diagonales des faces sont commensurables*. Ce problème a été traité par L. Euler (¹) qui en a formé des solutions particulières dépendant de paramètres et qui en a signalé la solution toute particulière

$$x = 44, \qquad y = 240, \qquad z = 117.$$

Ici encore les équations sont manifestement résolubles et l'on doit poser

$$(Z^2 - 1)x = 2Zy,$$
$$(X^2 - 1)y = 2Xz,$$
$$(Y^2 - 1)z = 2Yx;$$

de sorte que cette question est encore réductible à l'étude arithmogéométrique de la surface du sixième degré d'équation

$$(X^2 - 1)(Y^2 - 1)(Z^2 - 1) = 8XYZ;$$

elle se rattache elle aussi à l'étude d'une biquadratique gauche au moyen des fonctions elliptiques.

CORRESPONDANCE.

R. Goormaghtigh. — *Sur certaines paraboles associées à l'ellipse.* — Dans son article sur les paraboles π_1

(¹) L. Euleri *Commentationes arithmeticæ collectæ*, Petropoli, 1849. Tome II : *Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum quorum area rationaliter exprimi possit* (p. 648-651). Les paragraphes 52-55 (p. 650-651) de ce fragment sont relatifs au problème signalé dans le texte ci-dessus : *Invenire tria quadrata. quorum binorum summa sit quadratum.*

et π_2 qui passent par les pieds des normales issues d'un point P à une ellipse E (*Nouv. Ann.*, 1917, p. 401), M. Barisien démontrait (§ 9) que, lorsque P décrit l'ellipse donnée, la droite qui le joint à l'intersection Q des axes de π_1 et π_2 reste normale à une ellipse fixe. En employant les résultats de cette Note, on peut démontrer ce théorème plus général : *Si le point* P *décrit une conique ayant même centre et même direction d'axes que* E, *la droite* PQ *reste normale à une ellipse fixe.*

Observons que, si deux coniques ont même centre et mêmes directions d'axes, les droites qui joignent les points de même anomalie excentrique φ sont en général normales à une ellipse. On voit, en effet, aisément que l'on peut projeter la figure de manière que l'équation normale des projections d des droites considérées ait la forme

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi = k \sin 2\varphi ;$$

l'enveloppe des droites d est alors une astroïde régulière et les droites considérées enveloppent une développée d'ellipse. En tenant compte de ce qui précède, on déduit facilement des équations (12) de la page 401 la proposition générale énoncée ci-dessus.

R. Goormaghtigh. — *Sur les développantes aréolaires.* — M. Ch. Michel a indiqué (*Nouv. Ann.*, 1917, p. 450) une construction de la tangente en un point P de la *développante aréolaire* Γ d'une courbe C par rapport au pôle O. La liaison entre le centre de courbure γ' de Γ en P et celui γ de la courbe donnée C au point correspondant M est également simple :

Les normales à C *et* Γ *se coupant en* L, *on mène par la projection de* γ *sur* OM *une parallèle à* MP *qui coupe* OP *en* Q; *la parallèle à* LQ *menée par* O *passe par* γ'.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1078.

(1872, p. 191, 1916, p. 366).

On donne une courbe plane quelconque et la tangente at au point a de cette courbe. On mène la corde bc parallèlement à la tangente at. Lorsque bc se rapproche indéfiniment de at, en restant parallèle à cette droite, on demande :

1° *La limite des positions de la droite ae qui joint le point a au milieu e de la corde bc. On obtient ainsi à la limite la droite que M. Transon a appelée* axe de déviation *de la courbe en a* :

2° *La limite des positions du point de rencontre des axes de déviation de la courbe en b et c*;

3° *La limite des positions des droites qu'on obtient en joignant le point a aux points d'intersection des cercles osculateurs de la courbe donnée en b et c*;

4° *La limite des positions du point de rencontre de la corde commune à ces deux circonférences et de la tangente at.*

MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. J. SER.

1. Soit Ox la tangente en un point O de la courbe $f(XY) = 0$. Dans la région voisine de ce point, on peut exprimer X en fonction de Y par une relation de la forme

$$(1) \qquad X = mY + pY^{\frac{1}{2}} + qY^{\frac{3}{2}} + rY^2 + \ldots = \varphi(Y),$$

les constantes p, m, q, r... étant déterminées par la condition que si l'on substitue la valeur de X dans l'équation $f = 0$ les termes en Y, $Y^{\frac{3}{2}}$, Y^2 ... seront successivement nuls.

La droite $Y = \Delta y$ coupe la courbe en deux points M_1 et M_2 dont les abscisses Δx_1 et Δx_2 s'expriment en fonction de $\sqrt{\Delta y}$ au moyen de l'équation (1), le signe positif du radical correspondant par exemple au point M_1 de manière que si l'on pose $\sqrt{\Delta y} = \varepsilon$, on ait

$$(2) \qquad \Delta x_1 = p\varepsilon + m\varepsilon^2 + q\varepsilon^2 + r\varepsilon^4 + \ldots.$$

Soit $\Delta\alpha_1$ l'angle de la tangente en M_1 avec dx. Nous aurons

$$\operatorname{tang}\Delta\alpha_1 = \frac{1}{m + \dfrac{p}{2\varepsilon} + \dfrac{3q}{2}\varepsilon^2 + \ldots} = \frac{2\varepsilon}{p\left(1 + \dfrac{2m}{p}\varepsilon + \ldots\right)}$$

$$= \frac{p}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{2m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2 - 3pq}{p^2}\varepsilon^2 + \ldots,\right.$$

$$(3) \quad \sin\Delta\alpha_1 = \operatorname{tang}\Delta\alpha_1(1 + \operatorname{tang}^2\Delta\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \operatorname{tang}\Delta\alpha_1 - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\Delta\alpha_3 + \ldots$$

$$= \frac{2\varepsilon}{p}\left(1 - \frac{2m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2 - 3pq - 2}{p^2}\varepsilon^2 + \ldots\right);$$

$$(4) \qquad \Delta\alpha_1 = \frac{2\varepsilon}{p}\left(1 - \frac{2m}{p}\varepsilon + \ldots\right).$$

La droite $X = mY$ est évidemment l'*axe de déviation* OD de la courbe au point O.

II. Transportons l'origine au point M_1 et prenons pour nouvel axe des X la tangente M_1X_1 en M_1. Les formules de transformation seront :

$$(5) \qquad \begin{cases} X = \Delta x_1 + X_1\cos\Delta\alpha_1 - Y_1\sin\Delta\alpha_1, \\ Y = \Delta y + X_1\sin\Delta\alpha_1 + Y_1\cos\Delta\alpha_1, \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} X_1 = (X - \Delta\alpha_1)\cos\Delta\alpha_1 + (Y - \Delta y)\sin\Delta\alpha_1, \\ Y_1 = -(X - \Delta x_1)\sin\Delta\alpha_1 + (Y - \Delta y)\cos\Delta\alpha_1. \end{cases}$$

La substitution (5) dans l'équation $f = 0$ nous donnera une équation $f_1 = 0$, d'où nous déduirons un nouveau développement

$$X_1 = m_1 Y_1 + p_1 Y_1^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

En revenant aux anciens axes de coordonnées nous aurons pour équation de l'axe de déviation $M_1 D_1$ relatif au point M_1

$$(7) \quad \begin{aligned} &(X - \Delta x_1)(\cos\Delta\alpha_1 + m_1 \sin\Delta\alpha_1) \\ &\quad - (Y - \Delta y)(m_1 \cos\Delta\alpha_1 - \sin\Delta\alpha_1) = 0. \end{aligned}$$

Développons cette équation en nous bornant aux infiniment petits du premier ordre et en posant par suite

$$m_1 = m + \mu\Delta\alpha;$$

nous obtiendrons

$$X - mY + \Delta\alpha_1(mX + Y - \mu Y) - \Delta x_1 = 0.$$

Nous aurons de même pour l'équation de l'axe $M_2 D_2$ relatif au point M_2

$$X - mY + \Delta\alpha_2(mX + Y - \mu Y) - \Delta x_2 = 0.$$

Et comme $\Delta x_1 + \Delta x_2$ et $\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2$ sont des infiniment petits du second ordre, la limite de l'intersection des deux axes sera le point déterminé par les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &X - mY = 0, \\ &Y = \frac{\Delta x_1}{\Delta\alpha_1(1 + m^2 - \mu)} = \frac{p^2}{2(1 + m^2 - \mu)}. \end{aligned} \right.$$

Ce point se trouve donc, à un infiniment petit du second ordre près, sur l'axe MD. Sous une autre forme on peut dire que le lieu du point de rencontre des axes relatifs à deux points M_1 et M_2 situés sur une parallèle à la tangente Ox admet l'axe OD comme tangente d'inflexion.

Pour calculer μ, effectuons les opérations indiquées plus haut. La substitution (5) réduite aux infiniment petits du premier ordre devient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &X = X_1 + \Delta\alpha_1\left(\frac{p^2}{2} - Y_1\right), \\ &Y = Y_1 + \Delta\alpha_1 X_1. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, nous pouvons, dans le voisinage des points O et M_1, remplacer la courbe f par celle qui est représentée par l'équation

$$(10)\quad \begin{aligned}\varphi &= (X - mY - rY^2 - \ldots)^2 - Y(p + qY + sy^2 + \ldots)^2 = 0\\ &= X^2 + (m^2 - 2pq)Y^2 - 2mXY - p^2Y + \ldots\end{aligned}$$

et nous obtenons après substitution

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi(X_1 Y_1) + \Delta\alpha_1\left[\left(\frac{p^2}{2} - Y_1\right)\varphi'_{X_1} + X\varphi'_{Y_1}\right]\\ &= (1 - 2m\,\Delta\alpha_1)X^2 - 2[m + (2pq + 1 - m^2)\Delta\alpha_1]XY + \ldots\end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$(11)\quad m_1 = \frac{m + (2pq + 1 - m^2)\Delta\alpha_1}{1 - 2m\,\Delta\alpha_1} = m + (m^2 + 1 + 2pq)\Delta\alpha_1$$

et finalement

$$(12)\quad \mu = m^2 + 1 + 2pq.$$

L'interprétation du coefficient μ est facile. Soient ω l'angle de l'axe MD avec la normale MY en O et $\omega + \Delta\omega$ l'angle $\widehat{D_1 M_1 Y_1}$; nous avons évidemment

$$\operatorname{tang}\omega = m \qquad \operatorname{tang}(\omega + \Delta\omega) = m + \mu\Delta\alpha$$

et par suite, comme approximation du premier ordre,

$$(13)\quad \begin{aligned}\mu &= \frac{\operatorname{tang}(\omega + \Delta\omega) - \operatorname{tang}\omega}{\Delta\alpha_1}\\ &= \frac{\Delta\omega}{\Delta\alpha_1}(1 + \operatorname{tang}^2\omega) = (1 + m^2)\frac{\Delta\omega}{\Delta\alpha_1};\end{aligned}$$

quand μ est nul, la variation de ω est donc un infiniment petit du second ordre par rapport à $\Delta\alpha_1$.

En portant la valeur de μ dans les équations (8) nous obtenons pour les coordonnées du point d'intersection $x_0 y_0$ des axes M_1D_1 et M_2D_2

$$(14)\quad x_0 = -\frac{mp}{4q}, \qquad y_0 = \frac{-p}{4q}.$$

Ce résultat s'interprète immédiatement. Il résulte en effet du calcul précédent que nous n'avons eu à faire intervenir dans les équations f et φ que les coefficients m, p et q, et tout se passe par conséquent comme si nous avions cherché le point de rencontre des axes de direction relatifs à deux points de la conique

$$(X - mY)^2 - pY(p + 2qY) = 0$$

qui se coupent naturellement au centre.

On peut donc conclure des considérations précédentes :

L'enveloppe des axes de déviation est le lieu des centres des coniques ayant avec la courbe un contact du cinquième ordre.

Lorsque μ est nul on a la relation

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{p^2(1 + m^2)}{16 q^2} = \frac{p^4}{4(1 + m^2)} = R^2 \cos^2 \omega$$

puisque $\frac{p^2}{2}$ est le rayon de courbure en O. Dans ce cas le point $x_0 y_0$ est la projection sur OD du centre de courbure. Effectivement, si l'on considère le déplacement infiniment petit de l'angle DOX considéré comme invariable, le centre instantané de rotation est le centre de courbure qui se projette bien sur OD au point où cette droite touche son enveloppe.

III. Le cercle de courbure au point M_1 a pour équation, dans le système d'axes $M_1 X_1 Y_1$,

$$X_1^2 + Y_1^2 - 2 R_1 Y_1 = 0$$

et par conséquent, dans le système XOY,

$$(15)\quad \begin{aligned} &(X - \Delta x^2 + (Y - \Delta x)^2 \\ &\quad - 2 R_1 [Y - \Delta y) \cos \Delta\alpha_1 - (X - \Delta x_1) \sin \Delta\alpha_1] = 0 \\ &= X^2 + Y^2 - 2\xi_1 X - 2\eta_1 Y + K_1. \end{aligned}$$

L'axe radical des centres de courbure en M_1 et M_2 est donc la droite

$$2(\xi_1 - \xi_2) X + 2(\eta_1 - \eta_2) Y = K_1 - K_2$$

qui coupe la tangente OX en un point H dont l'abscisse h a pour valeur

$$h = \frac{K_1 - K_2}{2(\xi_1 - \xi_2)}$$
$$= \frac{\Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 + 2\Delta y(R_1 \cos\alpha_1 - R_2 \cos\alpha_2) - 2(R_1 \Delta x_1 \sin\Delta\alpha_1 - R_2 \Delta x_2 \sin\Delta\alpha_2)}{\Delta x_1 - \Delta x_2 - (R_1 \sin\Delta\alpha_1 - R_2 \sin\Delta\alpha_2)}.$$

Les valeurs principales du numérateur et du dénominateur sont les termes en ε^3 dans leur développement. Il suffit donc de former ces termes. Remarquons que, pour le calcul, nous n'aurons besoin de développer R_1 en fonction de ε que jusqu'aux termes en ε^2.

Posons donc

$$R_1 = \frac{p^2}{2}(1 + \rho\varepsilon + \sigma\varepsilon^2),$$

$$\Delta x_1 = p\left(\varepsilon + \frac{m}{p}\varepsilon^2 + \frac{p}{q}\varepsilon^3\right),$$

$$\sin\Delta\alpha_1 = \frac{2}{p}(\varepsilon + a\varepsilon^2 + b\varepsilon^3).$$

Nous avons immédiatement

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 2(p\varepsilon + q\varepsilon^2), \qquad \Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 = 4mp\varepsilon^3,$$
$$R_1 - R_2 = p^2\rho\varepsilon,$$
$$R_1 \sin\Delta\alpha_1 - R_2 \sin\Delta\alpha_2 = 2[p\varepsilon + (b + \sigma + a\rho)\varepsilon^3]$$
$$R_1 \Delta x_1 \sin\Delta\alpha_1 - R_2 \Delta x_2 \sin\Delta\alpha_2 = 2p^2\left(\frac{m}{p} + a + \rho\right)$$

et, par suite,

$$h = \frac{p(2a + \rho)}{2(a\lambda + b + \sigma - q)};$$

a et b sont donnés par les formules (3). Pour calculer ρ et σ, partons de la formule

$$R_1 = \frac{(1 + X'^2)^{\frac{3}{2}}}{X''}.$$

Nous avons ici, en nous bornant aux infiniment petits du deuxième ordre,

$$(1 + X'^2) = 1 + \left(m + \frac{p}{2\varepsilon} + \frac{3}{2}q\varepsilon + \ldots\right)^2$$
$$= \frac{p^2}{4\varepsilon^2}\left(1 + \frac{4m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2 + 4 + 6pq}{p^2}\varepsilon^2\right)$$
$$X'^1 = -\frac{p}{4\varepsilon^3} + \frac{3q}{4\varepsilon} = -\frac{p}{4\varepsilon^3}\left(1 - \frac{3q}{p}\varepsilon^2\right)$$

et, par suite,

$$(16)\quad R_1 = \frac{p^2}{2}\left(1 + \frac{4m}{p}\varepsilon + \frac{4m^2+4+6pq}{p^2}\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{3q}{p}\varepsilon^2\right)^{-1}$$
$$= \frac{p^2}{2}\left(1 + \frac{6m}{p}\varepsilon + \frac{12m^2+6+9pq}{p^2}\varepsilon^2\right)\left(1 + \frac{3q}{p}\varepsilon^2\right)$$
$$= \frac{p^2}{2}\left(1 + \frac{6m}{p}\varepsilon + \frac{12m^2+12pq+6}{p^2}\varepsilon^2\right).$$

En remplaçant a, b, ρ et σ par leurs valeurs, il vient finalement

$$(17)\qquad h = \frac{p^2 m}{4(m^2+1+2pq)} = \frac{Rm}{2\mu}.$$

La corde commune aux deux cercles est donc parallèle à la tangente lorsque μ est nul.

Quant aux droites qui joignent le point O aux points d'intersection des deux cercles, leur équation est de la forme

$$Y^2 + \varepsilon^2 PQ = 0.$$

Elles se réduisent donc à la limite à la droite double OX. Ce résultat est à peu près évident *a priori* et je ne vois pas bien dans quel but M. Mannheim a posé la question. Peut-être a-t-il eu en vue la détermination des droites $P = 0$, $Q = 0$, dans les équations desquelles intervient le quatrième terme du développement de R_1, ce qui exige l'introduction du terme rY^2 dans le développement (1) et complique la question.

1092.

(1872, p. 478; 1916, p. 322.)

On a deux cercles dans un même plan; le premier est parcouru d'un mouvement uniforme par un point M, *et le* *second est parcouru en sens inverse et d'un mouvement uniforme par un point m; la droite élevée à chaque instant par le milieu de la corde Mm perpendiculairement à cette corde enveloppe une conique; construire cette conique. Trouver la propriété analogue de l'espace.*

LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

L'énoncé est incomplet; il faudrait encore indiquer une relation entre les vitesses angulaires des points M et m. Si d'ailleurs on se reporte à une proposition analogue de Laguerre énoncée dans le Mémoire sur la géométrie de la sphère (*Œuvres*, t. II, p. 360), on est conduit à admettre que les points M et m décrivent leurs trajectoires dans le même temps.

Soient alors

$$(C_M) = x^2+y^2-R^2=0,$$
$$(c_m) = (x-a)^2+y^2-r^2=0$$

les deux trajectoires; la droite Mm sera

$$x[(R-r)\cos\varphi - a] + y(R+r)\sin\varphi + \frac{a^2+r^2+2ar\cos\varphi - R^2}{2} = 0;$$

transportons l'origine au point $x=\frac{a}{2}$, $y=0$; l'équation de l'enveloppe de Mm est

$$\frac{4x^2}{(R+r)^2}+\frac{4y^2}{(R-r)^2-a^2}=1.$$

Supposons maintenant que les cercles (C_M), (C_m) soient quelconques dans l'espace; nous aurons

$$(C_M)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0, \\ bz-cy-kb=0, \end{cases}$$

$$(C_m)\quad \begin{cases} P=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0; \end{cases}$$

la droite Mm sera

$$\frac{x - a\cos\varphi}{a\cos\varphi - x_0 - \mathrm{R}\cos\varphi} = \frac{y - b\sin\varphi}{b\sin\varphi - y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi} = \frac{z - c\sin\varphi - h}{c\sin\varphi + h},$$

le plan perpendiculaire au milieu de Mm sera

$$\cos\varphi[x(a-\mathrm{R}) - \mathrm{R}x_0] + \sin\varphi[y(b+\mathrm{R}) + \mathrm{R}y_0 + c(z-h)]$$
$$= \left[xx_0 + yy_0 - hz + \frac{a^2 + h^2 - x_0^2 - y_0^2 - \mathrm{R}^2}{2}\right]$$

qui enveloppe le cône du second ordre

$$\left[xx_0 + yy_0 - hz + \frac{a^2 + h^2 - x_0^2 - y_0^2 - \mathrm{R}^2}{2}\right]^2$$
$$= [x(a-\mathrm{R}) - \mathrm{R}x_0]^2 + [y(b+\mathrm{R}) + \mathrm{R}y_0 + c(z-h)]^2.$$

1363.

(1881, p. 192.)

On donne une ellipse; on prend le triangle acb formé par les deux tangentes ca et cb à cette courbe et la corde de contact ab et l'on détermine le point m d'où l'on voit sous des angles droits les côtés du triangle abc. Quelle est la surface, lieu des points tels que m, lorsqu'on prend tous les triangles analogues à acb?

MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit H l'orthocentre du triangle abc; si l'on porte, sur la perpendiculaire au plan de l'ellipse en H, une longueur Hm égale au rayon du cercle conjugué au triangle abc, m sera un point du lieu. Le cercle de diamètre CH coupe ab en des points conjugués par rapport à a et b, il est orthogonal au cercle de Monge de l'ellipse; par suite C et H sont conjugués par rapport à ce cercle; CH étant d'autre part perpendiculaire à ab, c est sur l'hyperbole d'Apollonius de H par rapport à l'ellipse. A un point H correspondent deux points C, la surface (m) sera donc du quatrième ordre, sa section par le plan de l'ellipse sera le lieu des points H tels que le triangle acb soit rectangle: ce sera donc le cercle de Monge de l'ellipse et l'ellipse elle-même. Ces résultats suffisent presque à montrer que la surface (m) est la surface de l'onde dérivée de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a^2+b^2} - 1 = 0.$$

On peut du reste le voir facilement comme il suit :

Si x_0, y_0 sont les coordonnées de H, les coordonnées de C seront liées par les relations

$$xx_0 + yy_0 = a^2 + b^2,$$
$$a^2 y x_0 - b^2 x y_0 = c^2 xy;$$

d'où

$$x_0 = x\,\frac{b^2(a^2+b^2) + c^2 y^2}{b^2x^2 + a^2y^2},$$

$$y_0 = y\,\frac{a^2(a^2+b^2) - c^2x^2}{b^2x^2+a^2y^2},$$

$$z_0^2 = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\frac{\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}-1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}$$

$$= \frac{(a^2+b^2-x^2-y^2)(c^4x^2y^2 - b^6x^2 - a^6y^2)}{(b^2x^2+a^2y^2)^2};$$

d'où

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \rho^2 = \frac{a^2b^2(a^2+b^2) + b^4x^2 + a^4y^2}{b^2x^2+a^2y^2},$$

$$\rho^2 - b^2 = \frac{a^2x_0}{x}, \qquad \rho^2 - a^2 = \frac{b^2y_0}{y},$$

$$\rho^2 - a^2 - b^2 = \frac{a^2b^2[a^2+b^2-x^2-y^2]}{b^2x^2+a^2y^2};$$

d'où enfin

$$\frac{b^2x_0^2}{\rho^2-b^2} + \frac{a^2y_0^2}{\rho^2-a^2} + \frac{(a^2+b^2)z_0^2}{\rho^2-(a^2+b^2)} = 0,$$

équation qui représente la surface de l'onde déviée de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2+b^2} - 1 = 0.$$

Autres notes de M. H. Brocard antérieures à la réimpression de l'énoncé en 1916.

1390.

(1882, p. 141.)

Considérons l'équation $f(x) = 0$ qui a toutes ses racines réelles; K *désignant un nombre réel arbitraire, supposons que l'équation $f(x) + K = 0$ ait m racines imaginaires. Démontrer que l'équation*

$$f'^2(x) - f(x)f''(x) - Kf''(x) = 0$$

a m racines réelles, toutes les autres étant imaginaires.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Commençons par rappeler un fait bien connu. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines, supposées distinctes pour simplifier, de l'équation

$$f(x) = 0.$$

On a

$$f(x) = A(x - a_1)\ldots(x - a_n),$$

A étant une constante; d'où, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{f'}{f} = \sum \frac{1}{x - a},$$

et en dérivant encore une fois,

$$\frac{ff'' - f'^2}{f^2} = -\sum \frac{1}{(x - a)^2}.$$

Les a étant réels, il résulte de là que, pour toute valeur réelle de x, on a

$$(1) \qquad f'^2 - ff'' > 0.$$

On voit de même, l'équation $f' = 0$ ayant aussi toutes ses racines réelles, qu'on a, pour toute valeur réelle de x,

$$(2) \qquad f''^2 - f'f''' > 0.$$

Cela rappelé, écrivons l'équation proposée

$$\varphi = k,$$

en posant

$$\varphi = \frac{f'^2 - ff''}{f''}.$$

On a

$$\varphi' = \frac{f''(f'f'' - ff''') - f'''(f'^2 - ff'')}{f''^2} = \frac{f'(f''^2 - f'f''')}{f''^2}.$$

Il résulte donc de l'inégalité (2) que, dans tous les intervalles où φ est continue, φ' a le signe de f'.

Soient alors b_h et b_{h+1} deux racines consécutives de l'équation

$$f' = 0:$$

x variant dans l'intervalle (b_h, b_{h+1}), φ passe de la valeur

$$\varphi(b_h) = -f(b_h)$$

à la valeur

$$\varphi(b_{h+1}) = -f(b_{h+1}),$$

en variant toujours dans le même sens. Ces deux valeurs sont de signes contraires. La même fonction devient une fois infinie, car l'équation $f'' = 0$ a une racine et une seule dans l'intervalle considéré. Enfin, elle ne s'annule pas, en vertu de l'inégalité (1).

La courbe $y = \varphi$, dans l'intervalle considéré, a donc l'une des formes représentées (*fig.* 1 et *fig.* 2) :

Fig. 1.

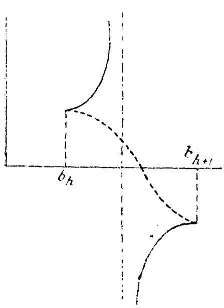
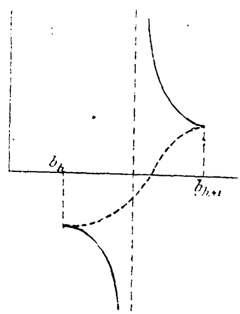


Fig. 2.



Sur chacune de ces figures, la courbe

$$y = -f$$

est représentée en pointillé.

Il résulte de l'inspection de ces tracés que, dans l'intervalle considéré, l'une des équations

$$\varphi = \mathrm{K}, \qquad -f = \mathrm{K},$$

et une seule de ces équations, a une racine et une seule. Cette remarque s'étend aux intervalles $(-\infty, b_1)$ et (b_{n-1}, ∞), comme on le voit aisément, et le théorème énoncé s'en déduit immédiatement.

1392.

(1882, p. 142.)

Si l'équation

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles, démontrer que, ω étant une quantité réelle quelconque plus petite que l'unité, l'équation

$$a + b\omega x + c\omega^4 x^2 + \ldots + k\omega^{n^2} x^n = 0.$$

a également ses racines réelles. LAGUERRE.

1393.

(1882, p. 142.)

Soit le polynome

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

supposons qu'en ajoutant à ce polynome un certain nombre de termes de degré supérieur à n, on puisse obtenir un autre polynome $f(x)$, tel que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles; démontrer que l'équation

$$\frac{a_0}{n!} + \frac{a_1 x}{(n-1)!} + \ldots + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{y!} + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles. LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BRICARD.

Dans son beau Mémoire *Sur la théorie des équations numériques*, Laguerre établit le théorème **1392** (*Œuvres*,

t. I, p. 35) en s'appuyant sur des considérations d'un ordre assez élevé. On peut en donner une démonstration plus élémentaire, dont le principe s'applique aussi à la question **1393**.

Soit $\varphi(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $e^{-\frac{x}{a}}\varphi(x)$, a étant un nombre réel quelconque, on reconnaît immédiatement que l'équation

$$\varphi(x) - a\varphi'(x) = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

Une double application de ce théorème, d'ailleurs bien connu, montre que, a et b étant deux nombres réels quelconques, l'équation

$$\varphi - a\varphi' - b(\varphi' - a\varphi'') = \varphi - (a+b)\varphi' + ab\varphi'' = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

Plus généralement, soient a, b, ..., l des nombres réels quelconques. L'hypothèse sur la réalité des racines de $\varphi = 0$ restant toujours la même, l'équation

$$\varphi - \Sigma a.\varphi' + \Sigma ab.\varphi'' - \Sigma abc.\varphi''' + \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Supposons que a, b, ..., l soient les racines de l'équation

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Alors

$$\Sigma a = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \Sigma ab = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \qquad \ldots,$$

et l'on parvient à ce résultat :

Si l'équation (1) *et l'équation* $\varphi(x) = 0$ *ont toutes leurs racines réelles, il en est de même de l'équation*

$$(2) \qquad a_0\varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\varphi' + a_n\varphi = 0.$$

Cela posé :

1° Faisons $\varphi(x) = x^{p+n}$, p étant un nombre entier nul ou positif quelconque. On a

$$\varphi' = (p+n)x^{p+n-1}, \quad \ldots;$$
$$\varphi^{(n-h)} = (p+h+1)\ldots(p+n)x^{p+h}, \quad \ldots;$$
$$\varphi^{(n)} = (p+1)\ldots(p+n)x^{p}.$$

L'équation obtenue en remplaçant dans (2) φ et ses dérivées par leurs valeurs a $p+n$ racines réelles. Le premier nombre est divisible par x^p. En supprimant ce facteur, on voit que l'équation

$$\begin{aligned} a_0(p+1)\ldots(p+n) &+ \ldots \\ + a_h(p+h+1)\ldots(p+n)x^h &+ \ldots \\ &+ a_{n-1}(p+n)x^{n-1} + a_n x^n = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$a_0 + \ldots + \frac{a_h}{(p+1)\ldots(p+h)}x^h + \ldots + \frac{a_n}{(p+1)\ldots(p+n)}x^n = 0,$$

a toutes ses racines réelles.

Si l'on remplace x par px, l'équation obtenue, qui peut s'écrire

$$(3)\qquad a_0 + \ldots + \frac{a_h}{\left(1+\frac{1}{p}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{p}\right)}x^h + \ldots + \frac{a_n}{\left(1+\frac{1}{p}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{p}\right)}x^n = 0,$$

a encore toutes ses racines réelles.

On sait donc déduire d'une équation (1) à racines toutes réelles une équation (3) à racines également toutes réelles. On peut appliquer le même procédé plusieurs fois de suite, et l'on voit en définitive que, quels que soient les entiers positifs p et λ, l'équation

$$a_0 + \ldots + \frac{a_h}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\lambda}\ldots\left(1+\frac{h}{p}\right)^{\lambda}}x^h + \ldots + \frac{a_n}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\lambda}\ldots\left(1+\frac{n}{p}\right)^{\lambda}}x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Faisons maintenant croître indéfiniment p et λ, de telle manière que le rapport $\frac{\lambda}{p}$ tende vers un nombre positif quelconque donné α. On a, quel que soit le nombre donné k,

$$\lim\left(1+\frac{k}{p}\right)^{\lambda} = \lim\left(1+\frac{k}{p}\right)^{\frac{p}{k}\frac{\lambda}{p}k} = e^{\alpha k},$$

en sorte que le dénominateur du coefficient de x^h tend vers

$$e^{\alpha(1+2+\ldots+h)} = e^{\alpha\frac{h(h+1)}{2}} = \omega^{-h(h+1)},$$

en posant

$$e^{\alpha} = \frac{1}{\omega^2}, \qquad 0 < \omega < 1.$$

On voit ainsi que l'équation

$$a_0 + a_1\omega^2 x + \ldots + a_h\omega^{h(h+1)}x^h + \ldots + a_n\omega^{n(n+1)}x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Remplaçant enfin x par $\frac{x}{\omega}$, on obtient le théorème **1392**.

Le passage à la limite dont il a été fait usage est légitime, parce que les racines d'une équation à coefficients variables sont des fonctions continues de ceux-ci, et que d'autre part la limite d'une quantité réelle variable est elle-même réelle.

Le procédé par lequel on a passé de l'équation (3) à l'équation proposée est celui même qu'emploie Laguerre dans le Mémoire cité.

2° En faisant $\varphi = x^m$ ($m < n$) dans l'équation (2), on obtient un énoncé qui ne diffère que par la notation de **1393**.

1402.

(1882, p. 240; 1916, p. 391).

La somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$n^p\left(1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \ldots\right).$$

E. Cesàro.

1403.

(1882, p. 240; 1916, p. 391.)

a, b, c, ... étant les diviseurs de n, on a, en moyenne,

$$\frac{p}{a+p}+\frac{p}{b+p}+\frac{p}{c+p}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}.$$

E. Cesàro.

1438.

(1883, p. 239; 1916, p. 392.)

La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à l_2. E. Cesàro.

1439.

(1883, p. 239; 1916, p. 392.)

Le nombre des diviseurs de n est égal, en moyenne, à l^n. E. Cesàro.

1440.

(1883, p. 239; 1916, p. 392.)

La somme des inverses des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n est égale, en moyenne, à

$$1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\ldots.$$

E. Cesàro.

1441.

(1883, p. 239; 1916, p. 392.)

Soient a, b, c, ... les diviseurs de n. La somme

$$\frac{a}{p^a}+\frac{b}{p^b}+\frac{c}{p^c}+\ldots$$

est égale, en moyenne, à $\dfrac{1}{p-1}$.

E. Cesàro.

1442.

(1883, p. 239; 1916, p. 392.)

$f(n)$ étant la somme des restes du nombre entier n, divisé par tous les nombres entiers qui le précèdent, on a

$$\lim \frac{f(n)}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

E. CESÀRO.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Ces théorèmes sont démontrés dans le Mémoire de Cesàro *Sur diverses questions d'Arithmétique* (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 1883) : n° **1402**, p. 118; n° **1403**, p. 131; n° **1438**, p. 133; n° **1439**, p. 124; n° **1440**, p. 116; n° **1441**, p. 129; n° **1442**, p. 183.

Autres Notes de M. L. POLI.

1435.

(1883, p. 144.)

Quatre demi-droites A, B, C *et* D *sont données; soient a le point où* A *est touchée par le cycle inscrit dans le triangle* ABC, *et d le point où* D *est touchée par le cycle inscrit dans le triangle* DBC; *démontrer que le point milieu du segment ad est sur l'axe radical des cycles inscrits dans les triangles* ABD *et* ACD.

LAGUERRE.

SOLUTION

Par R. BRICARD.

L'énoncé **1435** résulte de la relation remarquable suivante entre les *distances tangentielles* mutuelles des quatre cycles que touchent quatre semi-droites prises trois à trois (la distance tangentielle de deux cycles étant la longueur de l'une de leurs tangentes communes) :

La distance tangentielle de deux quelconques de ces cycles est égale à la distance tangentielle des deux autres.

On peut démontrer cela, avec les considérations de signes qui conviennent en géométrie dirigée, en s'appuyant sur la formule suivante : soient α, β, γ les sommets du triangle formé par trois semi-droites A, B, C; a, b, c les points de contact avec ces semi-droites du cycle qui les touche. On a, *en grandeur et en signe*,

$$\alpha c = \frac{\alpha\beta + \gamma\alpha - \beta\gamma}{2},$$

les segments αc, $\alpha\beta$, ... étant susceptibles de signes, puisqu'ils sont portés par des droites dirigées.

On peut aussi procéder comme il suit : partons de ce théorème élémentaire :

B, C, D *étant trois points quelconques, le cercle* BCD *et la droite* BC, *par exemple, se coupent sous le même angle que les droites* BD *et* CD.

En transformant par inversion par rapport à un point A, en dehors du plan BCD, on a ceci :

Étant donnés quatre points quelconques d'une sphère, les quatre cercles qui passent par ces points pris trois à trois sont tels que deux quelconques de ces cercles se coupent sous le même angle que les deux autres.

Considérons maintenant la figure réciproque de la précédente sur la sphère. A cet effet, faisons correspondre à un point de la sphère le grand cercle qui a ce point pour pôle, et dirigeons ce grand cercle de telle manière qu'il ait le point en question à sa droite, par exemple. Alors à un cercle quelconque correspond un *cycle* enveloppe de grands cercles dirigés, la direction de ce cycle étant donnée par celle de ces grands cercles. Deux cycles ont deux grands cercles tangents communs, correspondant aux deux points communs aux cercles réciproques, et l'*angle* des cercles se transforme en *la distance tangentielle* des cycles. La proposition précédemment énoncée devient alors celle-ci :

Étant donnés quatre grands cercles dirigés, il existe quatre cycles qui les touchent trois à trois, et la distance tangentielle de deux de ces cycles est égale à celle des deux autres.

Si maintenant on fait croître indéfiniment le rayon de la sphère, on obtient la proposition que nous avions en vue.

Cela posé, démontrons l'énoncé 1435.

Soient respectivement (α), (β), (γ), (δ) les cycles inscrits dans les triangles BCD, ACD, ABD, ABC. La distance tangentielle des cycles (γ) et (δ) est égale à celle des cycles (α) et (β). Autrement dit la puissance du point a par rapport à (γ) est égale à celle du point d par rapport à (β). De même la puissance du point a par rapport à (β) est égale à celle de d par rapport à (γ). Désignons alors par β, γ, R_β et R_γ les centres et les rayons de deux cycles (β) et (γ), et soit enfin I le milieu de ad. On a, comme on vient de le voir,

$$\overline{a\gamma}^2 - R_\gamma^2 = \overline{d\beta}^2 - R_\beta^2,$$
$$\overline{d\gamma}^2 - R_\gamma^2 = \overline{a\beta}^2 - R_\beta^2,$$

d'où, par addition,

$$\overline{a\gamma}^2 + \overline{d\gamma}^2 - 2R_\gamma^2 = \overline{a\beta}^2 + \overline{d\beta}^2 - 2R_\beta^2,$$

ce qui, par le théorème de Stewart, se ramène aisément à

$$\overline{I\gamma}^2 - R_\gamma^2 = \overline{I\beta}^2 - R_\beta^2.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Autre solution par M. R. Goormaghtigh.

1511.

(1885, p. 495 ; 1916, p. 394.)

On donne au hasard, dans un plan, quatre points, et l'on en prend un comme centre d'une conique passant par les trois autres. Démontrer que cette conique est, avec autant de probabilité, une ellipse ou une hyperbole.

Cesàro.

Solution

Par M. X. Chapuis.

Prenons trois points quelconques A, B, C dans un plan et cherchons dans quelle région du plan doit se trouver un quatrième point O pour que la conique, de centre O, passant par A, B, C, soit une ellipse.

Les trois points quelconques A, B, C déterminent un triangle ayant ces points pour sommets. Lorsque le point O se trouve sur un des côtés du triangle ABC, la conique de centre O et passant par A, B, C, se réduit à un système de deux droites. Les côtés du triangle ABC sont donc les frontières des régions du plan pour lesquelles la conique à centre cherchée change de nature (ellipse ou hyperbole).

On voit ainsi que, si le point O se trouve à l'intérieur du triangle ABC ou à l'intérieur des angles formés à partir de chaque sommet par les prolongements des côtés qui s'y croisent, la conique cherchée est une ellipse; si le point O est choisi dans une des trois autres régions du plan, la conique est une hyperbole.

Ceci posé, choisissons un point dans l'intérieur du triangle ABC, par exemple le centre de gravité G de ce triangle, et de ce point comme centre décrivons un cercle au rayon duquel nous donnerons des valeurs de plus en plus grandes. A la limite, ce cercle comprendra toute la superficie du plan.

Pour chaque valeur du rayon, construisons la figure à une échelle telle que le rayon du cercle soit représenté par une grandeur constante.

A la limite, le rayon croissant indéfiniment, le triangle ABC se réduira sur la figure au point G et les régions du plan se réduiront à six, deux à deux opposées par le sommet et d'aires égales; dans chaque groupe de deux régions égales, il y en aura une déterminant une ellipse et l'autre déterminant une hyperbole. A la limite, les superficies totales des régions du plan dans lesquelles le choix d'un point O entraînera la détermination, soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, sont donc égales. Il y a donc autant de probabilité à l'obtention, soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, lorsqu'on prend au hasard d'abord les trois points A, B, C puis le point O qui doit servir de centre à la conique cherchée.

1582.

(1888, p. 160.)

Les coniques semblablement situées qui ont même cercle directeur sont inscrites au même carré. Démontrer aussi *que, si deux telles coniques se coupent en* M, *les tangentes au point* M *font des angles égaux avec un côté du carré.*

K.-W. GENESE.

DEUXIÈME SOLUTION (¹)

Par M. R. B.

Il faut entendre par « coniques semblablement situées » des coniques ayant des axes parallèles, et par « cercle directeur » le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique. La question est dès lors facile à traiter.

1° Les coniques dont il s'agit sont nécessairement concentriques et coaxiales. Soient α et α', β et β' les points où leurs axes rencontrent le cercle directeur commun. Les coniques sont évidemment inscrites au carré $\alpha\beta\alpha'\beta'$.

2° Le théorème classique : *deux coniques homofocales se coupent orthogonalement* se généralise immédiatement, par une transformation homographique, comme ceci : *Les tangentes à deux coniques, en l'un de leurs points de rencontre, divisent harmoniquement l'angle formé par les droites joignant ce point à deux sommets opposés du quadrilatère complet circonscrit aux deux coniques.* Dans le cas actuel, deux tels sommets sont les points à l'infini des côtés du carré $\alpha\beta\alpha'\beta'$. Cela démontre la seconde partie de l'énoncé.

Autres solutions par M. C. BOULLAND et UN ABONNÉ.

1617.

(1891, p. 42; 1892, p. 329; 1915, p. 368.)

(Énoncé modifié par l'auteur de la question.)

Du point P *du plan d'une parabole, on abaisse les trois normales dont les pieds sont* A, B, C : *soient* A', B', C' *les seconds points de rencontre de ces normales avec la parabole. Les cercles décrits sur* PA', PB', PC' *comme diamètres déterminent sur* BC, CA, AB *des couples de points* $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$. *Les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *sont tangentes à la*

(¹) *Voir* 1916, p. 324.

parabole. Les droites $A'\alpha_1$, $B'\beta_1$, $C'\gamma_1$ *sont des diamètres de la courbe en ces points.*

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par E.-N. BARISIEN.

La propriété énoncée pour l'une des normales s'étendra par symétrie aux deux autres. Il suffira donc de la vérifier pour la normale APA' par exemple. Il est inutile de faire intervenir le cercle de diamètre PA' : il suffira de démontrer que les angles $P\alpha A'$ et $P\alpha_1 A'$ sont droits.

La parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, nous allons utiliser les formules de M. H. Brocard (*N. A.*, 1892, p. 4*-10*). Les ordonnées de B, C et A étant $-b$, $-c$, $(b+c)$, les coordonnées du point $P(\xi, \eta)$ et les ordonnées de A', B', C' sont

$$(1)\qquad \xi = \frac{2p^2 + b^2 + c^2 + bc}{2p}, \qquad \eta = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

$$(2)\quad y_{B'} = \frac{2p^2 + b^2}{b}, \quad y_{C'} = \frac{2p^2 + c^2}{c}, \quad y_{A'} = \frac{2p^2 + (b+c)^2}{(b+c)}.$$

L'équation de la droite BC est

$$(3)\qquad 2px + (b+c)y + bc = 0.$$

La tangente à la parabole au point A' a pour équation

$$(4)\qquad yy_{A'} = px + \frac{y_{A'}^2}{2}.$$

En résolvant (3) et (4), on aura les coordonnées du point α. Il restera à démontrer que $P\alpha$ est perpendiculaire à la tangente $A'\alpha$. Si l'on résout (3) et l'équation

$$px + \frac{[2p^2 + (b+c)^2]y}{b+c} + \frac{[2p^2 + (b+c)^2]^2}{2(b+c)^2} = 0,$$

on trouve, pour les coordonnées de α,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} x_\alpha &= \frac{[2p^2 + (b+c)^2](2p^2 + b^2 + c^2)}{2p[4p^2 + (b+c)^2]}, \\ y_\alpha &= -\frac{[2p^2 + (b+c)^2]^2 - bc(b+c)^2}{(b+c)[4p^2 + (b+c)^2]}. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient angulaire de $\alpha A'$ est

$$(6)\qquad \mu + \frac{p}{y_{A'}} = -\frac{p(b+c)}{2p^2+(b+c)^2}.$$

Celui de $P\alpha$ est

$$\mu' = \frac{\eta - y_\alpha}{\xi - x_\alpha} = \frac{\dfrac{bc(b+c)}{2p^2} + \dfrac{[2p^2+(b+c)^2]^2 - bc(b+c)^2}{(b+c)[4p^2+(b+c)^2]}}{\dfrac{2p^2+b^2+c^2+bc}{2p} - \dfrac{[2p^2+(b+c)^2](2p^2+b^2+c^2)}{2p[4p^2+(b+c)^2]}},$$

$$\mu' = \frac{bc(b+c)^2[4p^2+(b+c)^2] + 2p^2[2p^2+(b+c)^2]^2 - 2p^2bc(b+c)^2}{p(b+c)\{(2p^2+b^2+c^2+bc)[4p^2+(b+c)^2] - [2p^2+(b+c)^2](2p^2+b^2+c^2)\}}.$$

En ordonnant le numérateur et le dénominateur par rapport à p, on trouve

$$\mu' = \frac{8p^6+8p^4(b+c)^2+2p^2(b+c)^2(b^2+c^2+3bc)+bc(b+c)^4}{p(b+c)[4p^4+2p^2(b+c)^2+bc(b+c)^2]}.$$

Or, si l'on effectue la division du numérateur en p^6 par le dénominateur en p^4, la division se fait exactement, et le quotient est $2p^2+(b+c)^2$: de sorte que μ' se réduit à

$$(7)\qquad \mu' = \frac{2p^2+(b+c)^2}{p(b+c)}.$$

En comparant (6) et (7), on a immédiatement $\mu\mu' = -1$. L'angle $P\alpha P'$ est donc bien droit.

Si $A'\alpha_1$ est un diamètre de la parabole, on a pour l'ordonnée de α_1

$$(8)\qquad y_{\alpha_1} = y_{A'} = -\frac{2p^2+(b+c)^2}{b+c}.$$

L'abscisse du point de rencontre de $A'\alpha_1$ avec BC est donné par (3)

$$2px_{\alpha_1} = -(b+c)y_{\alpha_1} - bc = 2p^2+(b+c)^2 - bc.$$

Donc

$$(9)\qquad x_{\alpha_1} = \frac{2p^2+b^2+c^2+bc}{2p} = \xi.$$

Par conséquent, $P\alpha_1$ est bien perpendiculaire à $A'\alpha_1$. α_1 est donc sur le cercle de diamètre PA'.

Remarque. — L'équation du cercle décrit sur PA' comme diamètre est

$$x^2+y^2-(\xi+x_{A'})x-(\eta+y_{A'})y+\xi x_{A'}+\eta y_{A'}=0,$$

ou

$$(10)\quad x^2+y^2-\left[\frac{2p^2+b^2+c^2+bc)}{2p}+\frac{[2p^2+(b+c)^2]^2}{2p(b+c)^2}\right]x$$
$$-\left[\frac{bc(b+c)}{2p^2}-\frac{[2p^2+(b+c)^2]}{b+c}\right]y$$
$$+\frac{(2p^2+b^2+c^2+bc)[2p^2+(b+c)^2]}{4p^2(b+c)^2}$$
$$-\frac{bc[2p^2+(b+c)^2]}{2p^2}=0.$$

Son intersection avec la droite (3) donne donc les valeurs (5), (8) et (9) qu'il serait fort compliqué de calculer en résolvant (3) et (10).

1629.

(1892, p. 14; 1916, p. 394.)

Soit B *le centre de la sphère osculatrice, en* A, *à la ligne* (A). *Soit* C *le centre de la sphère osculatrice, en* B, *à la ligne* (B). *Démontrer que* AC *engendre une surface développable, et chercher les lignes pour lesquelles* AC *pivote autour d'un point fixe.*

Cesàro.

Solution

Par M. M.-F. Egan.

1. Soient a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente à (A) au point $A(x, y, z)$; soient b, b', b''; c, c', c'' ceux de la normale principale et de la binormale, et soient r, t les rayons de courbure et de torsion. Désignons par α, α', ..., ρ, τ les éléments correspondants de la courbe (B) au point $B(\xi, \eta, \zeta)$ et par A, ..., R, T, les éléments correspondants en $C(X, Y, Z)$.

D'après les formules de Frenet, on a

$$(1)\qquad \frac{da}{ds}=\frac{b}{r},\qquad \frac{db}{ds}=-\frac{a}{t}-\frac{c}{r},\qquad \frac{dc}{ds}=\frac{b}{t},\qquad \cdots.$$

On trouve facilement

$$(2)\qquad \xi - x = br - ct\frac{dr}{ds},\qquad \cdots$$

avec deux équations semblables. Si l'on différentie cette équation, en tenant compte des formules (1) et en désignant par $d\sigma$ l'élément de l'arc de (B), on trouve

$$(3)\qquad \frac{d\xi}{ds}=\alpha\frac{d\sigma}{ds}=-cm,\qquad \cdots$$

où l'on a mis

$$m=\frac{r}{t}+\frac{d}{ds}\left(t\frac{dr}{ds}\right).$$

De l'équation (3) et des deux autres semblables on déduit que $d\sigma=\pm m\,ds$. On peut évidemment disposer du signe de $d\sigma : ds$, écrivons donc $d\sigma = m\,ds$. Il s'ensuit que

$$a=-c.$$

En différentiant encore, on trouve

$$\frac{\beta}{\rho}\frac{d\sigma}{ds}=-\frac{b}{t}.$$

On peut encore disposer du sens positif de la normale principale à (B), nous pouvons écrire

$$\beta=-b,\qquad \rho=mt.$$

Il s'ensuit que

$$\gamma=\alpha'\beta''-\beta'\alpha''=-a,$$

et en différentiant l'équation $\beta=-b$, on trouve que

$$\tau = mr.$$

Passons à la courbe (C). Le même raisonnement donne

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A = -\gamma = a, \\ &B = -\beta = b, \\ &C = -\alpha = c, \\ &dS = \mu\, d\sigma = \mu m\, ds, \\ &m = \frac{r}{t} + \frac{d}{ds}\left(t\frac{dr}{ds}\right), \\ &\mu = \frac{\rho}{\tau} + \frac{d}{d\sigma}\left(\tau\frac{d\rho}{d\sigma}\right), \\ &\rho = mt, \qquad \tau = mr, \qquad d\sigma = m\, ds. \end{aligned}\right.$$

L'équation $A = a$ montre que les tangentes à (A) et (C) aux points A et C sont parallèles, donc la droite AC engendre une développable (Δ).

2. Si (Δ) est un cône de sommet O, les courbes (A) et (C) sont visiblement homothétiques par rapport à O, la valeur de $dS : ds$ est donc constante, et l'on a

$$(5)\qquad \mu m = k.$$

Cette condition est suffisante. On en tire en effet

$$dX = A\, dS = a\mu m\, ds = k\, dx,$$
$$X - x_0 = k(x - x_0),$$

avec deux équations semblables pour Y et Z.

Substituons dans (5) la valeur de μm en fonction de r et t, on trouve la condition

$$(6)\qquad \left[\left(r\frac{d}{ds}\right)^2 + 1\right]\left[\left(t\frac{d}{ds}\right)^2 + 1\right] r = kr$$

pour que (Δ) soit un cône.

3. Pour exprimer r et t en fonction de s, il faut adjoindre à (6) une seconde équation. Supposons par exemple $r = \text{const.}$, on doit avoir $k = 1$; on serait porté à conclure que (Δ) est un cylindre lorsque (A) est une courbe de courbure constante. Ce serait une illusion, puisque dans ce cas les points A et C se confondent. Cherchons en effet les cas où cette particu-

larité se présente. On a

$$\xi - x = br - ct\frac{dr}{ds}, \quad X - \xi = \beta\rho - \gamma\tau\frac{d\rho}{d\sigma}, \quad = -b\rho + ar\frac{d\rho}{ds},$$

donc

$$X - x = ar\frac{d\rho}{ds} + b(r-\rho) - ct\frac{dr}{ds}.$$

Pour que A se confonde avec C, il faut et il suffit qu'on ait

$$r = \rho = \text{const}.$$

Or, si r est constante, $m = r : t$, $\rho = mt = r$, donc *les courbes de courbure constante sont les seules pour lesquelles* A *et* C *se confondent.*

Supposons encore que l'on ait $t = hr$, c'est-à-dire que (A) soit une hélice sur un cylindre quelconque. Mettons $d\varepsilon = ds : r$, l'équation (6) devient

$$h^2\frac{d^4 r}{d\varepsilon^4} + (1 + h^2)\frac{d^2 r}{d\varepsilon^2} + (1 - k)r = 0,$$

qui donne r en fonction exponentielle de ε. On a $s = \int r\,d\varepsilon$, s sera donc une fonction de ε de même forme.

En mettant $k = 1$, on trouve la condition que (Δ) soit un cylindre, et en mettant $k = 0$ on trouve la condition que (C) se réduise à un point, c'est-à-dire que (B) soit sphérique.

L'équation (6) s'intègre facilement lorsque $r = hs$, h étant une constante.

Mettons en effet

$$t\frac{dt}{ds} = \theta, \qquad s = e^\lambda, \qquad r = h\,e^\lambda.$$

On trouve

$$h^2\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \theta = (k - 1 - h^2)\,e^\lambda,$$

$$t^2 = 2\int e^\lambda\,\theta\,d\lambda.$$

1657.

(1893, p. 53; 1916, p. 325.)

On projette orthogonalement un ellipsoïde sur tous ses plans tangents. Déterminer : 1° l'équation de la surface qui limite *la région occupée par toutes les ellipses de* *contour apparent ainsi obtenues; 2° le nombre des points de contact de cette surface et de l'axe de ces ellipses.*

MANNHEIM.

DEUXIÈME SOLUTION [1]

Par M. J. SER.

1° Soit C le cône de sommet M circonscrit à l'ellipse E et soit C′ le cône obtenu en menant en M les perpendiculaires aux plans tangents à C. Les deux cônes se coupent suivant quatre droites. Soit MT l'une d'elles, tangente à l'ellipsoïde en T. Le plan MH qui lui est perpendiculaire est tangent à l'ellipsoïde. Par suite, le point M qui est *quelconque* est de quatre manières un point de la projection orthogonale de E sur un plan tangent.

Les droites MT sont réelles ou imaginaires. La surface cherchée S sépare ceux des points M qui correspondent à des droites réelles de ceux qui correspondent à des droites imaginaires; elle est donc le lieu des points tels que C et C′ soient tangents.

Ces deux cônes ayant mêmes plans principaux ne peuvent se toucher que suivant une génératrice MT′ située dans un plan principal; l'autre génératrice MT″, qui est aussi de contact pour les deux cônes, est alors perpendiculaire à MT′.

Le lieu cherché est donc celui des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde E et qui ont une section principale formée de génératrices rectangulaires. C'est une *surface des ondes de Fresnel*, d'après Mannheim (*voir E. S. M.*, t. III, p. 22-32 et les notes).

Mobilisé, je ne puis me rapporter aux références indiquées, mais il est facile de reconstituer le calcul. Soit

$$(1)\qquad \left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right) - \left(\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1\right)^2=0$$

le cône circonscrit à E et de sommet $M(x, y, z)$. Si nous écrivons cette équation

$$AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2B''XY+2B'XZ+2BYZ+\ldots=0,$$

[1] *Voir* 1916, p. 325.

l'équation en s est ici

$$-s^3+s^2(A+A'+A'')-s\,\Sigma(AA'-B''^2)+\Delta=0.$$

L'une des racines est $A+A'+A''$, puisque la somme des autres est nulle. On a donc

$$(A+A'+A'')\,\Sigma(AA'-B''^2)-\Delta=0.$$

En développant l'équation (1), on trouve

$$A=\frac{1}{a^2}\left(E-\frac{x^2}{a^2}\right),\qquad B=-\frac{yz}{b^2c^2},\qquad \Sigma AA'-B''^2=\frac{EC}{a^2b^2c^2},$$

$$\Delta=-\frac{E^2}{a^2b^2c^2},\qquad E=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

$$C=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2,$$

et le lieu après suppression du facteur E a pour équation

$$(2)\quad C[x^2(b^2+c^2)+y^2(a^2+c^2)+z^2(a^2+b^2)$$
$$-a^2b^2-b^2c^2-a^2c^2]+a^2b^2c^2E=0.$$

C'est une surface du quatrième degré comme le prévoit M. H. Brocard (1916, p. 326). Elle est formée de deux nappes *entre* lesquelles se trouvent les ellipses de contour apparent. Les points doubles sont ceux pour lesquels les deux cônes C et C' sont confondus. C est alors de révolution et ces points sont à l'intersection de S et des focales de E.

2° En un point M de S ne passent que deux ellipses qui sont situées dans les plans perpendiculaires à MT' et MT''. Si M est au sommet de l'une d'elles, l'ellipsoïde E est inscrit dans deux quadriques pour lesquelles le plan MT'T'' est plan principal : le cône C et le cylindre projetant l'ellipse. L'ellipsoïde admet donc aussi le plan MT'T'' comme plan principal.

Les points cherchés sont donc sur les courbes d'intersection de S et des trois plans de symétrie de E. Ces courbes se composent des trois cercles orthoptiques principaux et de trois ellipses coupant chacune les deux cercles orthoptiques non situés dans leur plan. Si nous faisons, en effet, $z=0$, par exemple, dans l'équation (2), celle-ci devient

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)$$
$$\times[x^2(b^2+c^2)+y^2(a^2+c^2)-(a^2+c^2)(b^2+c^2)]=0.$$

[P¹1e]

SUR L'AFFINITÉ IMAGINAIRE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Dans les développements qui suivent, nous considérons la transformation par affinité définie par les équations

$$(1) \qquad x' = x, \qquad y' = iy.$$

Les points réels de la transformée (Γ') d'une courbe (Γ) correspondent à des points imaginaires de celle-ci. Ainsi, les constructions [1] qui, dans le cas d'un rapport d'affinité réel, permettent d'obtenir le centre de courbure en un point de la courbe (Γ') affine d'une courbe (Γ) connaissant celui de (Γ) au point correspondant, sont en défaut dans le cas de la transformation envisagée. Dans cette Note, nous indiquons une solution d'un problème analogue, ainsi que plusieurs rapports remarquables que la transformation (1) permet d'établir entre plusieurs courbes connues [2].

1. Si la courbe (Γ) est un cercle (C) de centre O, de rayon a, la courbe (Γ') est une hyperbole équilatère (H) ayant l'axe Ox pour axe réel. Deux directions rectangulaires sont conjuguées par rapport à (C);

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 1915, p. 423; 1916, p. 78; 1917, p. 84.

(2) *Voir* aussi notre Note *Sur un rapprochement remarquable entre l'hypocycloïde à trois rebroussements, le folium de Descartes et la cardioïde* (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 241-252).

à deux directions perpendiculaires correspondent donc, d'après la transformation (1), deux directions conjuguées par rapport à (H), c'est-à-dire symétriques par rapport aux bissectrices $O\xi$, $O\eta$ de l'angle des axes Oxy.

Il résulte de là que la courbe affine de la développée de (Γ) n'est autre qu'une *causticoïde* de la courbe (Γ') : c'est l'enveloppe de la symétrique de la tangente en un point de (Γ') par rapport à la parallèle menée par ce point à $O\eta$.

2. *Construction du centre de courbure de la transformée d'une courbe.* — La remarque qui précède donne le moyen de trouver une construction du centre de courbure γ en un point Q de (Γ') quand on connaît une méthode pour construire le centre de courbure C de (Γ) en l'un de ses points M. Faisons au point Q de (Γ') une construction qui est la transformée par l'affinité (1) de celle qu'on fait en un point quelconque M de (Γ) pour trouver le centre de courbure C en ce point; on obtiendra ainsi le point δ où la symétrique t' de la tangente t à (Γ') en Q, par rapport à la parallèle menée par Q à $O\eta$, touche son enveloppe. Connaissant δ on en déduit γ au moyen de la propriété fondamentale des causticoïdes : soit γ' le point où la perpendiculaire élevée en δ sur t' coupe la normale à (Γ') en Q; γ est le symétrique de γ' par rapport à Q.

3. Soit encore une transformation géométrique T; au moyen de l'affinité (1) on en déduit une autre T'. Désignons par (Γ_1) la courbe déduite de (Γ) par la transformation T, et par (Γ'_1) celle déduite de (Γ') au moyen de la transformation T'. Si l'on connaît une méthode pour construire le centre de courbure en un point M_1 de (Γ_1), connaissant celui de (Γ) au point cor-

respondant M, on pourra encore en déduire une méthode pour obtenir le centre de courbure en un point Q_1 de (Γ'_1) connaissant celui de (Γ') au point correspondant Q.

Au moyen de la construction rappelée plus haut on déduit du centre de courbure γ de (Γ') le point correspondant δ de la causticoïde de (Γ'); au point obtenu on applique la construction affine de celle au moyen de laquelle on passe du centre de courbure de (Γ) à celui de (Γ_1). On obtient ainsi le point de la causticoïde de (Γ'_1) correspondant à Q_1, d'où l'on déduit le centre de courbure de (Γ'_1) en Q_1.

On trouvera une application de cette méthode au paragraphe 5.

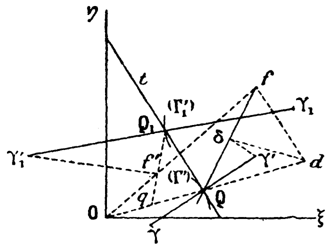
4. Comme première application des développements qui précèdent, nous signalerons un rapprochement remarquable entre la transformation podaire et une autre transformation géométrique $\mathfrak{T}$.

D'après la remarque faite au début du paragraphe 1, la courbe affine du lieu de la projection de O sur la tangente en un point variable de (Γ) est le lieu de l'intersection Q_1 de la tangente t en un point variable Q de (Γ') avec la droite menée par O et ayant une direction symétrique de celle de t par rapport à $O\xi$.

La transformation podaire a pour affine la transformation $\mathfrak{T}$ *qui fait correspondre à une courbe* (Γ') *le lieu* (Γ'_1) *des milieux des segments que deux axes rectangulaires* $O\xi, O\eta$ *déterminent sur une tangente variable de* (Γ').

On peut donc déduire, de la construction bien connue de la tangente à la podaire d'une courbe, une méthode pour obtenir la tangente [1] en un point Q_1 de la courbe (Γ'_1) déduite de (Γ') par la transformation $\mathfrak{T}$ (*fig.* 1).

Fig. 1.



La droite qui joint Q_1 *au milieu* q *de* OQ *est la symétrique de la tangente à* (Γ'_1) *en* Q_1 *par rapport à la parallèle menée à* $O\eta$ *par ce point.*

5. Appliquons maintenant à la transformation $\mathfrak{T}$ la méthode du paragraphe 3 pour construire le centre de courbure γ_1 de (Γ'_1) en Q_1 connaissant celui de (Γ') en Q.

Du centre de courbure donné γ, on déduit d'abord le point δ où la symétrique de t par rapport à l'ordonnée de Q touche son enveloppe :

On projette le symétrique γ' *de* γ *par rapport à* Q *en* δ *sur la parallèle menée par* Q *à* OQ_1.

Connaissant le point δ, on en déduit, par la construction affine de celle qui donne le centre de courbure de la podaire d'une courbe, le point f' où $Q_1 q$ touche son enveloppe :

---

[1] Pour la construction de la tangente, *voir* : G. DE LONGCHAMPS, *Period. di Matem.*, 1903, p. 241 ; M. D'OCAGNE, *Nouvelles Annales*, question 2264, 1915, p. 478. — *Voir* aussi : MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 16.

Par δ *on mène une droite qui a une direction symétrique de celle de* OQ *par rapport à* Oξ *et qui coupe* OQ *en* d; *la parallèle menée par* d *à* QQ_1 *rencontre* $Q\delta$ *en* f, Of *coupe* $Q_1 q$ *en* f'.

Connaissant le point f', on obtient immédiatement le centre de courbure cherché :

La perpendiculaire élevée en f' *sur* $Q_1 f'$ *passe par le symétrique du centre de courbure cherché par rapport à* Q_1.

6. *La lemniscate de Bernoulli et la kreuzcurve circulaire.* — Si (Γ) est l'hyperbole équilatère (H), la podaire de (Γ) par rapport à O est une lemniscate de Bernoulli. La courbe (Γ') est alors le cercle (C) et la courbe (Γ'_1) est la kreuzcurve circulaire dont les asymptotes sont parallèles à Oξ, Oη et à laquelle (C) est quatre fois tangent. *La transformée par l'affinité* (1) *d'une lemniscate de Bernoulli* (B) *est donc une kreuzcurve* (K). Il résulte d'abord de là que ces courbes ont les mêmes propriétés descriptives [1].

On peut ensuite remarquer que, la kreuzcurve (K) étant la polaire réciproque de l'astroïde droite

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

par rapport à (C), on a ainsi un moyen de déduire des propriétés connues de la lemniscate (B) des propriétés de l'astroïde (2) et aussi des développées d'ellipses qui lui sont affines.

Par exemple, on sait que les points de contact des quatre tangentes menées d'un point de la lemniscate

---

[1] Ces propriétés sont celles des quartiques à trois points doubles à inflexion.

à la courbe sont sur une droite qui enveloppe l'hyperbole homothétique de (H) pour le rapport 1 : 2. On en déduit immédiatement ce théorème de M. Laisant :

La normale en un point d'une ellipse coupe la développée en quatre points pour lesquels les tangentes sont concourantes.

Le lieu du point de concours est l'ellipse qui a ses sommets aux rebroussements de la développée.

7. Considérons la demi-croix de Malte (M) qui est parallèle à l'astroïde (2) et a Ox comme tangente au point autotangentiel O. Sa polaire réciproque par rapport à (C) est la campyle d'Eudoxe (E) ayant pour équation

$$x^4 = \frac{a^2}{4}(x^2 + y^2);$$

la courbe affine de celle-ci est la lemniscate de Gerono (G)

$$x^4 = \frac{a^2}{4}(x^2 - y^2).$$

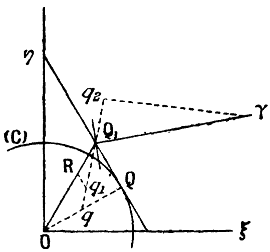
Puisque la courbe (M) et l'astroïde (2) sont parallèles, si par O on mène une semi-droite s, les tangentes à (K) et (E) aux points où ces courbes rencontrent s se coupent sur la perpendiculaire élevée en O sur s. En passant de là aux courbes (B) et (G) on trouve ce rapport intéressant entre les lemniscates de Bernoulli et de Gerono :

On considère une lemniscate de Gerono d'axe a et une lemniscate de Bernoulli d'axe $2a$ ayant mêmes tangentes nodales. Les tangentes à ces courbes aux points où elles rencontrent une semi-droite s_1 menée par O se coupent sur la symétrique de s_1 par rapport aux tangentes nodales.

8. *Construction du centre de courbure de la kreuzcurve circulaire et de la kohlenspitzcurve équilatère.* — Si l'on considère la lemniscate de Bernoulli comme spirale sinusoïde d'indice 2, on voit que le centre de courbure en un point M de (B) appartient à la perpendiculaire élevée sur le rayon vecteur OM au point qui le divise dans le rapport 2 : 1.

D'après le paragraphe 2, on aura donc la construction suivante du centre de courbure de (K) au point Q_1 correspondant au point Q de (C) (*fig.* 2) : on divise OQ_1

Fig. 2.



dans le rapport 2 : 1, et par le point R obtenu on mène une parallèle à Q_1Q qui coupe la droite qui joint Q_1 au milieu q de OQ en q_1, la perpendiculaire élevée sur q_1Q_1 au symétrique q_2 de q_1 par rapport à Q_1 passe par le centre de courbure cherché. On en déduit cette construction simple :

On prolonge la droite qui joint le milieu q de OQ *à* Q_1 *au delà de* Q_1 *des* $\frac{2}{3}$ *de* qQ_1 ; *la perpendiculaire élevée sur* qQ_1 *au point obtenu passe par le centre de courbure cherché.*

Si l'on considère la kohlenspitzcurve équilatère obtenue en transformant (K) par l'affinité $\xi' = \xi$,

$\eta' = i\eta$, on voit facilement qu'on peut employer, pour obtenir le centre de courbure de cette courbe, une construction identique à celle que nous venons de trouver pour la kreuzcurve. Ceci résulte aussi de la remarque suivante : la kohlenspitzcurve considérée se déduit par l'affinité (1) d'une lemniscate de Bernoulli (imaginaire) qui a Ox et Oy pour tangentes nodales.

9. On sait que le lieu des centres des coniques dont un foyer est fixe et qui ont avec une courbe donnée un contact du second ordre est la développée de la podaire de cette courbe ([1]).

Si l'on observe que l'affinité (1) fait correspondre les droites $O\xi$, $O\eta$ aux droites isotropes menées par O, on a ce résultat :

Le lieu des centres des coniques (Σ) *qui touchent* $O\xi$ *et* $O\eta$ *et qui ont un contact du second ordre avec une courbe* (Γ') *est une causticoïde de la courbe* (Γ'_1) *déduite de* (Γ') *par la transformation* $\mathfrak{T}$.

En particulier :

Le lieu des centres des coniques qui ont un contact du second ordre avec une astroïde et qui touchent les tangentes cuspidales est une autre astroïde.

Au moyen de la transformation par polaires réciproques par rapport à (C) on déduit des coniques (Σ) que nous venons de considérer des hyperboles équilatères qui ont un contact du second ordre avec la polaire réciproque de (Γ') et dont les asymptotes sont parallèles à $O\xi$ et $O\eta$. Au lieu des centres des coniques (Σ) correspond l'enveloppe de la polaire de O par rapport

([1]) *Nouvelles Annales*, 1916, p. 21.

à ces hyperboles. Si l'on passe ensuite à la figure affine, on est amené à considérer la transformation qui fait correspondre à une courbe donnée l'enveloppe des polaires de O par rapport aux cercles osculateurs de cette courbe.

En observant que Qq est la tangente en f' au lieu des centres des coniques (Σ), on voit aisément que *le point où la polaire de* O *par rapport au cercle osculateur au point variable d'une courbe touche son enveloppe appartient à la perpendiculaire élevée en ce point de la courbe sur la droite qui le joint à* O.

On pourra facilement déduire de la propriété de l'astroïde trouvée plus haut le théorème suivant :

Les polaires du point double d'une lemniscate de Bernoulli par rapport aux cercles osculateurs de la courbe enveloppent une kohlenspitzcurve équilatère.

Par un point de la lemniscate passent trois cercles qui osculent la courbe en un autre point; les points d'osculation appartiennent à la perpendiculaire élevée au point considéré sur le rayon vecteur de ce point. Au moyen des considérations qui précèdent, on déduit de là ce théorème :

Parmi les quatre tangentes qu'on peut mener à une astroïde par un point P *du cercle inscrit, l'une a une direction symétrique de celle de* OP *par rapport aux tangentes cuspidales* $O\xi$, $O\eta$. *La conique qui touche cette tangente et l'une des trois autres en son point de contact avec l'astroïde et qui touche en outre les tangentes cuspidales a un contact du second ordre avec la courbe.*

10. *Centre de courbure de la sinusoïde.* — Au

moyen de l'affinité définie par les équations (1) on déduit de la chaînette

$$x = a \operatorname{ch} \frac{y}{a}$$

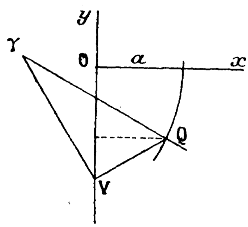
la sinusoïde

$$x = a \cos \frac{y}{a};$$

nous appellerons l'axe y la *base* de la sinusoïde.

Le centre de courbure en un point M de la chaînette est le symétrique, par rapport à M, du point où la normale coupe la base. On déduit de là, d'après la méthode indiquée plus haut, cette construction du centre de courbure en un point Q de la sinusoïde : la symétrique de la normale par rapport à l'ordonnée de Q coupe Oy en V; la perpendiculaire élevée sur QV au symétrique

Fig. 3.



de V par rapport à Q coupe la normale au symétrique du centre de courbure par rapport à Q. D'où cette construction simple (*fig.* 3) :

Le centre de courbure en un point Q de la sinusoïde appartient à la perpendiculaire élevée sur la symétrique de la normale par rapport à l'ordonnée de Q, au point où cette symétrique coupe la base.

11. La radiale de la chaînette est la campyle d'Eudoxe

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2);$$

il en résulte que, si l'on mène par le point O des segments équipollents aux normales de la chaînette, le lieu des extrémités de ces segments est la même campyle d'Eudoxe. L'affine de cette courbe étant une lemniscate de Gerono, on voit que, si l'on mène par O des segments équipollents aux segments tels que QV, le lieu des extrémités des segments sera une lemniscate de Gerono. Comme QV est symétrique de la normale à la sinusoïde en Q par rapport à l'ordonnée de Q, on a donc ce théorème :

Si l'on mène par un point des segments équipollents aux segments des normales à une sinusoïde compris entre les points d'incidence et la base, le lieu des extrémités de ces segments est une lemniscate de Gerono.

Le raisonnement précédent montre que si, d'une manière générale, on considère le lieu (Γ_2) des extrémités des segments équipollents aux normales d'une courbe (Γ) portés à partir d'un point, et le lieu (Γ'_2) analogue pour la courbe affine (Γ') de (Γ), les courbes (Γ_2) et (Γ'_2) se déduisent aussi l'une de l'autre par l'affinité (1).

12. *Centre de courbure de la courbe* $x = a\,\mathrm{sh}\frac{y}{a}$. — En passant de la sinusoïde

$$x = a \sin \frac{y}{a}$$

successivement aux courbes

$$x = a \sin \frac{iy}{a} = ai\,\mathrm{sh}\frac{y}{a}, \qquad x = a\,\mathrm{sh}\frac{y}{a},$$

on voit facilement que la construction du centre de courbure de la courbe considérée est identique à celle que nous avons donnée pour la sinusoïde.

On trouve de même que le lieu des extrémités des segments équipollents aux normales de la courbe portés à partir d'un point est encore une lemniscate de Gerono.

13. *Courbes* $\xi^k\eta^l = C$. — Considérons la spirale logarithmique ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = c\,e^{\alpha i\omega},$$

c et α étant des constantes. On peut aussi écrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\log[(x+iy)(x-iy)]\\ &\quad = \log c + i\alpha \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \log c + \frac{\alpha}{2}\log\frac{iy+x}{iy-x}.\end{aligned}$$

La courbe affine aura pour équation

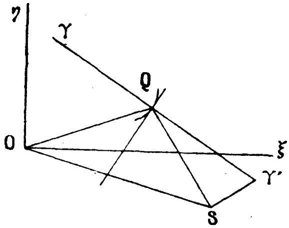
$$\frac{1}{2}\log[(x+y)(x-y)] = \log c + \frac{\alpha}{2}\log\frac{y+x}{y-x}.$$

Si l'on rapporte cette courbe aux axes $O\xi$, $O\eta$, on voit qu'elle a une équation de la forme $\xi^k\eta^l = C$; cette classe de courbes renferme les *paraboles* et *hyperboles d'indices quelconques* ainsi que les *courbes polytropiques*.

Au moyen de la méthode du paragraphe 2, on déduit de la construction bien connue du centre de courbure de la spirale logarithmique celle du centre de courbure en un point Q d'une courbe $\xi^k\eta^l = C$ (*fig.* 4); elle s'applique quels que soient k et l.

La symétrique de la tangente en Q *par rapport* *à l'ordonnée de* Q *rencontre en* S *la symétrique de* OQ *par rapport à* $O\xi$. *La perpendiculaire élevée*

Fig. 4.



en S *sur* QS *passe par le symétrique du centre de courbure par rapport à* Q.

De la propriété fondamentale de la spirale logarithmique on déduit aussi cette propriété caractéristique des courbes $\xi^k\eta^l = C$:

La symétrique de la tangente en Q *par rapport à l'ordonnée de* Q *détermine sur la symétrique de* OQ *par rapport à* $O\xi$ *un segment* OS *que la tangente divise dans un rapport constant.*

La podaire d'une spirale logarithmique par rapport au pôle étant une autre spirale logarithmique, on a encore cette proposition :

Le lieu des milieux des segments que les axes $O\xi$, $O\eta$ *déterminent sur les tangentes à une courbe* $\xi^k\eta^l = C$ *est une courbe du même genre.*

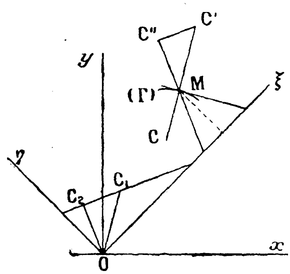
On sait que les points de contact des tangentes menées d'un point à la spirale appartiennent à un cercle passant par ce point et par le pôle.

Les points de contact des tangentes menées d'un *point à la courbe* $\xi^k \eta^l = C$ *appartiennent à une hyperbole équilatère qui passe par ce point et par* O *et dont les asymptotes sont parallèles à* $O\xi$, $O\eta$.

14. *Radiales des courbes transformées.* — Proposons-nous de déterminer la radiale (R') de l'affine (Γ') de (Γ) connaissant la radiale (R) de (Γ).

Soient C' le symétrique de C par rapport à M, C'' la projection de C' sur la symétrique de la tangente en M à (Γ) par rapport à la parallèle menée par M à $O\eta$ (*fig.* 5). La courbe (R') est l'affine du lieu de l'extré-

Fig. 5.



mité du segment OC_2 équipollent à MC''. Si l'on observe que les directions de $C'C''$ et CM sont symétriques par rapport à $O\xi$, on trouve ce théorème :

La radiale (R') *de l'affine* (Γ') *de* (Γ) *est l'affine de la podaire, par rapport à* O, *de la courbe qu'on déduit de la radiale* (R) *de* (Γ) *par la transformation inverse de la transformation* $\mathfrak{T}$.

Ainsi, la radiale d'un cercle (C) coïncide avec ce cercle; la courbe qu'on en déduit au moyen de la transformation inverse de la transformation $\mathfrak{T}$ est l'astroïde qui touche quatre fois (C) et a ses rebroussements sur $O\xi$, $O\eta$; la podaire de l'astroïde est la rosace

$$(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2.$$

La radiale de l'hyperbole équilatère (H) est donc la sextique [1]

$$(x^2-y^2)^3 = a^2(x^2+y^2)^2.$$

[$M^2 2 i\beta$]

SURFACES PARALLÈLES AUX SURFACES CYCLIDES;

Par M. A. MYLLER.

Les courbes ou les surfaces parallèles à une courbe ou à une surface quelconque donnée ont fait l'objet de quelques recherches générales [2]. On a étudié aussi des cas spéciaux : les courbes parallèles aux coniques [3], à quelques quartiques particulières [4] ou à d'autres courbes spéciales [5].

Dans ce qui suit il s'agira des surfaces parallèles aux surfaces cyclides [6], c'est-à-dire aux surfaces du quatrième ordre, qui ont le cercle imaginaire de l'infini pour ligne double. Les résultats se rapportent aussi aux courbes parallèles aux quartiques bicirculaires,

---

(1) *Cf.* Loria-Schütte, *Speziëlle ebene Kurven*, t. II, p. 296.

(2) Cayley, *Quart. Journ. Math.*, t. XI, 1871.

(3) Catalan, *Nouv. Ann. Math.*, t. III, 1844; Cayley, *Ann. di Matem.*, t. XIII, 1860; Gomes Teixeira, *Mém. cour. par l'Ac. de Belgique*, t. LVIII, 1898.

(4) Losehand, *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907.

(5) G. Loria, *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907.

(6) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Paris, 1873.

quartiques qui correspondent dans la Géométrie plane aux cyclides.

On définit les surfaces parallèles de la façon suivante : Étant donnée une surface F si l'on prend sur la normale dans un point quelconque M, d'un côté et de l'autre de la surface, deux points M′ et M″ tels que

$$MM' = MM'' = \text{const.}$$

et si l'on fait varier M sur la surface, on obtient comme lieu des points M′ et M″ une surface parallèle à F.

La cyclide peut être définie comme l'enveloppe d'une série de sphères S (génératrices) qui coupent à angles droits une sphère fixe Σ (directrice) et dont les centres décrivent une quadrique fixe Q (déférente).

Considérons une série de sphères S′ concentriques avec les sphères S et telles que le rayon R′ de chaque sphère S′ diffère du rayon R de la sphère concentrique S d'une quantité fixe δ

$$R' = R \pm \delta.$$

Les sphères S′ auront comme enveloppe une surface P à deux nappes, correspondant chacune aux valeurs $+\delta$ et $-\delta$, qui sera parallèle à la cyclide donnée. Pour le démontrer il suffit de montrer que, si M est le point de contact de la cyclide avec la sphère génératrice S, le point M′ d'intersection du rayon de la sphère S passant par M avec la sphère concentrique S′ sera aussi le point de contact de la sphère S′ avec son enveloppe la surface parallèle.

Prenons le centre O de la sphère S pour origine des coordonnées et le plan tangent en O à la déférente pour plan xOy.

Soit

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

l'équation de la sphère S. Une sphère génératrice infiniment voisine avec le centre dans xOy aura pour équation

$$(x-d\alpha)^2+(y-d\beta)^2+z^2-\left(R+\frac{\partial R}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial R}{\partial\beta}d\beta\right)^2=0$$

ou, en gardant seulement les infiniment petits du premier ordre,

$$x^2+y^2+z^2-2\,d\alpha\,x-2\,d\beta\,y-R^2-2\,R\frac{\partial R}{\partial\alpha}d\alpha-2\,R\frac{\partial R}{\partial\beta}d\beta=0.$$

L'intersection de cette sphère avec la précédente se trouve dans le plan

$$\left(x+R\frac{\partial R}{\partial\alpha}\right)d\alpha+\left(y+R\frac{\partial R}{\partial\beta}\right)d\beta=0$$

et par conséquent le point de contact M de S avec l'enveloppe se trouve sur la droite

$$x=-R\frac{\partial R}{\partial\alpha},$$

$$y=-R\frac{\partial R}{\partial\beta}.$$

Prenons aussi la sphère S′

$$x^2+y^2+z^2-(R\pm\delta)^2=0$$

et la sphère voisine

$$\begin{gathered}x^2+y^2+z^2-2\,d\alpha\,x-2\,d\beta\,y\\-(R\pm\delta)^2-2(R\pm\delta)\frac{\partial R}{\partial\alpha}-2(R\pm\delta)\frac{\partial R}{\partial\beta}=0.\end{gathered}$$

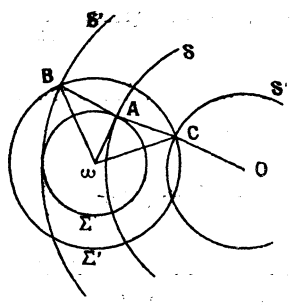
Le point de contact M′ de S′ avec son enveloppe se trouve sur la droite

$$x = -(\mathrm{R} \pm \delta)\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha},$$

$$y = -(\mathrm{R} \pm \delta)\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \beta}.$$

Par conséquent M′ se trouve sur la droite OM.

Nous allons prouver maintenant que les sphères S′ coupent à un angle fixe θ une sphère fixe Σ' concentrique avec Σ. Soient O le centre d'une sphère génératrice S de rayon R et ω le centre de la sphère directrice Σ de rayon ρ. Soient OA un rayon de S tangent en A à Σ et ωA le rayon de Σ qui doit être perpendiculaire à OA. Prenons sur OA deux points B et C d'un côté et de l'autre du point A et à la distance δ de ce



point. Considérons les sphères S′ ayant le centre O et passant par B et C. Leurs rayons seront égaux à $\mathrm{R} + \delta$ et $\mathrm{R} - \delta$. La sphère Σ' ayant le centre ω et passant par B et C a un rayon de longueur constante ρ' quelle que soit la sphère génératrice. On a

$$\rho'^2 = \rho^2 + \delta^2.$$

Si nous désignons par θ l'angle ωBA ou ωCA, on obtient du triangle ωBA ou ωCA

$$\tang\theta = \frac{\rho}{\delta}; \tag{1}$$

or, θ étant l'angle sous lequel les sphères S' coupent la sphère fixe Σ', le théorème est démontré.

En nous servant du théorème connu qu'une cyclide peut être considérée de cinq manières différentes comme l'enveloppe d'une série de sphères qui coupent à angles droits une sphère fixe, on peut dire aussi, d'après ce dernier résultat, qu'une surface parallèle à une cyclide peut être considérée de cinq manières différentes comme l'enveloppe d'une série de sphères qui coupent à angle constant une sphère fixe et dont les centres décrivent une quadrique fixe.

Cherchons si parmi les surfaces parallèles à une cyclide donnée il y en a une dont les sphères génératrices coupent la directrice sous un angle nul; alors ces sphères génératrices sont tangentes à une sphère fixe. La formule (1) nous montre que cela est possible seulement si $\rho = 0$, c'est-à-dire si la cyclide est telle qu'une de ses sphères directrices se réduit à un point O. Dans ce cas toutes les surfaces parallèles jouissent de cette propriété. Soit Q la déférente correspondant à ce point O. La cyclide sera l'enveloppe des sphères ayant leurs centres sur Q et passant par O. Elle sera donc le lieu des points symétriques du point O par rapport aux plans tangents à Q. Il est facile de voir que ce lieu est la podaire d'une quadrique homothétique à Q, deux fois plus grande, le centre d'homothétie étant en O.

Cherchons aussi si parmi les surfaces parallèles à une cyclide il y en a qui sont aussi des cyclides. Si une telle surface existe elle sera l'enveloppe d'une série de sphères génératrices qui coupent en même temps une sphère à angle constant et une autre à angle droit. En effet, elle possède comme surface parallèle une série de sphères génératrices qui coupent une sphère fixe à angle constant, mais la surface étant aussi cyclide cette série doit être une des cinq séries des sphères de la cyclide qui coupent une sphère fixe à angle droit.

Le problème revient donc à chercher l'enveloppe des sphères qui coupent deux sphères données respectivement à angle droit et à angle constant.

Montrons d'abord que toutes les sphères S qui coupent à angles donnés α et β respectivement deux sphères données, coupent à angle constant une sphère quelconque fixe passant par l'intersection des deux sphères données.

Soient

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-R^2=0, \\ (x-a)^2+y^2+z^2-r^2=0 \end{cases}$$

les équations des deux sphères données. La sphère

$$(3)\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-\rho^2=0$$

les coupe aux angles α et β si l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha, \\ (\xi-a)^2+\eta^2+\zeta^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos\beta. \end{cases}$$

Une sphère passant par l'intersection des sphères (2) a pour équation

$$(5)\qquad \left(x-\frac{a}{1+\lambda}\right)^2+y^2+z^2-\left[\frac{r^2+\lambda R^2}{1+\lambda}-\frac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}\right]=0.$$

En calculant l'angle θ que fait la sphère (3) avec la sphère (5) on obtient, en tenant compte des conditions (4),

$$(6)\qquad \cos\theta=\frac{\lambda R\cos\alpha+r\cos\beta}{\sqrt{(1+\lambda)(r^2+\lambda R^2)-\lambda a^2}}.$$

Cette formule étant indépendante de ξ, η, ζ et ρ démontre le théorème.

L'équation (6) donne, à un θ donné, deux valeurs pour λ. Par conséquent il y a deux sphères passant par l'intersection des sphères (2) qui coupent les sphères S sous un angle donné. Si pourtant θ est droit, l'équation (6) donne une seule valeur pour λ, et par conséquent il existe seulement une sphère Σ passant par l'intersection des sphères données qui coupe orthogonalement les sphères S. On obtient l'équation de cette sphère Σ en remplaçant dans (5) λ par

$$-\frac{r\cos\beta}{R\cos\alpha}.$$

En particulier il existe deux sphères qui coupent les sphères S à l'angle zéro. Ces deux sphères K forment donc l'enveloppe des sphères S. En éliminant ρ entre les deux équations (4), on obtient l'équation du lieu des centres des sphères S qui est une quadrique de révolution R déférente de la cyclide qui se réduit aux deux sphères K. On peut alors constater facilement que la quadrique R est tangente à la sphère Σ le long du cercle qui est l'intersection des sphères (2).

En revenant à la question posée, on voit que la cyclide dont la surface parallèle est aussi cyclide se réduit à deux sphères et dans ce cas toutes les surfaces parallèles sont cyclides.

Ce résultat se rapporte aux cyclides générées par ∞^2 sphères S qui leur sont doublement tangentes, c'est-à-dire à celles dont la déférente est une véritable quadrique. Il existe pourtant des cyclides pour lesquelles la quadrique déférente se réduit à une conique. Si ces cyclides ont aussi la propriété que leurs surfaces parallèles soient aussi cyclides, leurs sphères génératrices doivent aussi couper deux sphères fixes respectivement à angle droit et constant et par conséquent la conique déférente ne peut être qu'une section plane de la quadrique R. Cette conique déférente est tangente à la sphère directrice Σ car R est tangente. La cyclide est donc une *cyclide de Dupin*.

Inversement la cyclide de Dupin pouvant être définie comme l'enveloppe des sphères données Σ_1, Σ_2, Σ_3, deux quelconques de ces trois sphères jouent le rôle des sphères (2) et par conséquent les sphères génératrices de la cyclide de Dupin sont des sphères S du problème précédent.

On peut déduire de cela une propriété des cyclides de Dupin. Prenons deux sphères Σ'_1 et Σ'_2 passant par l'intersection de Σ_1 et Σ_2, qui coupent les sphères génératrices de la cyclide aux angles α et β. Nous savons que cela est possible. De même par l'intersection des sphères Σ'_2 et Σ_3 nous prenons une sphère Σ'_3 qui coupe les génératrices à l'angle γ. Observons que ce procédé n'est applicable que si un des angles α, β, γ au moins n'est droit.

Par conséquent la cyclide de Dupin peut être considérée comme l'enveloppe des sphères qui coupent trois sphères données respectivement aux angles α, β, γ dont un au moins n'est droit.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1660.

(1894, p. 1*.)

Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point A_1 *de la courbe on peut mener deux* *tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, soit* A_2, *d'où l'on puisse mener de nouveau des tangentes réelles; alors* A_2 *donne* A_3, ...; *les points ainsi obtenus tendent vers le point d'inflexion réel de la courbe.*

A. ASTOR.

SOLUTION

Par un ANONYME.

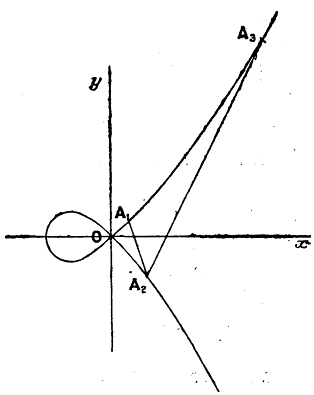
Newton a montré que toute courbe du troisième degré peut être regardée comme la perspective d'une courbe parabolique ayant pour équation

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Considérons la courbe dont l'équation est

$$by^2 = x^2(x+a),$$

a et b étant positifs; l'origine est un point double à tangentes



réelles distinctes. Avec $y = tx$, on a

$$x = -a + bt^2,$$
$$y = -at + bt^3.$$

Les trois points t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite si l'on a

$$t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2 = -\frac{a}{b};$$

ou donc pour les points A_2 dont le *tangentiel* est A_1,

$$(1) \qquad t_2^2 + 2t_1.t_2 + k^2 = 0,$$

avec $k^2 = \frac{a}{b}$. Sous la condition

$$t_1^2 > k^2,$$

équivalente à $x_1 > 0$, l'équation (1) a deux racines de même signe, le signe commun étant contraire au signe t_1; leur produit étant k^2, le carré de l'une surpasse k^2, on prend celle-là et elle donne t_3; on continue ainsi. Les points A ont des abscisses positives.

Comme on a

$$t_2 = -t_1 - \varepsilon\sqrt{t_1^2 - k^2},$$

ε étant le signe de t_1, on a

$$|t_2| = |t_1| + \sqrt{t_1^2 - k^2},$$

et les t vont en croissant; la différence $|t_2| - |t_1|$ va en croissant, les modules des t croissent plus vite que les termes d'une progression arithmétique croissante, $|t_n|$ est un infiniment grand. Or la courbe a trois points d'inflexion dont un seul est réel, à savoir le point à l'infini dans la direction Oy; comme la valeur infinie de t donne ce point, le fait annoncé est établi.

Si l'on passe, au contraire, d'un point A_3 à son tangentiel A_2, ..., le point limite est le point double.

Dans le cas de la parabole semi-cubique, $a = 0$, la relation entre t_1 et t_2 se réduit à

$$t_2 + 2t_1 = 0,$$

la relation $t_2 = 0$ devant être écartée.

1672.

(1894, p. 4*; 1917, p. 238.)

La podaire du centre de la courbe

$$4(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^4 = 0$$

a pour équation

$$4(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 + 2y^2)^2 = 0.$$

Le rapport de l'aire de la première courbe à celle de la seconde est $\frac{15}{19}$.

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. R. Goormaghtigh.

Considérons une famille de développantes d'astroïde Γ; la première des deux courbes envisagées dans l'énoncé est une courbe limite Γ_0 entre les courbes Γ à rebroussements et celles sans rebroussements. On nous a montré (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 29) que, si l'on projette un point variable $M(\alpha, \beta)$ de la parabole

$$2ax = a^2 - y^2,$$

en P sur la corde focale principale $x = 0$, la courbe considérée est l'enveloppe du cercle de centre P, de rayon PM. Les rayons de cercle qui passent par les points caractéristiques font avec la direction positive de l'axe y des angles θ tels que $\cos\theta = \beta : a$. La courbe Γ_0 peut donc être définie par les équations paramétriques

$$x = \alpha \sin\theta = \frac{1}{2a^2}(a^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$y = \beta + \alpha\cos\theta = \frac{\beta}{2a^2}(8a^2 - \beta^2).$$

En posant

$$\beta : a = z = \sin\varphi,$$

on voit que l'aire de cette courbe a pour expression

$$\begin{aligned} 4\int_0^{\frac{a}{2}} y\,dx &= -\frac{3}{a^4}\int_a^0 \beta^2(3a^2-\beta^2)\sqrt{a^2-\beta^2}\,d\beta \\ &= 3a^2\int_0^1 z^2(3-z^2)\sqrt{1-z^2}\,dz \\ &= 3a^2\left(3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\right) \\ &= 3a^2\left(\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{32}\pi\right) = \frac{15}{32}\pi a^2. \end{aligned}$$

Si x, y désignent maintenant les coordonnées de la projection de l'origine sur l'une des tangentes à Γ_0 correspondant au point M de la parabole, on a

$$\frac{x^2}{y^2} = \operatorname{tang}^2\theta = \frac{a^2 - \beta^2}{\beta^2},$$

$$y = \beta + \alpha\cos\theta - \beta\sin^2\theta = \frac{\beta}{2a^2}(a^2 + \beta^2).$$

Par conséquent,

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2y^2}{\beta^2}, \qquad x^2 + 2y^2 = \frac{y^2}{\beta^2}(a^2 + \beta^2) = \frac{2a^2y^3}{\beta^3};$$

l'équation de la podaire est donc

$$4(x^2 + y^2)^3 - a^2(x^2 + 2y^2)^2 = 0.$$

D'après un théorème de Catalan, l'aire d'une courbe convexe vaut la différence des aires de sa podaire et de sa contre-podaire par rapport à un même point intérieur à la courbe. La développée de Γ_0 est une astroïde dont le cercle C a pour rayon $\frac{a}{2}$; la rosace à quatre branches, podaire de cet astroïde, a pour aire la moitié de celle du cercle C, c'est-à-dire $\frac{1}{8}\pi a^2$. Par suite, l'aire de la podaire de Γ_0 vaut

$$\left(\frac{15}{32} + \frac{1}{8}\right)\pi a^2 = \frac{19}{32}\pi a^2;$$

les aires de Γ_0 et de sa podaire sont donc dans le rapport de 15 à 19.

1775.

(1893, p. 387; 1916, p. 31.)

On donne un point O *et une droite* D *fixes. Une figure de grandeur invariable formée d'un point* ω *et d'une droite* Δ *se déplace de façon que* ω *reste sur* D *et que* Δ, *s'appuyant toujours sur cette droite, passe toujours par* O. *On demande le lieu d'un point arbitraire du plan de la figure mobile. Examiner les différentes formes de ce lieu, lorsqu'on fait varier les données.* MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D; prenons pour origine P, pour axes fixes $\overline{POx}$ et la droite $D \equiv \overline{Py}$. Soit P_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de ω sur Δ, prenons pour axes mobiles $\overline{\omega P_1 X}$ et $OP_1Y \equiv \Delta$.

Si X et Y sont les coordonnées relatives, x et y les coordonnées absolues d'un point M de la figure mobile, on a évidemment, en posant $\overline{P_1\omega} = -l$, $\overline{PO} = a$,

$$x = l\cos\varphi + X\cos\varphi - Y\sin\varphi,$$

$$y = \left(\frac{a - l\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\cos\varphi + X\sin\varphi + Y\cos\varphi,$$

équations qui définissent en général une quartique unicursale. Nous n'entrerons pas dans l'étude générale de cette courbe et nous nous bornerons à signaler que si $a = l$, $X = -\frac{l}{2}$, $Y = 0$, le point M décrit une *cissoïde droite* ayant pour point de rebroussement le milieu O′ de OP, qui est la tangente de rebroussement, l'asymptote étant la parallèle à D menée par le point O″, symétrique de O′ par rapport à P. Cette génération de la cissoïde droite est du reste bien connue.

1839.

(1900, p. 190.)

Soient AA′, BB′ *les axes d'une ellipse telle que l'angle* BAB′ *soit égal à* $\frac{k\pi}{n}$, *k et n étant premiers entre eux;* P *un point de* AA′ *ou de ses prolongements;* $P_0M_0P_1M_1$ ... *une ligne brisée rectangulaire dont les éléments font avec* AA′ *les angles* $+\frac{\pi}{4}$, *dont les sommets* P_0, P_1, ... *sont sur* AA′, *les sommets* M_0, M_1, ... *sont sur l'ellipse et tellement placés que deux sommets successifs* M_i, M_{i+1} *ne soient pas symétriques par rapport à* AA′; P_0 *coïncide avec* P_n *si k est pair; avec* P_{2n} *si k est impair.*

LÉMERAY.

Solution
Par l'Auteur.

Une erreur typographique a obscurci la question. Il faut *lire*, ligne 5, $\frac{\pi}{4}$ *au lieu de* $\frac{\pi}{n}$ (1). L'équation de l'ellipse, rapportée à ses axes, est

$$x^2 + \frac{y^2}{\tang^2 \frac{K\pi}{2n}} = a^2. \tag{1}$$

Faisons tourner les axes de 45°, de manière que le grand axe de l'ellipse devienne la bissectrice positive des nouveaux axes de coordonnées; les lignes obliques aux axes de l'ellipse sont maintenant parallèles aux axes de coordonnées; désignons par ξ et η les nouvelles coordonnées; on a

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}};$$

l'équation (1) devient

$$\eta^2 - 2\xi\eta \cos\frac{K\pi}{n} + \xi^2 - 2a^2 \sin^2\frac{K\pi}{2n} = 0. \tag{2}$$

Cherchons les limites de ξ. Pour que les deux valeurs de η soient égales, il faut avoir

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\cos\frac{K\pi}{2n}} = A, \qquad a = A\sqrt{2}\cos\frac{K\pi}{2n}.$$

Comme tout est symétrique par rapport à la bissectrice positive, η a les mêmes limites.

L'équation (2) s'écrit

$$\eta^2 - 2\xi\eta \cos\frac{K\pi}{n} + \xi^2 - A^2 \sin^2\frac{K\pi}{n} = 0,$$

---

(1) Cette correction est faite dans la reproduction de l'énoncé qui précède.

d'où l'on tire

$$\frac{\eta}{\mathrm{A}} = \frac{\xi}{\mathrm{A}} \cos \frac{\mathrm{K}\pi}{n} \pm \sin \frac{\mathrm{K}\pi}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\mathrm{A}}\right)^2}.$$

Posons

$$\frac{\xi}{\mathrm{A}} = \sin\varphi.$$

Il vient

$$\frac{\eta}{\mathrm{A}} = \sin\left(\varphi \pm \frac{\mathrm{K}\eta}{n}\right),$$

ce qui démontre la proposition.

1909.

(1901, p. 48.)

On compare à un thermomètre centigrade un autre thermomètre marquant aussi 0° *et* 100° *dans la glace fondante et l'eau bouillante, mais gradué de telle sorte que, quand on passe de* $\theta°$ *à* $(\mathrm{B}+1)°$, *le volume* $\mathrm{V_B}$ *s'accroît d'une fraction constante* β, *non du volume à* 0°, *mais du volume à* $\theta°$. *Quelle est la température centigrade* t *d'un milieu pour lequel la lecture sur le second thermomètre dépasse de* T *la lecture faite sur le premier?*

LÉMERAY.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Les deux thermomètres sont identiques, sauf pour la graduation. Soit $h = 100\mathrm{K}$ la distance entre les deux repères 0 et 100, communs aux deux instruments. Écrivons a au lieu de 100. On a les trois conditions

$$(1+\beta)^a = 1 + \mathrm{K}a, \qquad (1+\beta)^\theta = 1 + \mathrm{K}t, \qquad \theta = \mathrm{T} + t.$$

Éliminons θ et β en élevant les deux membres de la première équation à la puissance $\frac{1}{a}$; ceux de la seconde à la puissance $\frac{1}{\theta}$; il reste

$$(1+\mathrm{K}a)^{\frac{1}{a}} = (1+\mathrm{K}t)^{\frac{1}{\mathrm{T}+t}},$$

qu'on peut écrire

$$(1+Ka)^{\frac{T}{a}}\left[(1+Ka)^{\frac{1}{a}}\right]^{t}=1+K\ ;$$

posons

$$1+Kt=x,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{x}{K}-\frac{1}{K},$$

$$(1+Ka)^{\frac{KT-1}{Ka}}\left[(1+Ka)^{\frac{1}{Ka}}\right]^{x}=x.$$

Posons

$$(1+Ka)^{\frac{1}{Ka}(KT-1)}=A,\qquad (1+Ka)^{\frac{1}{Ka}}=B=(1+h)^{\frac{1}{h}};$$

il vient

$$AB^{x}=x\qquad \text{ou}\qquad \frac{x}{A}=[B^{A}]^{\frac{x}{A}}.$$

Posant enfin

$$\frac{x}{a}=y,\qquad B^{A}=C,$$

on est ramené à la forme

$$y=C^{y},\qquad C=B^{B^{KT-1}}.$$

Pour la résolution de ce type d'équations, *voir* 1896, p. 548; 1897, p. 54 : *Sur les racines de l'équation* $x=a^{x}$.

1910.

(1901, p. 95.)

On donne l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

On considère deux génératrices G *et* K *de même système dont les pieds sur le plan de l'ellipse de gorge sont aux extrémités d'un même diamètre :*

1° *Trouver les équations de la droite* Δ *perpendiculaire commune à* G *et* K;

2° *Trouver la surface lieu de* Δ (*conoïde de Plucker*);

3° *Trouver sur cette surface le lieu des points tels que les plans tangents fassent un angle donné* θ *avec le plan de l'ellipse de gorge. Construire les projections de ce lieu sur les plans de coordonnées.* CH. BIOCHE.

Solution

Par un Abonné.

En désignant par φ un paramètre variable, les équations des génératrices G et K sont

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi$$

et

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \qquad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi.$$

Les équations de leur perpendiculaire commune sont

$$\begin{aligned} cax\cos\varphi + cby\sin\varphi + z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)& \\ - c(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi &= 0, \\ cax\cos\varphi + cby\sin\varphi - z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)& \\ + c(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit, en additionnant et retranchant,

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = 0,$$
$$z(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) - c(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

En éliminant le paramètre φ entre ces deux équations, on obtient, pour la surface engendrée par la perpendiculaire commune, l'équation

$$abz(x^2 + y^2) + c(a^2 - b^2)xy = 0;$$

c'est un conoïde de Plucker.

Désignons par V l'angle que fait la normale à cette surface en un point avec l'axe des z, nous avons

$$\cos^2 V = \frac{a^2b^2(x^2+y^2)^2}{\left\{\begin{array}{l} a^2b^2(x^2+y^2)^2 + 4a^2b^2z^2(x^2y^2) \\ \quad + c^2(a^2-b^2)^2(x^2+y^2) + 8abc(a^2-b^2)xyz \end{array}\right\}}.$$

Remplaçons dans cette expression xy par sa valeur tracée de l'équation du conoïde, nous obtenons, après quelques réductions,

$$a^2b^2\tang^2 V(x^2 + y^2) + 4a^2b^2z^2 - c^2(a^2 - b^2)^2 = 0;$$

ce qui représente une surface du second degré, de révolution autour de l'axe des z. La courbe est l'intersection de cette surface et du conoïde; elle est, par suite, du sixième degré.

Pour obtenir l'équation de sa projection sur le plan des xy, nous tirons de l'équation du conoïde

$$abz = -\frac{c(a^2 - b^2)xy}{x^2 + y^2},$$

et en portant cette valeur dans l'équation de la surfaee du second degré, nous obtenons

$$a^2 b^2 \operatorname{tang}^2 V (x^2 + y^2)^3 - c^2 (a^2 - b^2)^2 \{(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2\} = 0;$$

ou, en passant aux coordonnées polaires ρ et ω,

$$\rho^2 = \frac{c^2 (a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2 \operatorname{tang}^2 V} \cos^2 2\omega.$$

C'est l'équation d'une rosace.

La projection de la courbe, sur le plan des yz, s'obtient en éliminant x entre les équations des deux surfaces, ce qui ne présente aucune difficulté. On arrive ainsi à l'équation

$$\begin{aligned} 16 a^4 b^4 z^6 - a^2 b^2 c^2 (a^2 - b^2)^2 &(8 z^4 - \operatorname{tang}^4 V y^4) \\ &+ 4 a^2 b^2 c^2 (a^2 - b^2)^2 \operatorname{tang}^2 V y^2 z^2 \\ &+ c^4 (a^2 - b^2)^4 (z^2 - \operatorname{tang}^2 V y^2) = 0. \end{aligned}$$

C'est une courbe du sixième degré ayant un point double à l'origine et toutes ses direcfions asymptotiques parallèles à l'axe des y.

L'équation étant du second degré en y^2, on peut la résoudre par rapport à cette inconnue et discuter la courbe par cette méthode. Mais l'équation est trop compliquée pour obtenir des résultats simples et remarquables.

2161.

(1910, p. 336.)

Une pyramide régulière, de sommet S, *a pour base un rectangle* ABCD. *On considère le paraboloïde de révolution de sommet* S *qui passe par le cercle circonscrit au rectangle* ABCD *et le parallélépipède dont ce rectangle* *est la section droite. Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci.* M. D'OCAGNE.

DEUXIÈME SOLUTION (1)

PAR UN ABONNÉ.

Soient

$$(\sigma) \qquad y^2 = 4mz$$

la parabole qu'on fait tourner autour de l'axe des z, h la hauteur de la pyramide, r le rayon du cercle ABCD, $2a$ et $2b$ les côtés du rectangle. Alors on a

$$a^2 + b^2 = r^2 = 4mh.$$

La section du paraboloïde par un plan parallèle à l'axe, à la distance $r\sin\theta$, est une parabole égale à (σ). Le plan de base limite cette parabole par une corde de longueur $2r\cos\theta$; l'aire de la section est donc $r^3\cos^3\theta = 3m$, et le volume compris entre deux sections parallèles θ_1, θ_2 est donné par l'intégrale

$$V(\theta_2, \theta_1) = \frac{r^4}{3m}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^4\theta \, d\theta.$$

Mettons $a = r\sin\alpha$; alors $b = r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, et le volume demandé est

$$\begin{aligned}
V &= V(\alpha, -\alpha) - 2V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
&= \frac{2r^4}{3m}\int_0^{\alpha} (\cos^4\theta - \sin^4\theta)\, d\theta \\
&= \frac{r^4}{3m}\sin 2\alpha \\
&= \frac{8abh}{3}.
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Autre solution, par M. M.-F. EGAN.

---

(1) Voir **1911**, p. 288.

2258.

(1915, p. 432.)

Soient (1), (2), (3), (4) *les quatre côtés d'un quadrilatère complet et* ABC *le triangle formé par les diagonales. Soient* A_1, A_2, A_3, A_4 *les points d'intersection respectifs du côté opposé* BC *avec les parallèles menées du sommet* A *à* (1), (2), (3), (4); *et supposons qu'on forme les points analogues* B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4. *Alors les quatre systèmes de trois points* $A_2B_3C_4$, $A_1B_4C_3$, $A_4B_1C_2$, $A_3B_2C_1$ *sont respectivement en ligne droite* (1'), (2'), (3'), (4') *et ces quatre lignes droites sont parallèles entre elles.*

T. Ono.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Nous supposerons que les côtés (1) et (2), (3) et (4) sont opposés, et α, β, γ, δ les sommets (1, 4), (1, 3), (3, 2), (2, 4); soit α' l'intersection de $\alpha\delta$ avec BC; menons la droite AA_3 et soit I son intersection avec $\alpha\delta$; le triangle CAA_3, coupé par la transversale $\alpha I \alpha'$, donne

$$\frac{\alpha' C}{\alpha' A_3} \frac{IA_3}{IA} \frac{\alpha A}{\alpha C} = 1;$$

or on a

$$\frac{\alpha' C}{\alpha' A_3} \frac{\gamma C}{\gamma A} \frac{\alpha C}{\alpha A},$$

la division $(\alpha A \gamma C)$ étant harmonique, d'où

$$IA_3 = IA.$$

On en déduit que les trois points A_3, B_2, C_1 sont sur la quatrième tangente commune aux coniques inscrites dans ABC et ayant leurs centres sur (4).

Soit ω le point de BC où se coupent (1) et (2); ce point ω est le centre d'une conique inscrite dans ABC et tangente à $A_1B_4C_3$, $A_2B_3C_4$; si AA_1 coupe (2) en I, AA_2 coupe (1) en I', on a

$$\omega A_1 = \omega A_2 = II',$$

ce qui montre que les droites $A_1B_4C_3$, $A_2B_3C_4$, tangentes menées à une conique par deux points symétriques par rapport au centre de celle-ci et situés sur une asymptote, sont parallèles.

Autre solution par M. J. LEMAIRE.

2260.

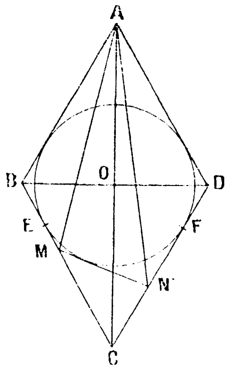
(1915, p. 477.)

On donne un losange ABCD *et le cercle inscrit* O. *Une tangente variable rencontre les côtés* BC *et* CD *en* M *et* N, *entre* B *et* C, C *et* D. *Montrer que l'aire du triangle* AMN *reste constante.* V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Si E et F sont les points où CB et CD touchent le cercle O,



nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\text{aire AMN} &= \text{aire AECF} - \text{aire AEM} - \text{aire AFN} - \text{aire CMN},\\ &= \text{aire AECF} - 2\,\text{aire OEM} - 2\,\text{aire OFN} - \text{aire CMN},\\ &= \text{aire AECF} - \text{aire OEMNF} - \text{aire CMN},\\ &= \text{aire AECF} - \text{aire OECF} = \text{const.}\end{aligned}$$

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, R. GOORMAGHTIGH, T. ONO et *un Abonné*.

2261.

(1915, p. 477.)

On considère un tétraèdre SABC *trirectangle en* S *et une sphère quelconque* Γ *passant par* A, B, C *et recoupant les arêtes* SA, SB, SC *en* α, β, γ. *Montrer que :*

1° *Le sommet* S, *l'orthocentre du triangle* $\alpha\beta\gamma$, *le point de concours des médianes du triangle* ABC *et le centre* O *de la sphère circonscrite au tétraèdre* SABC *sont en ligne droite ;*

2° *Le sommet* S, *l'orthocentre du triangle* ABC, *le point de concours des médianes du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *et le centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $S\alpha\beta\gamma$ *sont en ligne droite.*

V. THÉBAULT.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient a b, c les milieux de BC, CA, AB; a', b', c' ceux de SA, SB, SC. Les perpendiculaires élevées en a, b, c sur les faces SBC, SCA, SAB concourent au centre O de la sphère SABC. Dans le parallélépipède $Sa'b'c'abcO$, la diagonale OS coupe le plan abc au centre de gravité G du triangle abc, qui est aussi celui du triangle ABC.

Si l'on prend pour centre d'inversion le point S et pour puissance celle de S par rapport à Γ, le plan $\alpha\beta\gamma$ est l'inverse de la sphère SABC ; la droite SGO est donc perpendiculaire à ce plan et renferme, par suite, l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$, puisque le tétraèdre $S\alpha\beta\gamma$ est trirectangle en S.

La proposition du 2° est identique à la première si l'on prend pour tétraèdre fondamental le tétraèdre $S\alpha\beta\gamma$.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST, T. ONO et *un Abonné.*

2262.

(1915, p. 477.)

Soient D, E, F *les points de contact du cercle inscrit* I *avec* BC, CA, AB, *et* A_1, B_1, C_1 *les milieux des côtés d'un triangle* ABC :

1° *Calculer les distances du point* φ *de Feuerbach aux côtés du triangle ;*

2° *Démontrer la relation*

$$\varphi D \cos\frac{A}{2} = \varphi E \cos\frac{B}{2} + \varphi F \cos\frac{C}{2};$$

3° *Montrer que la perpendiculaire sur* AD *menée du point commun à* B_1C_1 *et* EF *passe au milieu du rayon* ID' *du cercle.* D' *étant l'extrémité du diamètre* DID'.

V. THÉBAULT.

SOLUTION
Par M. R. GOORMAGHTIGH.

1° Les coordonnées normales relatives du centre de la conique circonscrite $\Sigma \frac{\alpha}{x} = 0$ sont

$$\alpha(b\beta + c\gamma - a\alpha), \quad \beta(c\gamma + a\alpha - b\beta), \quad \gamma(a\alpha + b\beta - c\gamma);$$

celles du point de Feuerbach φ, centre de l'hyperbole de Feuerbach

$$\Sigma(p-a)(b-c)yz = 0,$$

sont donc

$$\frac{1}{a}(p-a)(b-c)^2, \quad \frac{1}{b}(p-b)(c-a)^2, \quad \frac{1}{c}(p-c)(a-b)^2.$$

En remarquant que

$$\Sigma(p-a)(b-c)^2 = 4S(R-2r),$$

on déduit de là comme coordonnées absolues de φ

$$\frac{(p-a)(b-c)^2}{2a(R-2r)}, \quad \frac{(p-b)(c-a)^2}{2b(R-2r)}, \quad \frac{(p-c)(a-b)^2}{2c(R-2r)}.$$

2° La relation proposée exprime que φ appartient au cercle inscrit ; il existe une relation analogue pour tout point de ce cercle. Elle résulte du théorème de Ptolémée, si l'on observe que les côtés du triangle DEF sont proportionnels à

$$\cos\frac{1}{2}A, \quad \cos\frac{1}{2}B, \quad \cos\frac{1}{2}C;$$

la relation proposée suppose que a soit le côté moyen du triangle ABC.

On peut d'ailleurs obtenir aisément des relations analogues à la relation proposée, mais qui ne s'appliquent qu'au point φ. Appelons d, e, f les côtés du triangle DEF ; le point φ étant l'inverse, par rapport au triangle DEF, du point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite d'Euler OI de ce triangle, les coordonnées normales de φ par rapport au triangle DEF sont

$$\frac{d}{e^2-f^2}, \quad \frac{e}{f^2-d^2}, \quad \frac{f}{d^2-e^2}.$$

D'après une propriété connue, les distances φD, φE, φF sont inversement proportionnelles à ces coordonnées; on a donc

$$\varphi D : \varphi E : \varphi F = \frac{\cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} : \frac{\cos^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} : \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

ou encore

$$\varphi D : \varphi E : \varphi F = \frac{b-c}{\sin\frac{A}{2}} : \frac{c-a}{\sin\frac{B}{2}} : \frac{a-b}{\sin\frac{C}{2}}.$$

On en déduit, par exemple, en supposant encore que a soit le côté moyen,

$$\varphi D \sin\frac{A}{2} = \varphi E \sin\frac{B}{2} + \varphi F \sin\frac{C}{2},$$

$$a\varphi D \sin\frac{A}{2} = b\varphi E \sin\frac{B}{2} + c\varphi F \sin\frac{C}{2},$$

$$\varphi D \cos^3\frac{A}{2} = \varphi E \cos^3\frac{B}{2} + \varphi F \cos^3\frac{C}{2}.$$

3° Soient L et N les milieux de AD et AI, T le point d'intersection des droites EF et B_1C_1, D″ le point où la perpendiculaire menée de T à AD rencontre le diamètre DID′ du cercle inscrit. D'après les théorèmes d'Hamilton et de Mannheim, le point φ est à l'intersection de DT et D′N. Le point D″ étant l'orthocentre du triangle DLT, la droite LD″ est perpendiculaire à DT, et, par suite, parallèle à φD′. Or, si l'on appelle M le point d'intersection de AD avec D′φ, on voit, en considérant le triangle ADI coupé par la transversale MND′, que M est au tiers de AD à partir de A. Il résulte de là que L est au quart de MD à partir de M; par conséquent, D″ est au quart de D′D à partir de D′, donc au milieu de D′I.

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist et T. Ono.

QUESTIONS.

2359. On considère les cubiques circulaires Γ rencontrées dans la deuxième partie de la composition de géométrie analytique de l'École Polytechnique en 1917, savoir celles que définit l'équation

$$x(x^2+y^2)-(h^2-a^2)x-2ahy=0,$$

où a est regardé comme fixe et h comme variable.

On appelle H et H′ les points de contact de chaque cubique Γ avec ses tangentes parallèles à Oy (1), I et I′ ses points de contact avec ses tangentes parallèles à Ox, C et C′ ses centres de courbure répondant à H et H′. On demande :

1° De trouver le lieu des points I et I′ et de déterminer, en particulier, les points de ce lieu où la tangente est parallèle à Oy en faisant voir comment ces derniers points sont liés aux points H et H′ correspondants ;

2° De trouver le lieu des points C et C′ et de donner la construction géométrique qui permet de déduire chaque point C du point H correspondant. M. D'OCAGNE.

2360 On considère l'hyperboloïde de révolution à une nappe

$$n^2+y^2+z^2-2yz-2zn-2xy=1.$$

Montrer que si p, q, r sont trois nombres arbitraires deux à deux différents, les coordonnées d'un point courant de cet hyperboloïde peuvent se noter :

$$x=\frac{p(q-r)}{(r-p)(p-q)},$$

$$y=\frac{q(r-p)}{(p-q)(q-r)},$$

$$z=\frac{r(p-q)}{(q-r)(r-p)}.$$

On trace dans un plan (H) un triangle de référence équilatéral.

(1) *Voir* la figure, 1917, p. 255.

p, q, r désignant les coordonnées trilinéaires normales d'un point du plan, étudier la correspondance entre le point (p, q, r) du plan et le point x, y, z de l'hyperboloïde qui correspond aux valeurs p, q, r des trois paramètres. Considérer en particulier les courbes planes de (H), qui correspondent aux sections planes de l'hyperboloïde, aux parallèles et au cercle de gorge notamment.

Montrer que les coordonnées d'un point du cône asymptote peuvent se noter :

$$x = (\mu - \nu)^2, \qquad y = (\nu - \lambda)^2, \qquad z = (\lambda - \mu)^2,$$

λ, μ, ν étant tross nombres arbitraires.

Étudier les génératrices de l'hyperboloïde, indiquer les paramètres tels que p, q, r qui appartiennent aux points des deux génératrices qui sont issues du point $p_0 q_0 r_0$ de la surface.

Quelle est dans le plan (H) la représentation des générations de la surface ?

On considère la cubique gauche tracée sur l'hyperboloïde qui correspond à la condition

$$p + q + r = 0.$$

Étudier sa projection sur l'un des plans de coordonnées. Montrer qne $x = y = z$ est pour elle un axe de symétrie ternaire. AMSLER.

ERRATA.

1917, page 275, ligne 14 (en remontant), *au lieu de* « spirale logarithmique même », *lire* « même spirale logarithmique ».

1917, page 403, ligne 10 (en remontant), *au lieu de* donnent, *lire* donne.

1917, page 405, formule (18), *au lieu de* $(a^2+b^2)^4$, *lire* $(a^2+b^2)^3$.

1917, page 407, ligne 2, équation (30), *supprimer* $= 0$.

1917, page 408, ligne 1, *au lieu de* à l'équation, *lire* à l'ellipse ayant pour équation.

1917, page 440, ligne 15, *au lieu de* $x(n+1)$, *lire* $x(x+1)$.

1918, page 34, ligne dernière, la note doit être reportée page 35.

[M¹1f]

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR DES SYSTÈMES DE COURBES ET DE POINTS;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Considérons un faisceau linéaire de courbes représenté par l'équation
$$S + \lambda\Sigma = 0,$$
et prenons trois de ces courbes.

Dans l'équation

$$(1)\qquad \lambda_1(S + \lambda\Sigma) + \lambda_2(S + \lambda'\Sigma) + \lambda_3(S + \lambda''\Sigma) = 0,$$

on peut disposer de λ_1, λ_2, λ_3 de manière que cette équation soit une identité; il faut pour cela que l'on ait
$$\begin{aligned} \lambda_1 \;+ \lambda_2 \;+ \lambda_3 \;&= 0,\\ \lambda_1\lambda + \lambda_2\lambda' + \lambda_3\lambda'' &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est toujours possible. Adoptons pour λ_1, λ_2, λ_3 un des systèmes de valeurs qui satisfont à ces deux relations; pour ce système, l'équation (1) représente une courbe passant par un point quelconque du plan; si nous considérons trois points quelconques, de coordonnées x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, on aura donc

$$\begin{aligned} &\lambda_1[S_1 + \lambda\Sigma_1] + \lambda_2[S_1 + \lambda'\Sigma_1] + \lambda_3[S_1 + \lambda''\Sigma_1] = 0,\\ &\lambda_1[S_2 + \lambda\Sigma_2] + \lambda_2[S_2 + \lambda'\Sigma_2] + \lambda_3[S_2 + \lambda''\Sigma_2] = 0,\\ &\lambda_1[S_3 + \lambda\Sigma_3] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que le déterminant formé avec les quantités $S_1 + \lambda\Sigma_1$, $S_1 + \lambda'\Sigma_1$, ..., $S_2 + \lambda\Sigma_2$, ... est nul, et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le déterminant formé avec les puissances de trois points quelconques du plan, par rapport à trois courbes faisant partie d'un faisceau linéaire, est nul.*

Le théorème, très général, s'applique, en particulier, à trois coniques passant par quatre points, à trois cercles ayant même axe radical, etc.

Considérons, de même, quatre courbes faisant partie d'un même réseau linéaire et quatre points du plan, nous arriverons, par le même raisonnement que plus haut, au résultat suivant : le déterminant formé par les puissances de quatre points du plan, par rapport à quatre courbes faisant partie d'un réseau linéaire, est nul. De même si l'on considère quatre courbes ayant pour équations :

$$\lambda^2 S + \lambda \Sigma + T = 0,$$
$$\lambda'^2 S + \lambda' \Sigma + T = 0,$$
$$\lambda''^2 S + \ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$\lambda'''^2 S + \ldots\ldots\ldots = 0$$

($S = 0$, $\Sigma = 0$, $T = 0$ étant les équations de trois courbes quelconques), le déterminant formé par les puissances de quatre points quelconques du plan, par rapport à ces quatre courbes, est nul.

On peut, évidemment, généraliser, et l'on aura, par exemple, les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le déterminant formé par les puissances de sept points du plan, par rapport à sept coniques quelconques, est nul.*

THÉORÈME II. — *Le déterminant formé par les puissances de cinq points du plan, par rapport à cinq cercles quelconques, est nul.*

Les cas particuliers sont en nombre, pour ainsi dire, illimité.

On a, par exemple, les théorèmes suivants :

Le déterminant formé par les puissances de quatre points, par rapport à quatre cercles qui ont un point commun, est nul.

Le déterminant formé par les puissances de quatre points, par rapport aux couples des côtés d'un triangle pris deux à deux et au cercle circonscrit à ce triangle, est nul.

Parmi ces quatre points, supposons que trois soient sur le cercle circonscrit; soient $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations des trois côtés du triangle; le résultat sera le suivant :

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 & A_1 C_1 & B_1 C_1 \\ A_2 B_2 & A_2 C_2 & B_2 C_2 \\ A_3 B_3 & A_3 C_3 & B_3 C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$A_1 B_1$ désignant le produit des distances du point de coordonnées x, y, aux deux droites $A = 0$, $B = 0$, et ainsi de suite. Le résultat se déduit, d'ailleurs, facilement, de l'équation du cercle circonscrit en coordonnées trilinéaires.

Nous allons particulariser encore et appliquer les raisonnements précédents aux relations entre les distances de n points du plan.

II. Soient $S = 0$, $\Sigma = 0$, $T = 0$ les équations de trois cercles, en coordonnées rectangulaires; nous supposerons que le coefficient de $(x^2 + y^2)$ soit l'unité, dans chacune de ces équations. L'équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 \Sigma + \lambda_3 T + \lambda_4 = 0$$

représente un cercle quelconque; écrivons qu'il passe par trois points donnés, et qu'il se réduit à une droite, nous aurons

$$\begin{aligned}
\lambda_1 S_1 + \lambda_2 \Sigma_1 + \lambda_3 T_1 + \lambda_4 &= 0,\\
\lambda_1 S_2 + \lambda_2 \Sigma_2 + \ldots\ldots\ldots &= 0,\\
\lambda_1 S_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0,\\
\lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \lambda_3 \ldots\ldots &= 0.
\end{aligned}$$

Donc, les puissances de trois points en ligne droite, par rapport à trois cercles, sont liées par l'équation

$$\begin{vmatrix} S_1 & \Sigma_1 & T_1 & 1\\ S_2 & \Sigma_2 & T_2 & 1\\ S_3 & \Sigma_3 & T_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1° Si les trois cercles se réduisent à des points confondus avec les trois points donnés, on aura, en désignant par $\overline{12}^2$ le carré de la distance des points (1) et (2),

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & 1\\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & 1\\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$$

ou

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a-b-c) = 0,$$

a, b, c désignant les longueurs des côtés du triangle formé par les trois points, triangle réduit ici à une droite.

2° Si les trois cercles se réduisent à des points et que deux de ces cercles-points se confondent avec deux des points donnés A, B, nous aurons

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{D1}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{D2}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & \overline{D3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\overline{DA}^2.BC + \overline{DB}^2.CA + \overline{DC}^2.AB + AB.BC.CA = 0,$$

ce qui est le théorème de Stewart.

3° Exprimons que le cercle qui a pour équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 \Sigma + \lambda_3 T + \lambda_4 = 0$$

passe par quatre points, nous aurons

$$\begin{vmatrix} S_1 & \Sigma_1 & T_1 & 1 \\ S_2 & \Sigma_2 & T_2 & 1 \\ S_3 & \Sigma_3 & T_3 & 1 \\ S_4 & \Sigma_4 & T_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les puissances de quatre points d'un cercle par rapport à trois autres cercles.

Supposons que les trois cercles S, Σ, T se réduisent à trois points, confondus avec trois des quatre points donnés, nous aurons

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & 0 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$a^2 a'^2(b'^2 + c'^2 - a'^2) + b^2 b'^2(c'^2 + a'^2 - b'^2) \\ + c^2 c'^2(a'^2 + b'^2 - c'^2) - 2a'^2 b'^2 c'^2 = 0,$$

relation entre les carrés des distances mutuelles de quatre points d'une circonférence.

On obtiendra, évidemment, d'autres relations analogues en faisant les substitutions

$$\left|\begin{matrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ b' & c & a' & b & c' & a \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ c' & a & b' & c & a' & b \end{matrix}\right|,$$

et ainsi de suite.

Deux d'entre elles suffiront à les déterminer toutes, car il y a quatre arbitraires parmi les six distances.

4° L'équation $\lambda_1 S + \lambda_2 T + \lambda_3 U + \lambda_4 V = 0$ représente un cercle quelconque; écrivons qu'il passe par quatre points donnés, nous aurons

$$\left|\begin{matrix} S_1 & T_1 & U_1 & V_1 \\ S_2 & T_2 & U_2 & V_2 \\ S_3 & T_3 & \ldots & \ldots \\ S_4 & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}\right| = 0,$$

ce qui exprime que le déterminant formé par les puissances de quatre points d'un cercle, par rapport à quatre autres cercles du plan, est nul.

Si les quatre cercles sont des cercles-points, confondus avec les quatre points donnés, on aura

$$\left|\begin{matrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 \end{matrix}\right| = 0$$

ou

$$a^4 a'^4 + b^4 b'^4 + c^4 c'^4 - 2a^2 a'^2 b^2 b'^2 \ldots = 0,$$

en désignant par a, a', b, b', ... les distances mutuelles des quatre points; cette égalité peut s'écrire

$$\begin{gathered}(aa' + bb' + cc')(aa' + bb' - cc') \\ + (aa' - bb' + cc')(aa' - cc' - bb') = 0.\end{gathered}$$

En égalant à zéro l'un quelconque de ces facteurs, on a le théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit.

III. L'équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 T + \lambda_3 U + \lambda_4 V + \lambda_5 = 0$$

représente un cercle quelconque. Nous pouvons disposer des λ de façon que ce soit une identité; on aura, en particulier,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

D'autre part, en adoptant les valeurs de λ qui font de l'équation une identité, nous pourrons faire passer ce cercle par quatre points quelconques du plan; nous aurons donc la relation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} S_1 & T_1 & U_1 & V_1 & 1 \\ S_2 & T_2 & U_2 & V_2 & 1 \\ S_3 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ S_4 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

entre les puissances de quatre points quelconques du plan par rapport à quatre cercles quelconques.

Si les quatre cercles se réduisent à des points confondus avec les quatre points donnés, on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 & 1 \\ \overline{41}^2 & \overline{42}^2 & \overline{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

relation entre les distances mutuelles de quatre points quelconques du plan, ou

$$\Sigma a^2 a'^2(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)$$
$$-a^2b^2c'^2-a^2c^2b'^2-b^2c^2a'^2-a'^2b'^2c'^2=0,$$

en appelant a, b, c les distances d'un des points aux trois autres, et a', b', c' les autres distances correspondantes.

Si V désigne le volume du tétraèdre dont les arêtes ont pour longueur a, b, c, a', b', c', le premier membre de la relation est égal à $144.V^2$; il admet les substitutions

$$\left|\begin{matrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ a' & b' & c & a & b & c' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ a & b' & c' & a' & b & c \end{matrix}\right|,$$
$$\left|\begin{matrix} a & b & c & a' & b' & c' \\ a' & b & c' & a & b' & c \end{matrix}\right|, \quad \ldots \text{ (en tout 24)},$$

ce qui se vérifie immédiatement.

Le premier membre peut aussi s'écrire

$$F = 4a^2b^2c^2 - \Sigma a^2(b^2+c^2-a'^2)^2$$
$$+(b^2+c^2-a'^2)(c^2+a^2-b'^2)(a^2+b^2-c'^2).$$

En particulier, si les points A, B, C sont en ligne droite, on a

$$b' = a' + c',$$

et l'on trouve que $-$ F est le carré du polynome

$$b^2(a'+c')+a'c'(a'+c')-a^2a'-c^2c',$$

on retrouve ainsi la relation de Stewart.

Si, dans la relation (1), on suppose que le cercle S passe par les points 1, 2, 3, le cercle T par les points 2, 3, 4 et ainsi de suite, on arrive au résultat suivant :

$$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{U_2}+\frac{1}{V_3}+\frac{1}{S_4}=0,$$

c'est-à-dire que, si l'on considère quatre points quelconques, la somme des inverses des puissances de chacun d'eux, par rapport au cercle qui passe par les trois autres, est nulle.

IV. Considérons trois cercles représentés par $S = 0$, $T = 0$, $U = 0$; soit $C = 0$ l'équation du cercle orthogonal aux trois cercles; l'équation

$$\lambda_1 S + \lambda_2 T + \lambda_3 U = 0$$

représente un cercle orthogonal au cercle C. Exprimons qu'il passe par trois points donnés, nous aurons

$$\begin{vmatrix} S_1 & T_1 & U_1 \\ S_2 & T_2 & U_2 \\ S_3 & T_3 & U_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, si quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, le déterminant formé par les puissances de trois points d'un des cercles, par rapport aux trois autres cercles, est nul.

En particulier si les cercles S, T, U sont des cercles-points, C est le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points, et l'on a le résultat suivant : si deux cercles sont orthogonaux, et si l'on prend trois points sur l'un et trois points sur l'autre, le déterminant formé avec les carrés des distances des trois premiers points aux trois autres est nul.

Si les trois points du premier groupe sont en ligne droite, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

les trois points A, B, C sont sur une droite orthogonale au cercle circonscrit au triangle DEF formé par les trois autres points; c'est donc une droite passant par le centre O de ce cercle; on a les quatre équations

$$\begin{aligned}
&\lambda_1.\overline{AD}^2 + \lambda_2\overline{AE}^2 + \lambda_3\overline{AF}^2 = 0,\\
&\lambda_1.\overline{BD}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\lambda_1.\overline{CD}^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\lambda_1 \qquad + \lambda_2 \qquad + \lambda_3 \qquad = 0.
\end{aligned}$$

En prenant les deux premières et la quatrième, on a la relation

$$\begin{vmatrix} \overline{AD}^2 & \overline{AE}^2 & \overline{AF}^2 \\ \overline{BD}^2 & \overline{BE}^2 & \overline{BF}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\Sigma\, \overline{AD}^2\left(\overline{BE}^2 - \overline{BF}^2\right) = 0,$$

relation remarquable entre les distances de deux points, pris sur un diamètre du cercle circonscrit à un triangle, aux sommets de ce triangle.

Réduisons quatre cercles du plan à leurs centres de coordonnées $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... L'équation

$$\lambda_1[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2] \\ + \lambda_2[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2] + \ldots + \lambda_5 = 0$$

représente un cercle quelconque; exprimons que l'équation est une identité, nous aurons

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \lambda_3 + \lambda_4 \ = 0,\\
&\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\lambda_1 y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\lambda_1(x_1^2 + y_1^2) + \ldots + \lambda_5 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ce système admet toujours des solutions pour les λ. Adoptons une des solutions, et écrivons que le cercle passe par les points x, y, ... et aussi par un cinquième point du plan, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda_2.\overline{12}^2 + \lambda_3.\overline{13}^2 + \lambda_4.\overline{14}^2 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1.\overline{21}^2 + \lambda_3.\overline{23}^2 + \lambda_4.\overline{24}^2 + \lambda_5 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1.\overline{51}^2 + \lambda_2.\overline{52}^2 + \dots\dots + \lambda_5 = 0. \end{array}\right.$$

Les équations des deux groupes (1) et (2) sont toutes vérifiées par des valeurs λ, donc tous les déterminants du cinquième ordre sont nuls. En particulier, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & . & \dots & \dots & . \\ \overline{41}^2 & . & \dots & \dots & . \\ \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \overline{53}^2 & \overline{54}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est une relation entre les carrés des distances mutuelles de cinq points du plan, relation qui admet 120 substitutions. On a aussi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \overline{34}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est une relation entre les carrés des distances mutuelles de quatre points, et les distances de ces points à une droite du plan.

On peut, d'une manière analogue, considérer l'équation

$$\begin{aligned}&\lambda_1[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]\\+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\+&\lambda_5[(x-x_5)^2+(y-y_5)^2]=0,\end{aligned}$$

on aura des résultats semblables aux précédents.

V. Toutes les considérations précédentes s'appliquent à un système de sphères, et l'on peut, immédiatement, énoncer les résultats suivants :

1° Le déterminant formé par les puissances de trois points quelconques, par rapport à trois sphères ayant même plan radical, est nul.

2° Le déterminant formé par les puissances de quatre points quelconques, par rapport à quatre sphères ayant deux points communs, est nul.

3° Le déterminant formé par les puissances de cinq points quelconques, par rapport à cinq sphères orthogonales à une même sphère ou ayant un point commun, est nul.

4° Le déterminant formé par les puissances de six points quelconques, par rapport à six sphères quelconques, est nul.

5° Si l'on considère six points de l'espace, numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & \overline{15}^2 & \overline{16}^2 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \ldots & \ldots & \overline{26}^2 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{61}^2 & \overline{62}^2 & \overline{63}^2 & \overline{64}^2 & \overline{65}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6° La relation entre les carrés des distances mutuelles de cinq points quelconques de l'espace est

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & \overline{15}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \dots & \dots & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \overline{41}^2 & \dots & . & \dots & \dots & 1 \\ \overline{51}^2 & \dots & . & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7° Si l'on considère cinq points de l'espace, la somme des inverses des puissances de chacun par rapport à la sphère qui passe par les quatre autres est nulle.

VI. Considérons un triangle de côtés a, b, c, et soient x, y, z les distances d'un point du plan aux sommets du triangle. Nous avons trouvé entre ces six quantités la relation

$$(1) \qquad \Sigma x^2 a^2 (y^2 + z^2 - x^2 + b^2 + c^2 - a^2) \\ - x^2 y^2 c^2 - x^2 z^2 b^2 - y^2 z^2 a^2 - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Les carrés des distances de certains points remarquables du plan du triangle aux sommets sont des fonctions rationnelles de a, b, c; ceci a lieu, en particulier, pour l'orthocentre, le point de concours des médianes, des bissectrices, etc.

On peut se proposer de trouver tous les points du plan pour lesquels les quantités x^2, y^2, z^2 sont fonctions rationnelles de a^2, b^2, c^2. Désignons a^2, b^2, c^2 par α, β, γ, et x^2, y^2, z^2 par u, v, w; soient u_1, v_1, w_1 des valeurs de u, v, w répondant à la question, par exemple, les carrés des distances du point de concours des médianes aux sommets du triangle; posons

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= u_1 + \lambda\,\delta, \\ v &= v_1 + \lambda'\delta, \\ w &= w_1 + \lambda''\delta \end{aligned} \right.$$

et substituons dans la relation (1); nous aurons une équation du second degré en δ, qui admettra la solution $\delta = 0$; il restera donc une relation du premier degré en δ, d'où nous tirerons δ en fonction rationnelle de u_1, v_1, w_1, λ, λ', λ'', α, β, γ.

Nous en déduirons ensuite les valeurs de u, v, w par les équations (2) et nous aurons la solution complète du problème. En donnant, dans les relations trouvées, des valeurs arbitraires à λ, λ', λ'', on aura tous les systèmes de valeurs de x^2, y^2, z^2; deux valeurs seulement, par exemple x^2 et y^2, suffiront pour déterminer le point correspondant à un système de valeurs de λ, λ', λ''.

VII. Une relation entre les distances de cinq points d'une sphère est, comme il est facile de le voir à l'aide des méthodes précédentes :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \overline{12}^2 & \overline{13}^2 & \overline{14}^2 & 1 \\ \overline{21}^2 & 0 & \overline{23}^2 & \overline{24}^2 & 1 \\ \overline{31}^2 & \overline{32}^2 & 0 & \ldots & 1 \\ \overline{41}^2 & \ldots & . & \ldots & . \\ \overline{51}^2 & \overline{52}^2 & \overline{53}^2 & \overline{54}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en désignant les distances $\overline{51}$, $\overline{52}$, $\overline{53}$, $\overline{54}$ par x, y, z, t, les autres distances par a, b, c, a', b', c',

$$(1) \qquad \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \rho t^2 + h = 0.$$

Le coefficient λ n'est autre que

$$a^2a'^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2b'^2(c'^2+a'^2-b'^2)$$
$$+c^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)-2a'^2b'^2c'^2,$$

c'est-à-dire que $\lambda=0$ est la relation que nous avons trouvée entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle. μ, ν, ρ ne sont autres que les valeurs que prend λ par des substitutions évidentes; quant à h, il est égal à

$$(aa'+bb'+cc')(aa'+bb'-cc')$$
$$\times(aa'+cc'-bb')(aa'-cc'-bb').$$

Le déterminant du cinquième ordre est donc facile à développer; si nous appelons D le diamètre de la sphère, la relation est vérifiée si l'on y remplace x^2, y^2, z^2, t^2 par D^2-x^2, D^2-y^2, ...; on a donc

$$(\lambda+\mu+\nu+\rho)D^2+2h=0;$$

cette méthode fournit donc, très simplement, l'expression du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dont on connaît les six arêtes.

Nous avons établi une relation entre les distances de quatre points quelconques du plan; d'autre part, nous avons établi une relation entre les distances de quatre points d'une circonférence; soient a, b, c les trois côtés d'un triangle, x, y, z les distances d'un point A, du cercle circonscrit, aux trois sommets A, B, C; une combinaison facile des deux relations dont nous venons de parler donne la relation remarquable

$$\Sigma x^2y^2(a^2+b^2-c^2)-\Sigma x^4a^2+a^2b^2c^2=0.$$

VIII. Nous avons trouvé, entre les distances mutuelles de quatre points du plan, la relation

$$(1)\qquad \Sigma a^2a'^2(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)$$
$$-\Sigma a'^2b'^2c^2-a^2b^2c^2=0.$$

a', b', c' étant les distances de l'un des points D aux trois autres A, B, C.

Si le point D décrit une courbe $f(a'b'c') = 0$, l'élimination de c' entre l'équation $f = 0$ et la relation (1) donne, entre a' et b', une relation qui représente une courbe formée de la première courbe et d'une autre; on a ainsi, d'une manière générale, une équation représentant une courbe qui se décompose; on peut déduire de là un grand nombre de théorèmes nouveaux.

Nous étudierons des cas particuliers très simples, en prenant pour triangle ABC un triangle équilatéral.

Définissons le lieu d'un point M par l'équation

$$a'^2 + c'^2 = a^2,$$

qui représente le cercle décrit sur AC comme diamètre; d'où

$$c'^2 = a^2 - a'^2;$$

remplaçons c'^2 par cette valeur dans la relation (1), il vient une relation entre a'^2 et b'^2, le lieu des points qui satisfont à cette relation est une courbe du quatrième degré en x, y; en prenant deux axes rectangulaires se croisant au centre du triangle, Ox étant parallèle à BC, l'équation est

$$-36(x^2+y^2)^2 + 21a^2(x^2+y^2) + \ldots = 0,$$

qui se décompose en

$$6y^2 + 6x^2 - ay\sqrt{3} - 3ax - a^2 = 0,$$

qui représente le cercle décrit sur AC comme diamètre et en un second cercle qui est symétrique du premier par rapport à AB; ces deux cercles forment le lieu des points M pour lesquels il y a, entre les distances MA, MB, la relation dont nous avons parlé.

La relation (1), pour le triangle équilatéral, devient

$$(1)\quad a^2\left(\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2\right)-a^4+\Sigma\,\overline{MA}^2.\overline{MB}^2-\Sigma\,\overline{MA}^4=0.$$

Soit un point **M** pour lequel on a

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{MC}^2.$$

Le lieu de ce point est une droite qui a pour équation

$$(2)\qquad y+x\sqrt{3}=0.$$

Remplaçons dans la relation (1), $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2$ par $2\overline{MC}^2$, il vient

$$(3)\quad a^2.3\overline{MC}^2-a^4$$
$$-\overline{MA}^2-\overline{MB}^2-\overline{MC}^2+2\overline{MC}^4+\overline{MA}^2.\overline{MB}^2=0,$$

relation entre les trois distances $\overline{MA}^2$, $\overline{MB}^2$, $\overline{MC}^2$, ou

$$3y^3+(ay^2+3xy^2)\sqrt{3}+\ldots=0,$$

qui se décompose en la droite $y+x\sqrt{3}=0$ et un cercle imaginaire. Ainsi, le lieu des points **M** qui satisfont à la relation (3) est formé d'une droite et d'un cercle imaginaire.

Soit la même relation

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{MC}^2,$$

la relation (1) pourra s'écrire

$$a^2\left(\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2\right)$$
$$-a^4+\overline{MC}^4+\overline{MA}^2.\overline{MB}^2-\overline{MA}^4-\overline{MB}^4=0,$$

le lieu des points qui satisfont à cette nouvelle relation sera formé de la droite précédente

$$y+x\sqrt{3}=0$$

et, cette fois, d'un cercle-point, qui n'est autre que le sommet C du triangle équilatéral, résultat facile à vérifier.

Soit, enfin, la relation

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = K^2;$$

on trouve que le lieu des points qui satisfont à la relation, tirée de la relation (1),

$$a^2\left(\overline{MA}^2 + K^2\right) - a^4 + K^2.\overline{MA}^2 - K^4 - \overline{MA}^4 + 3\overline{MB}^2.\overline{MC}^2 = 0.$$

est formé de deux cercles, savoir celui qui a pour équation

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = K^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{ay}{\sqrt{3}} - \frac{K^2}{2} = 0$$

et un second cercle, qui a pour équation

$$x^2 + \left(y + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + K^2 - a^2 = 0.$$

La méthode que nous venons d'employer et qui peut fournir un très grand nombre de théorèmes nouveaux consiste, non pas à éliminer une des quantités a', b', c' entre la relation fondamentale et une équation $f(a'b'c') = 0$, qui définit une courbe, mais à combiner, de diverses manières, la relation fondamentale et l'équation $f = 0$.

[R6]

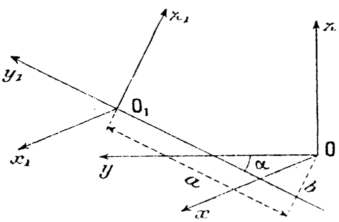
SUR LES THÉORÈMES DES PROJECTIONS ET DES MOMENTS DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT

(Extrait d'une lettre à M. Appell);

PAR M. J. ARNOVLIEVITCH.

En étudiant votre *Traité de Mécanique rationnelle* j'ai fait la remarque que le théorème des projections des quantités de mouvement est un cas particulier du théorème des moments, notamment quand les moments sont rapportés à un axe situé à l'infini.

Rapportons un système matériel à deux systèmes de coordonnées rectangulaires fixes $O_1x_1y_1z_1$ et $Oxyz$,



dont les plans $y_1O_1z_1$ et yOz coïncident (plan de la figure). L'équation des moments par rapport à l'axe O_1z_1 est

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left[x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right]=\sum\sum[x_1Y_1-y_1X_1].$$

Les coordonnées xyz et $x_1y_1z_1$ d'un point matériel m et les composantes XYZ et $X_1Y_1Z_1$ des forces extérieures sont liées par les équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & x_1=x,\qquad y_1=y\cos\alpha+z\sin\alpha-a,\\ & z_1=z\cos\alpha-y\sin\alpha+b;\\ & \text{d'où}\\ & \frac{dx_1}{dt}=\frac{dx}{dt},\qquad \frac{dy_1}{dt}=\frac{dy}{dt}\cos\alpha+\frac{dz}{dt}\sin\alpha;\\ & X_1=X,\qquad Y_1=Y\cos\alpha+Z\sin\alpha,\qquad Z_1=Z\cos\alpha-Y\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

En portant les valeurs (2) dans l'équation (1) nous aurons

$$(3)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left[x\left(\frac{dy}{dt}\cos\alpha+\frac{dz}{dt}\sin\alpha\right)\right.$$
$$\left.-\frac{dx}{dt}(y\cos\alpha+z\sin\alpha-a)\right]$$
$$=\sum\sum[x(\mathrm{Y}\cos\alpha+\mathrm{Z}\sin\alpha)-\mathrm{X}(y\cos\alpha+z\sin\alpha-a)].$$

Divisons les deux membres de cette équation par a; on obtient

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left[\frac{dx}{dt}+\frac{1}{a}\left\{x\left(\frac{dy}{dt}\cos\alpha+\frac{dz}{dt}\sin\alpha\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{dx}{dt}(y\cos\alpha+z\sin\alpha)\right\}\right]$$
$$=\sum\sum\left[\mathrm{X}+\frac{1}{a}\left\{x(\mathrm{Y}\cos\alpha+\mathrm{Z}\sin\alpha)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathrm{X}(y\cos\alpha+z\sin\alpha)\right\}\right].$$

Imaginons que l'axe $\mathrm{O}_1 z_1$ s'éloigne vers l'infini tout en restant dans le plan $y\mathrm{O}z$; la coordonnée a croît infiniment et les termes de (4) contenant $\frac{1}{a}$ s'annulent. L'équation (4) se réduit donc à

$$(5)\quad \frac{d}{dt}\sum m\frac{dx}{dt}=\sum\sum\mathrm{X},$$

qui exprime le théorème des projections des quantités de mouvement sur l'axe $\mathrm{O}x$.

Nous aurions le même résultat en écrivant l'équation des moments par rapport à l'axe $\mathrm{O}_1 y_1$. En effet, les deux axes $\mathrm{O}_1 y_1$, $\mathrm{O}_1 z_1$, s'éloignant vers l'infini, coïncident enfin avec la droite infiniment éloignée (yz) du plan $y\mathrm{O}z$.

Les mêmes considérations étant faites sur les deux autres axes $\mathrm{O}y$ et $\mathrm{O}z$, on peut dire :

Les équations des projections des quantités de mouvement sur les axes Ox, Oy, Oz sont identiques avec les équations des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes infiniment éloignés (yz), (zx) et (xy). Ces derniers axes se trouvant dans le même plan, qui est le plan infiniment éloigné Π de l'espace, constituent avec les premiers les six arêtes d'un tétraèdre particulier.

Comme on peut substituer au plan Π un plan P quelconque déterminé, on peut exprimer les six équations universelles du mouvement de la manière suivante :

On obtient six équations du mouvement indépendantes en écrivant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à chacune des six arêtes d'un tétraèdre.

Sous cette forme les six équations du mouvement donnent, dans le cas de valeurs constantes des vitesses, les conditions nécessaires d'équilibre d'un système matériel, exprimées dans le n° 100 de votre Ouvrage. Elles peuvent d'ailleurs se déduire de ces équations d'équilibre par le principe de d'Alembert.

[L¹18]

SUR LES FAISCEAUX DE CONIQUES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

---

1. Soient A, B, C, D les points de base d'un faisceau ponctuel de coniques, et déterminons le lieu des centres de courbure de ces coniques correspondant au point de base A.

Une droite quelconque menée par A coupe en p et q les droites BD et CD, les perpendiculaires élevées en A sur AB et AC rencontrent en q' et p' les perpendiculaires élevées sur pq en q et p; si P est le point d'intersection de $p'q'$ avec la perpendiculaire élevée en A sur pq, le milieu ω de AP est le centre de courbure en A de la conique du faisceau qui touche pq en A (¹).

Prenons comme axes de coordonnées les droites Aq' et AB, et soient

$$y = mx, \qquad x + \lambda y = b, \qquad x + \mu y = c,$$
$$y = \gamma x, \qquad y = \delta x$$

les équations de pq, BD, CD et des perpendiculaires élevées en A sur AC et AD. On en déduit comme coordonnées de p et q

$$\left(\frac{b}{1+\lambda m}, \frac{mb}{1+\lambda m}\right), \qquad \left(\frac{c}{1+\mu m}, \frac{mc}{1+\mu m}\right);$$

celles de p' et q' sont

$$\frac{b(m^2+1)}{(1+\lambda m)(1+\gamma m)}, \qquad \frac{b\gamma(m^2+1)}{(1+\lambda m)(1+\gamma m)}$$

et

$$\frac{c(m^2+1)}{1+\mu m}, \qquad 0.$$

L'équation de $p'q'$ s'écrit, par conséquent,

$$[b(1+\mu m) - c(1+\gamma m)(1+\lambda m)]y$$
$$- b\gamma(1+\mu m)x + bc\gamma(m^2+1) = 0.$$

(¹) *Voir* P. Serret, *Géométrie de direction;* Fouret, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 1890; Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 578; Cesaro, *Natürliche Geometrie*, p. 130; *voir* aussi une Note de M. Bouvaist, *Nouvelles Annales*, 1916, p. 345.

On a donc comme équation du lieu

$$2y(y-\gamma x)[b(y-\mu x)-c(y-\lambda x)]+bc\gamma(x^2+y^2)=0,$$

ou, plus simplement,

$$2y(y-\gamma x)(y-\delta x)+\frac{bc\gamma}{b-c}(x^2+y^2)=0.$$

Le lieu des centres de courbure des coniques d'un faisceau, correspondant à l'un des points de base, est une cubique ayant ce point pour point isolé et dont les asymptotes sont perpendiculaires aux droites qui joignent ce point de base aux trois autres.

L'équation de la cubique montre que le produit des distances ω aux droites $y=0$, $y=\gamma x$, $y=\delta x$ est proportionnel à $\overline{A\omega}^2$.

Le carré du rayon de courbure d'une conique du faisceau en l'un des points de base est proportionnel au produit de ses projections sur les droites qui joignent ce point de base aux trois autres.

Supposons maintenant que le point A soit un centre isogone du triangle formé par les points B, C, D; on a alors $\gamma=\sqrt{3}$, $\delta=-\sqrt{3}$, et l'équation de la cubique s'écrit

$$2y(y^2-3x^2)+\frac{bc}{b-c}(x^2+y^2)\sqrt{3}=0;$$

c'est l'équation d'une trisectrice de G. de Longchamps.

Si l'un des points de base d'un faisceau de coniques est un centre isogone du triangle formé par les trois autres, le lieu de leurs centres de cour-

bure correspondant à ce point de base est une trisectrice de G. de Longchamps.

Transformons la figure par une inversion de centre A; les coniques du faisceau ont pour transformées les cubiques circulaires unicursales passant par les inverses de B, C, D et ayant leur point double en A; le cercle osculateur de l'une quelconque des coniques considérées a pour transformé l'asymptote de la cubique circulaire correspondante. Le lieu des projections de A sur les asymptotes des cubiques considérées est homothétique de l'inverse de la trisectrice; ce lieu est donc un trifolium régulier.

L'enveloppe des asymptotes des cubiques circulaires unicursales circonscrites à un triangle ayant leur point double en l'un des centres isogones est une hypocycloïde à trois rebroussements.

2. Considérons encore un faisceau tangentiel de coniques ayant pour tangentes communes les droites a, b, c, d et déterminons le lieu du centre de courbure de ces coniques correspondant aux points où elles touchent la tangente commune a.

Soient B et C les points d'intersection de a avec b et c, β et γ ceux de d avec b et c; si M est un point quelconque de a et si β' et γ' désignent les points où les perpendiculaires élevées en M sur Mβ et Mγ rencontrent celles élevées sur BC en C et B, la droite $\beta'\gamma'$ passe par le milieu du rayon de courbure en M de la conique du faisceau qui touche a en ce point ([1]).

Prenons comme axes de coordonnées les droites Bγ'

([1]) *Voir* la Note de M. Bouvaist, *Sur la détermination du centre de courbure en un point d'une conique* (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 349).

et BC; soient m et c les ordonnées de M et C, (β, λ) les coordonnées de β, (γ, μ) celles de γ. On en déduit, pour celles de β',

$$\frac{1}{\beta}(m-c)(\lambda-m), \qquad c$$

et, pour celles de γ',

$$\frac{1}{\gamma}m(\mu-m), \qquad 0.$$

L'équation du lieu s'écrit alors

$$2y(y-c)[\gamma(\lambda-y)-\beta(\mu-y)]-c\beta\gamma x=0,$$

ou, en désignant par d l'ordonnée du point d'intersection des droites d et a,

$$2y(y-c)(y-d)-\frac{c\beta\gamma}{\beta-\gamma}x=0.$$

Le lieu cherché est donc une parabole cubique de Wallis passant par les points d'intersection de la tangente commune a avec les trois autres.

Le lieu des centres de courbure des coniques d'un faisceau tangentiel aux points où elles touchent l'une des tangentes communes est une parabole cubique.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1894.

(1900, p. 571.)

On donne les trois surfaces du second degré

$$Q_1 \equiv yz + a(z-y) + 3a^2 = 0,$$
$$Q_2 \equiv zx + a(x-z) + 3a^2 = 0,$$
$$Q_3 \equiv xy + a(y-x) + 3a^2 = 0;$$

1° *Démontrer que ces surfaces passent par une même cubique gauche ;*

2° *Trouver le lieu des centres des quadriques passant par cette cubique ;*

3° *Trouver les droites situées sur ce lieu.*

Ch. Bioche.

Solution

Par M. J. Lemaire.

1° Les surfaces cylindriques Q_1 et Q_2 contiennent toutes deux la droite de l'infini du plan xOy; le reste de leur intersection est une cubique gauche qui appartient bien à Q_3, à cause de l'identité

$$(x-a)Q_1-(y+a)Q_2+2aQ_3\equiv 0.$$

2° L'équation générale des quadriques passant par cette cubique gauche étant

$$\lambda_1 Q_1+\lambda_2 Q_2+\lambda_3 Q_3=0,$$

on obtient pour le lieu de leurs centres la surface

$$(x-a)(y-a)(z-a)+(x+a)(y+a)(z+a)=0.$$

3° Cette surface contient, outre les droites de l'infini des plans de coordonnées, les droites suivantes :

$$\begin{cases} x-a=0, \\ y+a=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y-a=0, \\ z+a=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z-a=0, \\ x+a=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-a=0, \\ z+a=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y+a=0, \\ x+a=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z-a=0, \\ y+a=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y+z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ z+x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=0, \\ x+y=0. \end{cases}$$

1914.

(1901, p. 192.)

Si une ellipse de grandeur donnée roule sur deux droites rectangulaires :

1° *Le lieu des foyers de cette ellipse se compose de quatre ovales dont chacun d'eux a une aire équivalente à celle d'un cercle ayant pour diamètre la distance focale;*

2° *Le lieu des sommets du grand axe se compose également de quatre ovales ayant chacun pour aire celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre;*

3° *Le lieu des sommets du petit axe est aussi formé par quatre ovales ayant chacun une aire équivalente à celle du cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.*

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Considérons une ellipse d'axes $2a$ et $2b$, de centre O, dont le grand axe est dirigé suivant Ox et le petit axe suivant Oy. Soient : OX, OY les deux droites rectangulaires données, que nous prenons comme axes de coordonnées; θ l'angle que Ox fait avec OX; α et β les coordonnées d'un point M du plan de l'ellipse par rapport à ses axes Ox, Oy.

Dans le système d'axes Ox, Oy, la tangente à l'ellipse, qui fait un angle θ avec Ox, a pour équation

$$(1) \qquad x \sin\theta + y \cos\theta = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

La tangente qui lui est perpendiculaire fait un angle de $90° + \theta$ avec Ox et a pour équation

$$(2) \qquad x \cos\theta - y \sin\theta = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}.$$

Or, les coordonnées (X, Y) du point M par rapport à OX, OY, sont respectivement les distances de M aux droites (2) et (1). Ces coordonnées sont donc

$$(3) \qquad X = -\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta},$$

$$(4) \qquad Y = \alpha \sin\theta + \beta \cos\theta + \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

Telles sont les coordonnées paramétriques d'un point M de la courbe roulette de M entraîné dans le roulement de l'ellipse. Cette courbe se compose de quatre ovales identiques, dans chaque angle droit de OX et OY.

Étudions maintenant l'aire U de l'un de ces ovales. On a

$$\frac{dU}{d\theta} = Y \frac{dX}{d\theta} = \left(\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta - \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}\right) \times \left(\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta - \frac{c^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}}\right),$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\theta} &= \alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta + 2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta\\ &\quad -\alpha\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}-\beta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\\ &\quad -\frac{c^2\alpha\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}-\frac{c^2\beta\sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\\ &\quad +\frac{c^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}.\end{aligned}$$

Pour avoir l'aire de l'ovale, il faut intégrer de o à 2π; on a donc

$$\begin{aligned}U &= \alpha^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta+\beta^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta+2\alpha\beta\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\\ &\quad -\alpha\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\sin\theta\,d\theta\\ &\quad -\beta\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\ &\quad -c^2\alpha\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\\ &\quad -c^2\beta\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\\ &\quad +c^2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

Or, il est facile de voir que toutes ces intégrales, sauf les deux premières, sont nulles. Par exemple, considérons la quatrième

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\sin\theta\,d\theta.$$

On peut l'écrire

$$I=-\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2\theta}\,d(\cos\theta).$$

Pour $\theta=0$ et $\theta=2\pi$, on aura $\cos\theta=1$. Par conséquent $I=0$.

L'aire U est donc

$$U = \pi(\alpha^2 + \beta^2). \tag{5}$$

Elle est équivalente à *l'aire du cercle ayant pour rayon la distance de* M *au centre* O *de l'ellipse.*

Les cas donnés par l'énoncé sont :

1° $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$. Alors $U = \pi c^2$ (aire du cercle focal).

2° $\alpha = \pm a$, $\beta = 0$. Alors $U = \pi a^2$ (aire du cercle principal).

3° $\alpha = 0$, $\beta = \pm b$. Alors $U = \pi b^2$ (aire du cercle secondaire).

Ce sont bien les résultats demandés.

Pour les sommets du rectangle des axes, $\alpha = \pm a$, $\beta = \pm b$, $U = \pi(a^2 + b^2)$.

L'ovale a alors même aire que le cercle de Monge de l'ellipse.

Sur l'équation cartésienne du lieu dont les coordonnées paramétriques sont (3) *et* (4). — M. H. Brocard, ayant reçu communication de mon projet de réponse, s'est empressé de me faire connaître les études antérieures publiées à l'occasion d'un problème plus ancien, proposé sous le nom d'*ellipse-glissette*, traité ou résolu plus ou moins complètement par T. Muir, 1889-1890, 1891-1892; J.-M. Laren, 1891-1892, 1897-1899; P.-G. Tait, 1891-1892; P.-H. Schoute, 1894-1896; E.-J. Nanson, 1897-1899.

(Voir *Encyclopédie fr.-all. des Sc. math.*, t. I, vol. II, *Algèbre*, 1907, p. 107 : Élimination.)

En rendant rationnelles les équations paramétriques (3) et (4), on a

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2 - c^2)\sin^2\theta + 2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta \\ - 2\alpha x\cos\theta + 2\beta x\sin\theta - (x^2 + \alpha^2 - a^2) = 0;\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2 - c^2)\sin^2\theta + 2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta \\ - 2\beta y\cos\theta - 2\alpha y\sin\theta + (y^2 + \beta^2 - b^2) = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

L'élimination de θ est grandement facilitée par ce fait que les coefficients de $\sin^2\theta$ et $\sin\theta\cos\theta$ sont les mêmes dans ces deux équations.

En les retranchant l'une de l'autre, on a

$$\begin{aligned}2(\alpha x - \beta y)\cos\theta - 2(\beta x + \alpha y)\sin\theta \\ + x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

On combinera cette équation avec l'une ou l'autre des deux autres (6) ou (7). On aura ainsi une équation du second degré en $\sin\theta$. L'équation (8) est aussi du second degré en $\sin\theta$. Le résultant de ces deux équations en $\sin\theta$ donnera une équation qui est, en général, du ***dixième degré***.

Dans le cas des foyers, $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$; le lieu, qui a alors les deux facteurs étrangers $x^2 - b^2$ et $y^2 - b^2$, se réduit au sixième degré, et a pour équation

$$(9) \qquad x^2(y^2 - b^2)^2 + y^2(x^2 - a^2)^2 - 4c^2x^2y^2 = 0.$$

On obtient, d'ailleurs, cette équation directement, en raison des propriétés des foyers. Soient (x, y), (x', y') leurs coordonnées. On a

$$xx' = b^2, \qquad yy' = b^2, \qquad (x - x')^2 + (y - y')^2 = 4c^2.$$

Il en résulte $x' = \frac{b^2}{x}$, $y' = \frac{b^2}{y}$, et l'équation du lieu est immédiatement

$$\left(x - \frac{b^2}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2}{y}\right)^2 = 4c^2.$$

C'est bien l'équation (9).

Lorsque le point M est un des sommets de l'ellipse, ou bien est situé sur l'un des axes de l'ellipse, le lieu est du huitième degré.

C'est ainsi que, pour les sommets du grand axe ($\alpha = \pm a$, $\beta = 0$), on parvient à l'équation

$$\begin{aligned}\{[(2a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + b^4]^2 - 4a^2c^2(x^4 + y^4) - 4a^2b^2(x^2 + y^2)\}^2 \\ = 64a^4x^2y^2(c^2x^2 + b^4)(c^2y^2 + b^4).\end{aligned}$$

1915 (P. Appell).

(1901, p. 331; 1917, p. 466.)

Note de la Rédaction.

Cette question, extraite des *Archiv. Math. Phys.*, a reçu sa solution dans un article *Sur les polynomes* $U_{m,n}$, *etc.*, de M. C. Willigens (1911, p. 97-116). La question 1915, malheureusement, ne se trouvait pas rappelée dans cet article. Il nous semble inutile d'en reproduire ici l'énoncé.

C'est à l'obligeance de M. Appell que nous devons cette indication, et nous lui en exprimons nos remerciements les plus sincères.

1957.

(1903, p. 47.)

Une parabole est bitangente à une conique donnée S *en un point fixe et en un autre point. Le lieu du foyer est une podaire de parabole.*

Cas particulier : 1° *La conique donnée* S *est une hyperbole équilatère;* 2° *La conique* S *se décompose en un couple de points.* R. GILBERT.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Prenons comme origine des coordonnées le point de contact fixe et comme axe des x et des y la tangente et la normale à S en ce point.

Les équations ponctuelle et tangentielle de S sont

$$(\beta x - \alpha y)^2 - \gamma y^2 - 2\beta y = 0,$$
$$u^2 + 2\alpha u + 2\beta v + = 0;$$

α, β, γ désignant des constantes.

Celles de la parabole sont

$$(bx - ay)^2 - 2by = 0,$$
$$u^2 + 2au + 2bv = 0;$$

a et b étant deux paramètres variables.

En retranchant les deux équations tangentielles on obtient

$$2(a - \alpha)u + 2(b - \beta)v - \gamma = 0.$$

C'est l'équation du point de concours des deux tangentes communes, à S et à la parabole, autres que Ox. Pour exprimer que ces deux courbes sont tangentes, il suffit d'écrire que ce point est sur l'une des deux coniques, sur la parabole par exemple, ce qui donne

$$(b\alpha - a\beta)^2 - b\gamma(b - \beta) = 0.$$

D'autre part, si l'on exprime que la droite

$$y - y_0 - i(x - x_0) = 0$$

est tangente à la parabole; c'est-à-dire que le point x_0, y_0 est un foyer de cette courbe, on trouve

$$2(by_0 - ax_0) - 1 = 0, \qquad bx_0 + ay_0 = 0;$$

d'où

$$a = -\frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}, \qquad b = \frac{y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}.$$

Portant ces valeurs dans la relation ci-dessus, on obtient pour équation du lieu du foyer de la parabole

$$(\alpha y_0 + \beta x_0)^2 - \gamma y_0[y_0 - 2\beta(x_0^2 + y_0^2)] = 0.$$

C'est une cubique circulaire unicursale; c'est-à-dire une podaire de parabole.

Si la conique S est une hyperbole équilatère, on a la relation

$$\gamma = \alpha^2 + \beta^2.$$

Les tangentes à la cubique au point double ont pour équation, dans cette hypothèse,

$$\beta^2 y^2 - 2\alpha\beta xy - \beta^2 x^2 = 0.$$

Elles sont rectangulaires et par suite la cubique est une strophoïde. Si la conique S se décompose en deux points, et si x_1, y_1 désignent les coordonnées du point, autres que l'origine, par lequel passent toutes les paraboles, on trouve pour équation du lieu des foyers

$$4y_1 y(x^2 + y^2) - (xy_1 + yx_1)^2 = 0.$$

Cette courbe est une cissoïde.

Autre solution par M. L. Poli.

2015.

(1905, p. 192; 1916, p. 361.)

Un trièdre trirectangle a son sommet sur le côté E *d'un angle donné. Du point où l'autre côté* D *de cet angle ren-*

contre l'une des faces de ce trièdre, on élève un plan perpendiculaire à ce côté. Ce plan coupe E *en un point d'où l'on abaisse la perpendiculaire* A *à la face considérée. On détermine de même* B *et* C *pour les autres faces du trièdre. Démontrer que les deux droites qui rencontrent* A, B, C, D *sont perpendiculaires à* D *et perpendiculaires l'une à l'autre.*

MANNHEIM.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

L'énoncé est manifestement inexact, car la droite E rencontre A, B, C, D et ne satisfait pas aux conditions données.

Soit

$$E = \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0},$$

soit

$$D = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma};$$

les axes étant les arêtes du trièdre trirectangle donné, on voit de suite que les droites A, B, C ont pour équations

$$(A)\quad \begin{cases} x = x_0 - \dfrac{x_0 z_0}{\gamma P_0} = x_1, \\[2mm] y = y_0 - \dfrac{z_0 y_0}{\gamma P_0} = y_1, \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} y = y_0 - \dfrac{y_0 x_0}{\alpha P_0} = y_2, \\[2mm] z = z_0 - \dfrac{z_0 x_0}{\alpha P_0} = z_2, \end{cases}$$

$$(C)\quad \begin{cases} x = x_0 - \dfrac{y_0 x_0}{\beta P_0} = x_3, \\[2mm] z = z_0 - \dfrac{y_0 z_0}{\beta P_0} = z_3. \end{cases}$$

si $P_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$.

Si $\alpha', \beta', \gamma', l', m', n'$ sont les coordonnées d'une droite Δ s'appuyant sur A, B, C, on aura

$$n' = \alpha' y_1 - \beta' x_1, \qquad l' = \beta' z_2 - \gamma' y_2, \qquad m' = \gamma' x_3 - \alpha' z_3;$$

la relation $\alpha' l' + \beta' m' + \gamma' n' = 0$ devient

$$\frac{l\alpha x_0}{\alpha'} + \frac{m\beta y_0}{\beta'} + \frac{n\gamma z_0}{\gamma'} = 0,$$

α, β, γ, l, m, n étant les coordonnées de D.

La relation $\alpha l' + \beta m' + \gamma n' + \alpha' l + \beta' m + \gamma' n = 0$, qui exprime que la droite Δ rencontre D, devient

$$\alpha'(l + \gamma y_1 - \beta z_3) + \beta'(m + \alpha z_2 - \gamma x_1) + \gamma'(n + \beta x_3 - \alpha y_2) = 0$$

ou

$$\alpha'(l + \gamma y_0 - \beta z_0) + \beta'(m + \alpha z_0 - \gamma x_0) + \gamma'(n + \beta x_0 - \alpha y_0) = 0;$$

or

$$l = \beta z_0 - \gamma y_0, \qquad m = \gamma x_0 - \alpha z_0, \qquad n = \alpha y_0 - \beta x_0;$$

cette relation est vérifiée identiquement; D est donc sur l'hyperboloïde (ABC). Comme du reste le cône asymptotique de ABC est capable d'une infinité de trièdres trirectangles, le plan perpendiculaire à D mené par le centre de (ABC) coupera ce cône suivant deux génératrices rectangulaires, auxquelles correspondront sur (ABC) un couple de génératrices du système opposé à D, perpendiculaires entre elles et perpendiculaires à D.

2196.

(1912, p. 384.)

Une sécante quelconque d'une ellipse donnée rencontre l'ellipse de Frégier en deux points de Frégier μ *et* μ' *et l'ellipse donnée en* B *et* C. *Le cercle de diamètre* BC *rencontre l'ellipse donnée en deux points* A *et* A' *qui correspondent aux points* μ *et* μ'. W. Gaedecke.

Deuxième solution (¹)

Par M. H. Brocard.

L'ellipse donnée et l'ellipse de Frégier étant homothétiques

(¹) *Voir* 1913, p. 573.

avec

$$m = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

pour rapport d'homothétie, on en déduit que les directions $\mu\mu'$ et AA' sont symétriques par rapport à Ox. Si donc un cercle passe par A, A' et rencontre l'ellipse en deux autres points B_1, C_1, la corde B_1C_1 sera parallèle à $\mu\mu'$.

Parmi ces cercles, il y en aura donc un passant par B, C, intersections de $\mu\mu'$ avec l'ellipse. Mais BC passant par μ, ou par μ' est nécessairement vue de A ou de A' sous un angle droit. BC est donc un diamètre du cercle BCAA' et l'on en conclut les propositions indiquées dans l'énoncé.

2199.

(1915, p. 384.)

On considère un point M *du plan d'une parabole* (P), *tel que l'une des trois normales abaissées de* M *sur* (P) *soit bissectrice extérieure de l'angle des deux autres. Montrer que le lieu des sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds des normales se compose d'une parabole et d'une quadrique.* E.-N. Barisien.

Solution
Par M. H. Brocard.

Les formules que j'ai conseillées (1892, p. 4*), pour la solution de la question 1545, trouvent ici une application tout indiquée.

En effet, les trois normales MA, MB, MC étant issues d'un même point M, on sait que le triangle BCA a son barycentre sur l'axe Ox de la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Les ordonnées de ces trois points pourront donc être représentées par

$$-b, \quad -c, \quad +(b+c).$$

Comme la sous-normale est constante et égale à p, on voit que les coefficients d'inclinaison des trois normales MB, MC, MA ont pour valeurs

$$\frac{b}{p}, \quad \frac{c}{p}, \quad -\frac{b+c}{p}$$

(*loc. cit.*, p. 5*).

Les coefficients d'inclinaison λ et $-\frac{1}{\lambda}$ des bissectrices de l'angle BMC seront donc les racines de l'équation

$$\frac{\frac{b}{p}-\lambda}{1+\frac{b\lambda}{p}} = \frac{\lambda-\frac{c}{p}}{1+\frac{c\lambda}{p}}$$

ou

$$\lambda^2 - 2\lambda\frac{p^2-bc}{p(b+c)} - 1 = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée par le coefficient d'inclinaison de AM ou $-\frac{p}{b+c}$, on en déduira la relation

$$(E) \qquad 3p^2 = (b+c)^2 + 2bc.$$

Mais on a vu (*loc. cit.*, p. 6*) que les sommets A', B', C' du triangle des tangentes en A, B, C ont pour coordonnées

	x.	y.
(A')	$\frac{bc}{2p}$	$-\frac{b+c}{2}$,
(B')	$-\frac{c(b+c)}{2p}$	$\frac{b}{2}$,
(C')	$-\frac{b(b+c)}{2p}$	$\frac{c}{2}$.

L'équation du lieu de chacun de ces points sera donc le résultat de l'élimination de b et c entre l'équation (E) et les équations (A'), (B'), (C'), ce qui donnera, pour A', la parabole

$$4y^2 = 3p^2 - 4px;$$

et pour les points B' ou C', l'équation d'une quartique.

2245.

(1915, p. 144.)

On considère : une ellipse; l'ellipse E_1 *concentrique à* E, *de mêmes directions d'axes et dont les longueurs d'axes sont le tiers de celles de* E; *un point fixe* G. *Les côtés de tous les triangles inscrits dans* E *et ayant* G *pour centre de gravité enveloppent une conique* Γ *qui sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le point* G *sera à l'intérieur de* E_1, *à l'extérieur de* E_1, *ou situé sur* E_1. *Dans quel cas* Γ *sera-t-elle une hyperbole équilatère?*

E.-N. Barisien.

Solution

Par M. T. Ono.

Soient $E \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, $G(x_1, y_1)$. On sait que l'enveloppe des côtés des triangles considérés est une conique représentée par

$$\begin{aligned}(a^2 - 9x_1^2)b^4x^2 - 18a^2b^2x_1y_1xy + (b^2 - 9y_1^2)a^4y^2 \\ - 3(a^2b^2 - 9b^2x_1^2 - 9a^2y_1^2)(b^2x_1x + a^2y_1y) \\ - \frac{1}{4}(a^2b^2 - 9b^2x_1^2 - 9a^2y_1^2)^2 = 0\end{aligned}$$

(voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1910, p. 220; 1911, p. 227). Par conséquent, suivant que

$$81a^4b^4x_1^2p_1^2 <, \qquad >, \qquad = a^4b^4(a^2 - 9x_1^2)(b^2 - 9y_1^2),$$

c'est-à-dire

$$E_1 \equiv \frac{9x_1^2}{a^2} + \frac{9y_1^2}{b^2} - 1 <, \qquad >, \qquad = 0,$$

l'enveloppe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Quand elle est une hyperbole équilatère, on a

$$(a^2 - 9x_1^2)b^4 + (b^2 - 9y_1^2)a^4 = 0,$$

ce qui montre que le point G doit être sur l'ellipse

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{9}.$$

Autre solution par M. M.-F. Egan.

2252.

(1915, p. 392.)

On considère un volume dans lequel l'aire de la section par un plan parallèle à un plan fixe P *est une fonction du second degré de la cote du plan sécant. Ce volume est limité par deux bases parallèles au plan* P, *dont les aires sont* B *et* B'; *l'aire de la section parallèle aux bases et équidistante des bases est* B''; *les cotes des plans des bases et du plan de la section* B'' *sont* a, b, c. *La cote du centre de gravité du volume a alors pour expression*

$$\frac{Ba + B'b + 4B''c}{B + B' + 4B''}.$$

Le volume peut être en particulier un prismatoïde.

C. FONTENÉ.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Prenons un système d'axes rectangulaires quelconque, l'axe des z étant perpendiculaire au plan fixe. Puisque $c = \frac{a+b}{2}$, la formule à démontrer peut s'écrire

$$\frac{aB + bB' + 2(a+b)B''}{B + B' + 4B''}.$$

Soit

$$S = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

l'expression de la surface d'une section parallèle au plan fixe.

On a

$$B = \alpha a^2 + \beta a + \gamma,$$

$$B' = \alpha b^2 + \beta b + \gamma,$$

$$B'' = \alpha \frac{(a+b)^2}{4} + \beta \frac{(a+b)}{2} + \gamma.$$

Si V est le volume du solide, on a aussi

$$\begin{aligned}
V &= \int_a^b (\alpha z^2 + \beta z + \gamma)\,dz \\
&= \frac{\alpha b^3}{3} + \frac{\beta b^2}{2} + \gamma b - \frac{\alpha a^3}{3} - \frac{\beta a^2}{2} - \gamma a \\
&= \frac{\alpha}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2) + \frac{\beta}{2}(b-a)(b+a) + \gamma(b-a) \\
&= \frac{b-a}{6}(B + B' + 4B'').
\end{aligned}$$

Soit z_0 la cote du centre de gravité, on a

$$\begin{aligned}
Vz_0 &= \int_a^b (\alpha z^2 + \beta z + \gamma)\,z\,dz \\
&= \frac{\alpha b^4}{4} + \frac{\beta b^3}{3} + \frac{\gamma b^2}{2} - \frac{\alpha a^4}{4} - \frac{\beta a^3}{3} - \frac{\gamma a^2}{2} \\
&= (b-a)\left\{\frac{\alpha}{4}(b+a)(b^2+a^2) + \frac{\beta}{3}(b^2+ab+a^2) + \frac{\gamma}{2}(b+a)\right\};
\end{aligned}$$

et par suite

$$z_0 = \frac{\frac{3}{2}\alpha(a^3+b^3+a^2b+ab^2) + 2\beta(a^2+ab+b^2) + 3\gamma(a+b)}{B + B' + 4B''}.$$

Après quelques transformations sans difficultés, on trouve bien la formule demandée.

QUESTIONS.

2337 (Énoncé rectifié). — Un tétraèdre inscrit à un ellipsoïde est tel que les plans tangents à cette surface, aux sommets du tétraèdre, soient parallèles aux faces opposées de celui-ci. On joint les sommets du tétraèdre à l'un quelconque des foyers de l'ellipsoïde, chacune des droites obtenues étant limitée au sommet dont elle est issue et à la face opposée. Démontrer que les quatre segments ainsi déterminés ont même longueur.

R. Bricard.

2361. Soit ω le centre d'un cercle (ω) tangent aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC en α, β, γ. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent en ω', la droite $\omega\omega'$ rencontre le cercle (ω) en P et Q. Démontrer que la conique ABCPQ touche le cercle (ω) au point de Feuerbach situé sur ce cercle.

R. Bouvaist.

2362. Soient ABC un triangle, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ trois droites rencontrant BC, CA, AB en α, β, γ et telles que

$$\text{angle } \overline{A\alpha}.\overline{CB} = \text{angle } \overline{C\gamma}.\overline{BA} = \text{angle } \overline{B\beta}.\overline{AC} = V.$$

On mène, par α, les parallèles $\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha''$ à $B\beta$ et $C\gamma$, qui rencontrent AC et BA en α' et α''; par β, les parallèles $\beta\beta'$, $\beta\beta''$ à $C\gamma$ et $A\alpha$, qui rencontrent BA en β', CB en β''; par γ, les parallèles $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma''$ à $A\alpha$ et $B\beta$, qui rencontrent CB en γ', AC en γ''.

1° Démontrer que les six points α', α'', β', β'', γ', γ'' sont sur un même cercle (Γ). Déterminer le centre et le rayon de (Γ). (Généralisation du cercle de Taylor.)

2° Lieu du centre de (Γ) lorsque V varie. R. Bouvaist.

2363. Une droite Δ variable autour d'un point fixe P rencontre le cercle circonscrit O à un triangle ABC en M_1 et M_2. La perpendiculaire à Δ issue de A rencontre le cercle O en K et la perpendiculaire abaissée de K sur BC coupe le cercle O en α. L'orthocentre du triangle $\alpha M_1 M_2$ décrit une conique de centre P.

V. Thébault.

2364. Dans un triangle ABC on considère les points O_1 et O_2 envisagés par Droz-Farny (question **1850**, p. 239, *N. A.*, 1900, et 1917, p. 360). Montrer que l'orthopôle de la droite O_1O_2 est sur la droite qui joint le centre de gravité du triangle à l'orthopôle de la droite d'Euler.

V. Thébault.

2365. Dans un triangle ABC la transversale réciproque, par rapport au triangle, de la droite des centres des cercles d'Apollonius, est perpendiculaire à la droite d'Euler.

V. Thébault.

[O'2]

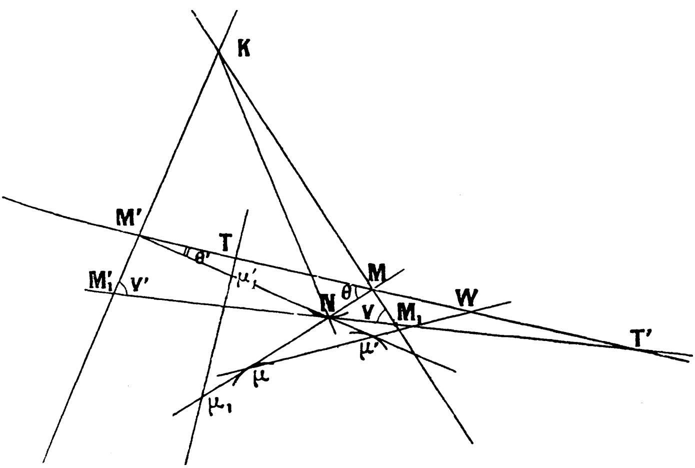
NOTE DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE ;

PAR M. R. BOUVAIST.

PROBLÈME I. — *Soient sur deux courbes* (M) *et* (M′) *deux points* M *et* M′, *tels que la droite* MM′ *touche son enveloppe* (T) *en* T, *les normales en* M *et* M′ *à* (M) *et* (M′) *se coupent en* N, *les tangentes correspondantes en* K. *Déterminer la tangente en* N *à la courbe* (N) *et la tangente en* K *à la courbe* (K).

Soient (*fig.* 1) T′, M_1, M'_1 les points d'intersection

Fig. 1.



de la tangente en N à (N) avec MM′, KM, KM′; μ et μ' les centres de courbure en M et M′ à (M) et (M′);

W le point de rencontre de $\mu\mu$ avec MM'; μ_1, μ'_1 les points d'intersection de la normale en T à (T) avec $M\mu$, $M'\mu'$. Posons enfin

$$\widehat{KM_1N} = V, \qquad \widehat{KM'_1N} = V', \qquad \widehat{NMM'} = \theta, \qquad \widehat{NM'M} = \theta'.$$

α. *Détermination de la tangente en* N *à* (N). — Si $d(N)$, $d(M)$, $d(M')$ sont les arcs infiniment petits correspondants de (N), (M), (M'), nous aurons

$$d(N) = \frac{d(M)}{\cos V}\frac{M\mu}{\mu N} = \frac{d(M')}{\cos V'}\frac{\mu' M'}{\mu' N};$$

or, τ désignant l'angle de contingence de (T) en T, on a

$$d(M) = M\mu_1\, d\tau, \qquad d(M') = M'\mu'_1\, d\tau,$$

d'où

$$\frac{M\mu_1}{\cos V}\frac{\mu M}{\mu N} = \frac{M'\mu'_1}{\cos V'}\frac{\mu' M'}{\mu' N};$$

or

$$\frac{WM'}{WM}\frac{\mu M}{\mu N}\frac{\mu' N}{\mu' M'} = 1$$

et

$$M\mu_1 = \frac{MT}{\cos\theta}, \qquad M'\mu'_1 = \frac{M'T}{\cos\theta'},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{MT}{M'T}\frac{\cos\theta'\cos V'}{\cos\theta\cos V} = \frac{WM}{WM'};$$

on a aussi

$$\frac{MT'}{M'T'}\frac{M'_1M'}{M'_1K}\frac{M_1K}{M_1M} = 1,$$

d'où

$$\frac{MT'}{M'T'} = \frac{MM_1}{M_1K}\frac{M'_1K}{M'_1M_1} = \frac{MM_1}{M'M'_1}\frac{\sin V}{\sin V'};$$

or

$$MM_1 \tang V = MN, \qquad M'M'_1 \tang V' = M'N,$$

d'où

$$\frac{MT'}{M'T'} = \frac{MN}{M'N}\frac{\cos V}{\cos V'} = \frac{\cos V \sin\theta'}{\cos V' \sin\theta},$$

d'où

$$\frac{\dfrac{MT'}{M'T'}}{\dfrac{MT}{M'T}} = \frac{\sin 2\theta'}{\sin 2\theta}\,\frac{WM'}{WM} = \frac{\dfrac{MH'}{M'H'}}{\dfrac{MW}{M'W}},$$

H′ étant le point d'intersection de KN avec MM′.

D'où la conclusion suivante : *Les points* H *et* W, T *et* T′ *se correspondent dans une homographie ayant pour points doubles* M *et* M′.

3. *Détermination de la tangente en* K *à* (K). — Soient α et β les intersections de la normale en K à (K) avec Mμ, M′μ'. $d\mu$ et $d\mu'$ désignant les angles de contingence à (M) et (M′) en M et M′; on a

$$d(K) = K\alpha\, d\mu = K\beta\, d\mu',$$

d'où

$$d(M)\frac{K\alpha}{M\mu} = d(M')\frac{K\beta}{M'\mu'};$$

or

$$\frac{d(M)}{d(M')} = \frac{MK}{M'K}\,\frac{TM}{TM'},$$

d'où

$$\frac{MK}{M'K}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{K\beta}{K\alpha},$$

ou, en désignant par φ et φ' les angles $\widehat{\alpha KM}$, $\widehat{\beta KM'}$,

$$\frac{\overline{MK}^2}{\overline{M'K}^2}\,\frac{TM}{TM'} = \frac{M\mu}{M'\mu'}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'};$$

soit alors S le point d'intersection de la tangente en K à (K) avec MM′; on a

$$\frac{MS}{\cos\varphi} = \frac{KS}{\cos\theta}, \qquad \frac{M'S}{\cos\varphi'} = \frac{KS}{\cos\theta'},$$

d'où enfin

$$\frac{\dfrac{\text{MS}}{\overline{\text{M}'\text{S}}}}{\dfrac{\text{MT}}{\overline{\text{M}'\text{T}}}} = \frac{\cos^3\theta'}{\cos^3\theta}\,\frac{\text{M}'\mu'}{\text{M}\mu} = \frac{\overline{\text{MK}}^3}{\overline{\text{M}'\text{K}}^3}\,\frac{\text{M}'\mu'}{\text{M}\mu}.$$

Remarque. — Je n'insisterai pas sur cette dernière relation, les constructions qui en découlent et les nombreuses conséquences que l'on peut en tirer, ce cas ayant été étudié par Mannheim, avec tous les développements qu'il comporte.

Quelques conséquences de la détermination de la normale en N *à* (N). — 1° Supposons que les courbes (M) et (M′) soient des droites : dans ce cas $\frac{\text{WM}}{\text{WM}'} = 1$, on aura donc par une construction très simple pour déterminer le point T connaissant le point T′ et réciproquement : La parallèle à KM menée par T′ rencontre KN en U, UM′ rencontre la parallèle à MM′ menée par K en V, la parallèle à KM menée par V rencontre MM′ au point T. C'est ainsi par exemple que l'on pourra déterminer le contact d'une droite de Simson avec son enveloppe.

Un cas particulièrement simple est celui ou les droites (M), (M′) sont rectangulaires ; on a alors

$$\frac{\text{MT}'}{\text{M}'\text{T}'} : \frac{\text{MT}}{\text{M}'\text{T}} = -1,$$

les points T et T′ sont donc conjugués harmoniques par rapport à M et M′, ou en d'autres termes :

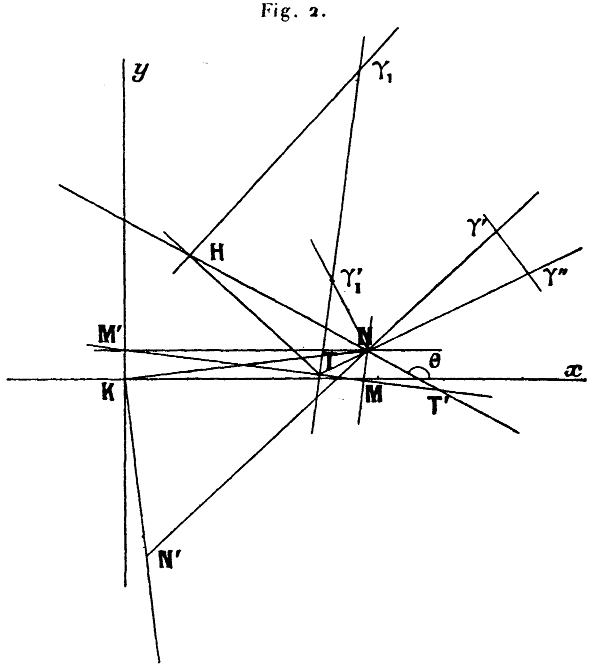
Si l'on projette un point N *d'une courbe* (N) *sur deux axes rectangulaires en* M *et* M′, *la tangente en* N *à* (N) *et la droite joignant* N *au contact de* MM′

avec son enveloppe sont symétriques par rapport aux projetantes.

Ce cas se prête d'ailleurs à une détermination très simple du centre de courbure de (N) en N connaissant le centre de courbure de l'enveloppe de MM′ et réciproquement.

Cherchons tout d'abord (*fig.* 2) le point où la

Fig. 2.



droite TN touche son enveloppe; soit γ'' ce point; la perpendiculaire en γ'' à TN coupe la normale en N en γ', et l'on a

$$d(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\gamma'\, d(\gamma''),$$

$d\gamma''$ étant l'angle de contingence en γ'' de l'enveloppe de TN ; or

$$d\gamma'' = -\, d\theta,$$

d'où

$$N\gamma' = -\,\frac{d(N)}{d\theta} = -\,R_N,$$

R_N étant le rayon de courbure de (N) en N. γ' est par suite le symétrique par rapport à N du centre de courbure γ de (N) en N. Donc :

La symétrique de la tangente à une courbe (N) *en* N *par rapport à la perpendiculaire abaissée de* N *sur une droite fixe, touche son enveloppe au symétrique par rapport à* N, *de la projection sur elle du centre de courbure de* (N) *en* N.

Ceci posé, nous aurons (*fig.* 2)

$$\frac{d(T)}{d(N)} = \frac{\gamma''T.TT'}{\gamma''N.NT'} = \frac{TN - R_N \sin 2\theta}{R_N \sin V},$$

V étant l'angle du rayon vecteur KN avec la tangente en N à (N) tel qu'on le définit en coordonnées polaires. On a aussi, en posant $\widehat{NKM} = \omega$ et en appelant N′ l'intersection de la normale en N avec la perpendiculaire élevée à NK en K,

$$TN = \frac{KN \sin\omega \cos\omega}{\sin V} = -\, NN' \sin\omega \cos\omega,$$

d'où

$$\frac{d(T)}{d(N)} = -\,\frac{NN' \sin\omega\cos\omega + R_N \sin 2\theta}{R_N \sin V} = \frac{-\,R_T\, d\omega}{R_N\, d\theta};$$

or

$$d\theta = dV + d\omega \qquad \text{et} \qquad R_N = \frac{NN'}{1 + \dfrac{dV}{d\omega}},$$

d'où

$$R_T = \frac{NN'}{R_N}\,\frac{NN' \sin\omega\cos\omega}{\sin V} + \frac{NN' \sin 2\theta}{\sin V}.$$

Abaissons de K une perpendiculaire KH sur la tangente en N, joignons HT et NT; les perpendiculaires élevées en H et N à TH, TN coupent la normale à MM' en T en γ_1 et γ'_1, on voit facilement que les angles $\widehat{\gamma TH}$, $\widehat{\lambda TM}$ sont égaux et que l'on a

$$T\gamma_1 = \frac{NN' \sin 2\omega}{2 \sin V}, \qquad T\gamma'_1 = \frac{NN' \sin 2\theta}{2 \sin V},$$

d'où

$$R_T = \frac{NN'}{R_N} T\gamma_1 + 2 T\gamma'_1.$$

Exemples. — α. Si (N) est un cercle de centre K, (T) est une hypocycloïde à quatre rebroussements,

$$NN' = R_N, \qquad \text{d'où} \qquad R_T = T\gamma_1 + 2 T\gamma'_1,$$

et comme P est sur KH,

$$R_T = 3 PH.$$

β. Si (N) est un cercle ayant son centre ω sur Ky et touchant Kx, (T) est une hypocycloïde à trois rebroussements,

$$\frac{NN'}{R} = 2, \qquad \text{d'où} \qquad R_T = 2(T\gamma_1 + T\gamma'_1).$$

γ. La droite joignant les projections d'un point d'une ellipse (E) sur ses axes, enveloppe, comme on le sait, la développée de l'ellipse (E_1) ayant pour sommets les sommets de la developpée de E, la formule précédente permettra donc de déterminer le centre de courbure en un point d'une développée de conique. Elle permettra de même de déterminer le centre de courbure en un point de la kreuzcurve, lieu des intersections des parallèles aux axes de E, menées par les points de rencontre de ces droites avec une tangente variable à E.

Je remarquerai enfin que la construction indiquée sera particulièrement simple dans les cas où les courbes (N) seront telles que $\frac{NN'}{R_N}$, c'est-à-dire $\frac{dV}{d\omega}$ soit constant, courbes contenues dans l'équation polaire

$$\rho^n = a^n \sin(n\omega + \alpha).$$

2° Cherchons, en conservant la figure et les notations précédentes, à déterminer la normale au point T' à la courbe (T').

Nous aurons, en posant $\widehat{NT'T} = \widehat{T'}$, $\widehat{T'} = \omega + \theta - \pi$,

$$d\widehat{T'} = d\omega + d\theta = dr - d\tau,$$

dr et $d\tau$ désignant les angles de contingence en N et T à (N) et (T).

Or si la normale à (T') en T' rencontre les normales à (N) et (T) en N et T en α et β, on a

$$d(T') = T'\alpha\, dr, \qquad dT' = T'\beta\, d\tau,$$

d'où

$$d\omega + d\theta = d\theta\left(1 - \frac{T'\alpha}{T'\beta}\right)$$

et

$$\frac{T'\alpha}{T'\beta} = -\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{1}{1 + \frac{dV}{d\omega}}.$$

Donc : *Si l'on projette en* M *et* M' *sur deux axes rectangulaires* Kx *et* Ky *un point* N *d'une courbe* (N) *d'équation polaire* $\rho^n = a^n \sin(n\omega + \alpha)$ (K *étant l'origine et* Kx *l'axe polaire*), *la tangente en* N *à* (N) *rencontre* MM' *en* T', *la normale en* T' *à la courbe* (T') *lieu de* T' *rencontre les normales à* (N) *en N et à la courbe enveloppe de* MM′ *en son point de contact avec cette droite en deux points* α *et* β *tels que* $\frac{T'_\alpha}{T'_\beta} = -\frac{1}{1+n}$.

3° Considérons maintenant deux courbes (M) et (M′) telles que les normales en deux points M et M′ situées sur une même perpendiculaire à une droite Ox, se coupent en un point N de cette droite Ox. Si

$$(\mathrm{M}) \equiv y - f(x) = 0, \qquad (\mathrm{M}') \equiv y - f_1(x) = 0,$$

on voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait entre les coordonnées de M et M′ la relation différentielle

$$y_{\mathrm{M}} y'_{\mathrm{M}} = y_{\mathrm{M}'} y'_{\mathrm{M}'}, \qquad x_{\mathrm{M}} = x_{\mathrm{M}'},$$

d'où

$$y_{\mathrm{M}}^2 = y_{\mathrm{M}'}^2 \pm k^2,$$
$$x_{\mathrm{M}} = x_{\mathrm{M}'},$$

transformation qui fait correspondre à la courbe

$$(\mathrm{M}) \equiv f(x, y) = 0$$

la courbe

$$(\mathrm{M}') \equiv f(x, \sqrt{y^2 \pm k^2}) = 0.$$

En se reportant alors à la formule (1) du problème I, on voit que l'on a, en conservant les notations de ce problème,

$$\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{M'T}} \frac{\cos^2 \mathrm{V}'}{\cos^2 \mathrm{V}} = \frac{\mathrm{WM}}{\mathrm{WM}'},$$

où T étant à l'infini

$$\frac{\mathrm{WM}}{\mathrm{WM}'} = \frac{\cos^2 \mathrm{V}'}{\cos^2 \mathrm{V}};$$

le point W sera donc le point d'intersection de la perpendiculaire élevée en K à NK avec MM′; on a en effet

$$\frac{WM'}{\cos V} = \frac{WK}{\cos V'}, \qquad \frac{WM}{\cos V'} = \frac{WK}{\cos V}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{WM}{WM'} = \frac{\cos^2 V'}{\cos^2 V}.$$

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère dans un système d'axes rectangulaires les deux courbes

$$(M) = f(x, y) = 0, \qquad (M') = f(x, \sqrt{y \pm k^2}) = 0,$$

deux points M *et* M' *de ces courbes dont les coordonnées sont liées par les relations*

$$x_M = x_{M'}, \qquad y_M^2 = y_{M'}^2 \pm k^2,$$

les normales à ces courbes en M *et* M' *se coupent en un point* N *de* Ox, *si* K *est le point d'intersection des tangentes à* (M) *et* (M') *en* M *et* M', *la perpendiculaire élevée en* K *à* KN *coupe* MM' *en* W, *le point* W *appartient à la droite qui joint les centres de courbure* μ *et* μ' *de* (M) *et* (M') *en* M *et* M'.

Exemples. — α. La transformation que nous venons de mentionner fait correspondre à une conique l'une de ses asymptotes ; donc :

La tangente au point M *d'une hyperbole rencontre l'une des asymptotes en* K, *la normale en* M *rencontre l'axe focal en* N, *la perpendiculaire élevée à* KN *en* K *rencontre la perpendiculaire abaissée de* M *sur l'axe focal en* W, *la perpendiculaire abaissée de* W *sur l'asymptote considérée passe par le centre de courbure de l'hyperbole en* M.

β. L'équation générale des *spiriques* est

$$(x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + b^2);$$

la transformation

$$x^2 + b^2 = X^2, \qquad y = Y$$

leur fait correspondre le cercle

$$(X - a)^2 + Y^2 = R^2,$$

d'où un procédé graphique extrêmement simple pour construire le centre de courbure en un point d'une de ces courbes, qui comme on le sait comprennent comme cas particuliers les cassiniennes et les lemniscates.

Problème II. — *Soit* OMN, *un triangle rectangle en* O, *le sommet* O *est fixe*, *le sommet* M *décrit une courbe* (M) *et le côté* MN *est normal à* (M) *en* M; *déterminer la tangente à la courbe* (N) *décrite par* N.

Soit P le point d'intersection de la normale en N à (N) avec OM; soient γ le centre de courbure de (M) en M, I le point d'intersection de PN avec la perpendiculaire élevée en γ à MN.

Nous avons, en désignant par $d\theta$ l'angle de contingence de (M) en M,

$$d(M) = \gamma M\, d\theta, \qquad d(N) = NI\, d\theta;$$

si $d\varphi$ est la variation angulaire de OM, on a de même

$$d(M) = MN\, d\varphi, \qquad d(N) = NP\, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\gamma N}{NI} = \frac{MN}{PN};$$

or

$$\frac{\gamma M}{MN} = \frac{NI}{NP} = \frac{N\gamma}{NH},$$

H étant la projection de P sur MN; par suite

$$\frac{M\gamma}{MN} = \frac{M\gamma}{NH},$$

donc, en désignant par K le symétrique de N par rapport à γ,

$$\frac{2}{\mathrm{NK}} = \frac{1}{\mathrm{NM}} + \frac{1}{\mathrm{NH}};$$

d'où la construction suivante : si K est le symétrique de N par rapport au centre de courbure γ de (M) en M, si H est le conjugué harmonique de M par rapport à N et K, la perpendiculaire élevée en H à MN coupe OM en P, PN est normale à la courbe (N) en N.

Applications. — Si (M) est une courbe définie par l'équation $\rho = f(\omega)$, le vecteur $\overline{\mathrm{OP}}$ représentera en grandeur et en signe ρ'', compté positivement sur la direction $\pi + \omega$.

Si donc nous considérons une courbe définie par l'équation polaire

$$\rho = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_n r_n,$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont les rayons vecteurs $\mathrm{OM}_1, \mathrm{OM}_2, \ldots, \mathrm{OM}_n$ correspondant au même angle ω, de courbes données $r_i = f_i(\omega)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des constantes, la connaissance des centres de courbures γ_i des courbes $r_i = f_i(\omega)$ permettra de déterminer les vecteurs $\overline{\mathrm{OP}_i}$, d'où le vecteur

$$\overline{\mathrm{OP}} = \sum_1^n \alpha_i \overline{\mathrm{OP}_i},$$

d'où enfin le centre de courbure de la courbe

$$\rho = \Sigma \alpha_i r_i.$$

Cette méthode s'applique immédiatement aux *cissoïdes* et aux *conchoïdes;* pour ces dernières notamment elle est plus simple que la détermination des centres de courbure qui résulte de la considération du cercle des inflexions. Pour le limaçon de Pascal, par exemple, on a la détermination suivante :

Soient O *un point d'un cercle de centre* ω, P *un point variable du cercle, si sur* OP *nous portons une longueur constante* $\overline{\mathrm{PM}} = l$, *le lieu de* M *est un limaçon de Pascal.* Pω *coupe le cercle en* N, NM *le coupe en* H, *la parallèle à* PN *menée par* H *coupe* Mω *en* I, PI *coupe* NM *en* K, *le milieu* γ *du segment* NK *est le centre de courbure du limaçon en* M.

Problème III. — *Soient* Ox *et* Oy *deux axes rectangulaires,* Px' *une parallèle à* Ox, (M) *une courbe donnée, un point* M *de* (M) *se projette en* m *et* m' *sur* Px' *et* Oy, *le point* M′ *d'intersection de* Mm' *et* Om *décrit une courbe* (M′); *déterminer les relations qui lient les tangentes et les rayons de courbure aux courbes* (M) *et* (M′) *aux points correspondants* M *et* M′.

Soient $\tan g\,\varphi$ et $\tan g\,\varphi'$ les coefficients angulaires des tangentes à (M) et (M′) en M et M′; posons $\mathrm{OP} = a$; les coordonnées de $\mathrm{M}(x, y)$ et de $\mathrm{M}'(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ par rapport aux axes Ox et Oy sont liées par les relations

$$\mathrm{Y} = y, \qquad \mathrm{X} = \frac{xy}{a},$$

d'où par différentiation

$$d\mathrm{Y} = dy, \qquad d\mathrm{X} = \frac{x\,dy + y\,dx}{a},$$

ou encore

$$d(\mathrm{M}')\sin\varphi' = d(\mathrm{M})\sin\varphi,$$

$$d(\mathrm{M}')\cos\varphi' = d(\mathrm{M})\frac{x\sin\varphi + y\cos\varphi}{a},$$

d'où

$$x + \frac{y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0.$$

Cette équation s'interprète immédiatement; elle exprime que, si la parallèle menée par m' à la tangente à (M) en M coupe Ox en V, mV est parallèle à la tangente en M' à (M').

De cette construction on déduirait facilement que les tangentes en M et M' à (M) et (M') se coupent en T sur mm'; cette propriété étant connue, je n'insisterai pas.

La relation

$$x + \frac{y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0$$

peut s'écrire

$$x + \frac{Y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0,$$

d'où

$$dx + \frac{dY\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{Y\,d\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{a\,d\varphi'}{\sin^2\varphi'} = 0;$$

or

$$d\varphi = \frac{d(M)}{R_M}, \qquad d\varphi' = \frac{d(M')}{R_{M'}},$$

$$dx = d(M)\cos\varphi, \qquad dY = d(M')\sin\varphi';$$

donc

$$\frac{2}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{y}{R_M\sin^3\varphi} + \frac{a}{R_{M'}\sin^3\varphi'} = 0.$$

De cette formule peut se déduire une construction simple du centre de courbure de (M') en M', connaissant le centre de courbure de (M) en M, et réciproquement; elle peut en effet s'écrire

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{a\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi'}}{2R_{M'}\sin^2\varphi'\cos\varphi'} = \frac{y - 2R_M\sin^2\varphi\cos\varphi}{2R_M\sin^2\varphi\cos\varphi};$$

or la relation

$$x + \frac{y}{\operatorname{tang}\varphi} - \frac{a}{\operatorname{tang}\varphi'} = 0$$

montre que la symétrique de la tangente en M à (M)

par rapport à Mm coupe Oy en un point R tel que $OR = \frac{a \tan\varphi}{\tan\varphi'}$; soit C le centre de courbure en M à (M), prenons sur MC le point C′ tel que $\overline{MC} = \overline{CC'}$; projetons C′ en γ sur la symétrique de $m'M$ par rapport à MC; la parallèle à Ox menée par γ coupe Mm en α et

$$M\alpha = 2 R_M \sin^2\varphi \cos\varphi;$$

soit alors M_1 l'intersection de Mm avec Ox, les droites RM_1, $O\alpha$ se coupent en S, MS coupe Oy en R′, et la relation (1) montre que

$$OR' = 2 R_{M'} \sin^2\varphi' \cos\varphi';$$

de cette formule se déduira la longueur $R_{M'}$ par la construction inverse de celle qui nous a donné $M\alpha$, en partant de R_M.

Applications. — La transformation que nous venons d'envisager est la transformation classique connue sous le nom d'*hyperbolisme;* je n'insisterai donc pas sur ses très nombreuses applications.

[M¹5kα]

NOTE SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES;

PAR M. F. BALITRAND.

I. M. Gomes Teixeira (*Nouv. Ann.*, 1916, p. 449) a indiqué un mode de construction des cubiques circulaires, en faisant remarquer que ceux que l'on connaît déjà sont peu nombreux. Mais il existe pour les cubiques générales des procédés de génération classiques qui, convenablement particularisés, doivent s'appliquer aux cubiques circulaires. C'est ce que nous nous proposons de démontrer pour le procédé bien connu dû à Mac-Laurin.

Soient ABCD un quadrilatère quelconque, E, F, G ses points diagonaux, P un point de son plan. Les points de contact des tangentes menées de P aux coniques du faisceau ABCD sont sur une cubique, et réciproquement toute cubique peut être engendrée de cette façon. Il suffit de choisir pour P un point quelconque de la courbe et pour A, B, C, D les points de contact des tangentes issues de P.

La cubique passe en A, B, C, D et les tangentes en ces points sont les droites PA, PB, PC, PD. Elle passe aussi en E, F, G et les tangentes en ces points se coupent en un point Q, situé sur la cubique et qui est le point de concours des polaires de P par rapport aux coniques du faisceau. De plus, la tangente EQ, par exemple, est conjuguée harmonique de EP, par rapport aux côtés du quadrilatère qui se croisent en E; de même pour FQ et GQ. La cubique passe aussi en P; la tangente correspondante étant PQ. Enfin P et Q sont situés sur la conique lieu des pôles de la droite PQ par rapport aux coniques du faisceau ABCD ; car ce sont les points de contact de cette droite avec les deux coniques du faisceau qui la touchent.

Ce mode de génération des cubiques générales, dû à Mac-Laurin comme nous l'avons dit, peut être présenté sous une forme un peu différente. On peut remarquer en effet que les points de contact des tangentes issues de P, avec les coniques du faisceau, sont les points doubles de l'involution déterminée, sur les transversales issues de P, par les coniques du faisceau; ou, si l'on veut, par les côtés et les diagonales du quadrilatère ABCD. On sait que ces points doubles peuvent se construire avec la règle et le compas et, par suite, en particularisant convenablement les données, on obtiendra avec les mêmes instruments une construction des cubiques circulaires.

Il suffit pour cela de supposer que les points A, B, C, D forment un groupe orthocentrique et que le point P est rejeté à l'infini dans une direction quelconque; c'est-à-dire que les tangentes sont menées parallèlement à une direction fixe. Dans ce cas, en effet, les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères qui déterminent sur la droite de l'infini une involution dont les points doubles sont les points cycliques. La cubique passant par ces points est dès lors circulaire.

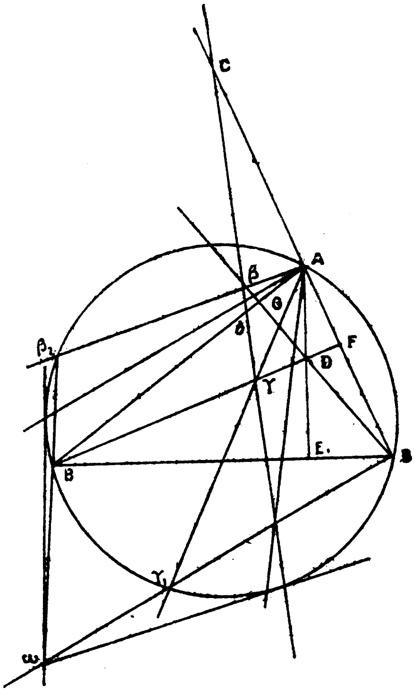
Nous voyons ainsi que les points A, B, C, D sont les points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote réelle et que E, F, G sont les pieds des hauteurs du triangle ABC. En ces derniers points les tangentes sont symétriques de la direction fixe par rapport aux hauteurs correspondantes. Elles concourent en Q qui est le point d'intersection à distance finie de la courbe avec son asymptote réelle. Ce point est situé sur le cercle des neuf points de ABC.

Réciproquement, toute cubique circulaire peut être engendrée de cette façon. Il suffit de choisir, comme points de base du faisceau de coniques, les points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote réelle et, comme point d'émission des tangentes, le point réel situé à l'infini sur la courbe. Il en résulte comme conséquence immédiate que : *dans toute cubique circulaire, les points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote réelle forment un groupe orthocentrique.*

Pour obtenir les points de la cubique, on aura donc à trouver les points doubles des involutions déterminées sur les droites parallèles à la direction fixe par les côtés et les hauteurs du triangle ABC; ce qui peut se faire par la construction suivante :

On donne un triangle ABC *et une direction fixe quelconque. Parallèlement à cette direction, on mène une droite qui rencontre les côtés* AB *et* AC *en*

Fig. 1.



b et c et les hauteurs correspondantes en γ *et* β. *Les droites* Aγ *et* Aβ *coupent le cercle circonscrit à* ABC *en* γ_1 *et* β_1; *soit* ω *le point de concours de* $B\beta_1$ *et* $C\gamma_1$. *Les droites qui joignent le sommet* A *aux points de contact des tangentes, issues de* ω, *au cercle circonscrit, coupent la parallèle à la direction fixe en deux points qui décrivent, quand celle-ci se déplace parallèlement à elle-même, une cubique circulaire* (*fig.* 1).

II. Le calcul permet d'arriver aux mêmes résultats. Prenons des coordonnées trilinéaires et choisissons le triangle EFG pour triangle de référence. Les hyperboles équilatères circonscrites à ABC sont conjuguées par rapport à EFG. Leur équation est donc de la forme

$$fx^2 + gy^2 + hz^2 = 0 \tag{1}$$

avec la condition

$$f + g + h = 0, \tag{2}$$

qui exprime qu'elles passent en D, orthocentre de ABC et centre du cercle inscrit à EFG.

La tangente à une hyperbole au point x, y, z a pour équation

$$fxX + gyY + hzZ = 0. \tag{3}$$

Si l'on écrit qu'elle est parallèle à la droite fixe

$$lX + mY + nZ = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire qu'elle rencontre cette droite sur la droite de l'infini

$$aX + bY + cZ = 0,$$

on trouve la relation

$$f(cm - bn)x + g(an - cl)y + h(bl - am)z = 0. \tag{5}$$

Par l'élimination de f, g et h entre (1), (2) et (5), on arrive à l'équation du lieu cherché qui peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$\Sigma x^2[(an - cl)y - (bl - am)z] = 0,$$
$$\Sigma yz[(bl - am)y - (an - cl)z] = 0,$$
$$(ax + by + cz)(lyz + mzx + nxy)$$
$$-(lx + my + nz)(ayz + bzx + cxy) = 0.$$

Au moyen de ces différentes formes d'équations, on vérifie aisément les propriétés énoncées plus haut. On voit notamment que les tangentes en E, F, G concourent au point

$$(cm - bn)x = (an - cl)y = (bl - am)z,$$

qui est le quatrième point commun au cercle EFG et à la conique

$$lyz + mzx + nxy = 0.$$

On voit aussi que l'équation de la cubique s'obtient par l'élimination du paramètre λ entre les deux équations

$$ayz + bzx + cxy - \lambda(lyz + mzx + nxy) = 0,$$
$$ax + by + cz - \lambda(lx + my + nz) = 0.$$

La droite de l'infini et la droite

$$lx + my + nz = 0$$

sont les transformées isogonales du cercle EFG et de la conique ci-dessus. Il en résulte un nouveau mode de génération des cubiques circulaires.

III. Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés de ces courbes en nous servant des coordonnées cartésiennes. Dans ce système de coordonnées, leur équation générale est

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2)$$
$$+ ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Prenons pour origine le point Q où l'asymptote réelle coupe la courbe, et pour axe des x la tangente en ce point. L'équation précédente prend la forme

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2fy = 0.$$

Il reste à exprimer que l'asymptote réelle passe à l'origine, ce qui fournit pour h la valeur suivante :

$$h = \frac{b\alpha^2 + a\beta^2}{2\alpha\beta}.$$

En la portant dans l'équation ci-dessus, on obtient pour l'équation définitive des cubiques circulaires

$$(\alpha x + \beta y)\left(x^2 + y^2 + \frac{a}{\alpha}x + \frac{b}{\beta}y\right) + 2fy = 0.$$

Nous poserons

$$\mathrm{P} = \alpha x + \beta y, \qquad \mathrm{C} = x^2 + y^2 + \frac{a}{\alpha}x + \frac{b}{\beta}y;$$

de sorte que l'équation s'écrit

$$\mathrm{P}.\mathrm{C} + 2fy = 0$$

et résulte de l'élimination du paramètre variable λ entre les deux équations

$$\mathrm{C} + 2\lambda fy = 0, \qquad \mathrm{P} - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Il s'ensuit un mode de génération, au moyen d'un faisceau de cercles et d'un faisceau de droites parallèles qui se correspondent homographiquement, analogue à celui qui est donné par M. G. Loria dans ses *Spezielle ebene Curven* (t. I, p. 33).

Pour abréger un peu le langage, nous appellerons le cercle $C = 0$ *cercle focal* et le point Q *point principal* (*voir* G. Loria, *loc. cit.*); T sera le tangentiel de Q.

Le cercle focal ne rencontre la cubique qu'en deux points à distance finie, savoir le point principal et son tangentiel. Les autres points de rencontre étant rejetés à l'infini, le cercle est bitangent à la cubique aux points cycliques. Par suite, son centre est le foyer singulier de la courbe; de sorte qu'en désignant par x_0, y_0 les coordonnées de celui-ci, on a

$$x_0 = -\frac{a}{2\alpha}, \qquad y_0 = -\frac{b}{2\beta}.$$

Proposons-nous de déterminer les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote. Nous trouvons d'abord qu'ils sont situés sur la courbe

$$(\alpha x + \beta y)[\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0)] - f\alpha = 0,$$

c'est-à-dire sur une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes l'asymptote réelle de la cubique et la perpendiculaire abaissée du foyer singulier sur celle-ci.

En combinant son équation avec celle de la cubique, nous obtenons

$$\alpha(x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y) + 2y[\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0)] = 0$$

ou bien

$$\alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy - 2x_0(\alpha x + \beta y) = 0,$$

qui représente une autre hyperbole équilatère. Celle-ci passe à l'origine où elle est tangente à l'asymptote réelle de la cubique; elle passe aussi en T et par les points d'intersection du cercle focal et de son diamètre perpendiculaire à l'asymptote réelle. Son centre est au milieu de QT.

La première de ces hyperboles peut encore être définie comme le lieu des milieux des cordes de la cubique parallèles à l'asymptote réelle. En effet, si ξ et η sont les coordonnées d'un point du lieu et

$$x = \xi + \beta\rho, \qquad y = \eta - \alpha\rho$$

les équations d'une corde, l'équation qui donne les valeurs de ρ correspondant aux points d'intersection est

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha\xi + \beta\eta)\rho^2 \\
&\quad + 2\{(\alpha\xi + \beta\eta)[\beta(\xi - x_0) - \alpha(\eta - y_0] - f\alpha\}\rho \\
&\quad + (\alpha\xi + \beta\eta)(\xi^2 + \eta^2 - 2x_0\xi - 2y_0\eta) + 2f\eta = 0;
\end{aligned}$$

et l'on voit que la somme des racines est nulle si le point est sur l'hyperbole précitée. En résumé :

Les points de contact des tangentes à la cubique parallèles à l'asymptote réelle sont les points d'intersection de deux hyperboles équilatères.

La première a pour asymptotes l'asymptote réelle de la cubique et la perpendiculaire abaissée du foyer singulier sur celle-ci. Elle est le lieu des milieux des cordes de la cubique parallèles à l'asymptote réelle.

La seconde passe par le point principal, où elle touche l'asymptote réelle, et son tangentiel. Son centre est au milieu du segment qui joint ces points. Elle passe en outre par les points d'intersection du cercle focal et de son diamètre perpendiculaire à l'asymptote réelle.

Si l'on pose

$$\frac{\alpha}{\beta} = -m, \qquad \frac{f}{\beta} = -K^2,$$

l'équation de la cubique s'écrit

$$(y - mx)(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y) - 2K^2y = 0.$$

La droite

$$y = mx + \lambda,$$

parallèle à l'asymptote réelle, la coupe en deux points à distance finie qui sont situés sur le cercle

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2\left(y_0 + \frac{K^2}{\lambda}\right)y = 0.$$

Ce cercle coupe l'axe Oy en un point R tel que

$$QR = 2\left(y_0 + \frac{K^2}{\lambda}\right),$$

tandis que le cercle focal le coupe en un point U tel que $QU = 2y_0$. Donc

$$RU = \frac{2K^2}{\lambda} \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda = \frac{2K^2}{RU}.$$

Par suite, en portant à partir de l'origine une longueur égale à $\frac{2K^2}{RU}$, on obtient l'ordonnée à l'origine de la droite et il en résulte pour les cubiques circulaires le mode de génération suivant :

Soit TQU *un triangle rectangle en* Q. *Par les sommets* T *et* Q *on fait passer un cercle variable qui coupe l'autre côté en* R. *On porte à partir de* Q, *suivant* QU, *une longueur* $QS = \frac{2K^2}{RQ}$, K *étant un paramètre constant, et par le point ainsi obtenu on mène une parallèle à une direction fixe. Ses points d'intersection avec le cercle variable décrivent une cubique circulaire.*

Réciproquement, toute cubique circulaire peut être engendrée par ce procédé.

En passant maintenant des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, l'équation des cubiques prend la forme

$$\rho^2(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)$$
$$-2\rho(\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega)(x_0\cos\omega+y_0\sin\omega)+2f\sin\omega=0.$$

Une transversale issue de l'origine rencontre la courbe en deux points, autres que l'origine, et le rayon vecteur du milieu du segment qui les joint est égal à

$$x=x_0\cos\omega+y_0\sin\omega.$$

Le lieu de ce point milieu est donc le cercle

$$x^2+y^2-x_0x-y_0y=0,$$

c'est-à-dire le cercle décrit sur le segment qui joint le point principal au foyer singulier comme diamètre. On a donc ce théorème :

Si, autour du point principal, on fait pivoter une transversale qui rencontre la cubique en deux points, autres que l'origine, le lieu du milieu de ces deux points est le cercle décrit sur le segment qui joint le point principal et le foyer singulier comme diamètre.

Cette proposition est connue, au moins sous une autre forme (*voir* G. Loria, *loc. cit.*). On peut la compléter de la façon suivante :

Le cercle décrit sur le segment qui joint le point principal et le foyer comme diamètre passe par les points de contact des tangentes à la cubique issues du point principal.

Après ce qui précède, cela est à peu près évident géométriquement.

Voici comment on peut le démontrer par le calcul.

La première polaire de l'origine par rapport à la cubique a pour équation

$$(\alpha x + \beta y)(x_0 x + y_0 y) - 2fy = 0.$$

Par une combinaison avec l'équation de la courbe, on obtient

$$x^2 + y^2 - x_0 x - y_0 y = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du cercle précédent.

L'équation polaire de la cubique donne encore, en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons vecteurs de ses points d'intersection avec une transversale issue de l'origine,

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{2f \sin\omega}{\alpha \cos\omega + \beta \sin\omega}.$$

Par suite, si l'on porte sur la transversale une longueur égale à la moyenne géométrique de ρ_1 et ρ_2, on obtient une courbe qui a pour équation

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) - 2fy = 0.$$

C'est une cubique circulaire qui présente la particularité suivante : l'origine est à la fois centre, point d'inflexion et foyer singulier de la courbe.

[B12a] [L¹1c]

CONTRIBUTION A LA RÉSOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. AURIC.

Considérons l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

dont les racines sont représentées par les vecteurs

$$a_1 = \overline{GA_1}, \qquad a_2 = \overline{GA_2}, \qquad a_3 = \overline{GA_3}.$$

En posant

$$x = \overline{GX},$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x^3 + px + q &= (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \\ = \quad \varphi(\overline{GX}) \quad &= \overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X} \end{aligned}$$

avec

$$a_1 + a_2 + a_3 = \Sigma\,\overline{GA_1} = 0, \qquad \Sigma\, a_1 a_2 = \Sigma\,\overline{GA_1}.\overline{GA_2} = p,$$
$$a_1 a_2 a_3 = \overline{GA_1}.\overline{GA_2}.\overline{GA_3} = -q.$$

La première de ces relations montre que G est le barycentre de $A_1 A_2 A_3$; on tire des deux autres

$$\frac{1}{\overline{GA_1}} + \frac{1}{\overline{GA_2}} + \frac{1}{\overline{GA_3}} = -\frac{p}{q}.$$

Si, dans l'équation dérivée

$$\varphi'(x) = 3x^2 + p = 0,$$

nous posons $p = -3f^2$, les racines seront

$$\overline{GF} = +f, \qquad \overline{GF'} = -f,$$

et il est clair que G est au milieu de FF'.

On a

$$\varphi'(x) = 3(x+f)(x-f) = \varphi'(\overline{GX}) = 3\,\overline{FX}.\overline{F'X}.$$

On connaît la formule

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{3(x^2 - f^2)}{x^3 + px + q} = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3},$$

d'où

$$\frac{3\,\overline{FX}.\overline{F'X}}{\overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X}} = \frac{1}{\overline{A_1X}} + \frac{1}{\overline{A_2X}} + \frac{1}{\overline{A_3X}}.$$

Lorsque X vient en F ou en F′, on a

$$\frac{1}{\overline{A_1F}} + \frac{1}{\overline{A_2F}} + \frac{1}{\overline{A_3F}} = \frac{1}{\overline{A_1F'}} + \frac{1}{\overline{A_2F'}} + \frac{1}{\overline{A_3F'}} = 0,$$

ce qui constitue une propriété caractéristique des points F et F′; nous verrons plus loin que ces points sont les foyers de l'ellipse de Steiner, tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en leurs milieux.

Nous poserons

$$\frac{1}{\overline{A_1X}} + \frac{1}{\overline{A_2X}} + \frac{1}{\overline{A_3X}} = \frac{3}{\overline{YX}},$$

d'où, d'après ce qui précède,

$$\overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X} = \overline{FX}.\overline{F'X}.\overline{YX}.$$

Nous dirons que le vecteur $\overline{YX}$ ainsi défini est la moyenne harmonique des vecteurs $\overline{A_1X}$, $\overline{A_2X}$, $\overline{A_3X}$; plus brièvement, nous dirons que Y est l'harmonique de X par rapport à $A_1A_2A_3$.

On pourrait étudier la transformation générale qui fait correspondre à X son harmonique Y; on verrait qu'à tout point X situé dans le voisinage de A_i correspond un point Y dans le même voisinage, de sorte que les sommets A_i sont les points doubles de la transformation; à tout point X dans le voisinage de F ou de F′ correspond un point Y situé dans le voisinage de la droite de l'infini.

Nous avons identiquement

$$x^3 + px + q = x\left(x^2 + \frac{p}{3}\right) + \frac{2p}{3}\left(x + \frac{3q}{2p}\right).$$

Posons

$$u = \overline{GU} = -\frac{3q}{2p},$$

d'où

$$\frac{3}{2\,\overline{GU}} = -\frac{p}{q} = \frac{1}{\overline{GA_1}} + \frac{1}{\overline{GA_2}} + \frac{1}{\overline{GA_3}};$$

$2\overline{GU}$ est la moyenne harmonique des vecteurs $\overline{GA_i}$; en d'autres termes, l'harmonique de G est son symétrique par rapport à U.

Nous aurons donc

$$\varphi(x) = x(x^2 - f^2) - 2f^2(x-u),$$

d'où nous tirons la *formule générale vectorielle*

$$\varphi(\overline{GX}) = \overline{A_1X}.\overline{A_2X}.\overline{A_3X} = \overline{GX}.\overline{FX}.\overline{F'X} + 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{UX}.$$

Si X vient en G, on a

$$\overline{A_1G}.\overline{A_2G}.\overline{A_3G} = q = 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{UG};$$

Si X vient en U, on trouve

$$\overline{A_1U}.\overline{A_2U}.\overline{A_3U} = \overline{GU}.\overline{FU}.\overline{F'U},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{A_1U}} + \frac{1}{\overline{A_2U}} + \frac{1}{\overline{A_3U}} = \frac{3\overline{FU}.\overline{F'U}}{\overline{A_1U}.\overline{A_2U}.\overline{A_3U}} = \frac{3}{\overline{GU}},$$

ce qui montre que G est l'harmonique de U.

Nous avons donc l'interprétation géométrique

$$p = 3\overline{GF}.\overline{GF'}, \qquad q = 2\overline{GF}.\overline{GF'}.\overline{UG}.$$

Nous avons

$$\overline{GA_1} + \overline{A_1A_2} = \overline{GA_2},$$

d'où, en posant $\overline{A_1A_2} = b_3$, on aura

$$b_1 = a_3 - a_2, \qquad b_2 = a_1 - a_3, \qquad b_3 = a_2 - a_1.$$

On en tire

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2,$$

et, comme $a_1 + a_2 + a_3 = 0$,

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 = 3(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) = 3p.$$

On a également

$$b_2 - b_3 = 2a_1 - a_2 - a_3 = 3a_1.$$

Nous considérerons les vecteurs

$$\overline{GM_1} = \frac{b_1}{\sqrt{3}} = m_1, \qquad \overline{GM_2} = \frac{b_2}{\sqrt{3}} = m_2, \qquad \overline{GM_3} = \frac{b_3}{\sqrt{3}} = m_3;$$

il est clair qu'on aura

$$m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = p,$$

et m_1, m_2, m_3 seront les racines de l'équation

$$\psi(x) = x^3 + px + r = 0$$

avec

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{b_1 b_2 b_3}{3\sqrt{3}} = -r.$$

Les deux triangles $A_1 A_2 A_3$, $M_1 M_2 M_3$ peuvent être qualifiés de réciproques, c'est-à-dire qu'on a

$$\overline{GM_1} = m_1 = \frac{\overline{A_2 A_3}}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{GA_1} = a_1 = \frac{b_2 - b_3}{3} = \frac{\overline{GM_2} - \overline{GM_3}}{\sqrt{3}} = \frac{M_3 M_2}{\sqrt{3}}.$$

Chaque vecteur est égal au côté correspondant de l'autre triangle divisé par $\sqrt{3}$: en outre, ces deux triangles ont leurs ellipses de Steiner homofocales.

On aura comme précédemment

$$\psi(x) = x^3 + px + r = x\left(x^2 + \frac{p}{3}\right) + \frac{2p}{3}\left(x + \frac{3r}{2p}\right).$$

Posons

$$v = \overline{GV} = -\frac{3r}{2p},$$

d'où

$$\frac{3}{2\overline{GV}} = -\frac{r}{p} = \frac{1}{\overline{GM_1}} + \frac{1}{\overline{GM_2}} + \frac{1}{\overline{GM_3}},$$

$2\overline{GV}$ est la moyenne harmonique des vecteurs $\overline{GM_1}$, $\overline{GM_2}$, $\overline{GM_3}$; en d'autres termes, l'harmonique de G (par rapport à $M_1M_2M_3$) est le symétrique de G par rapport à V.

On a

$$\psi(x) = x(x^2 - f^2) - 2f^2(x - v),$$

d'où la *propriété générale vectorielle*

$$\psi(\overline{GX}) = \overline{M_1X}.\overline{M_2X}.\overline{M_3X} = \overline{GX}.\overline{FX}.\overline{F'X} + 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{VX}.$$

Si X vient en G, on a

$$\overline{M_1G}.\overline{M_2G}.\overline{M_3G} = r = 2\overline{FG}.\overline{F'G}.\overline{VG};$$

Si X vient en V, on trouve

$$\overline{M_1V}.\overline{M_2V}.\overline{M_3V} = \overline{GV}.\overline{FV}.\overline{F'V},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{M_1V}} + \frac{1}{\overline{M_2V}} + \frac{1}{\overline{M_3V}} = \frac{3\overline{FV}.\overline{F'V}}{\overline{M_1V}.\overline{M_2V}.\overline{M_3V}} = \frac{3}{\overline{GV}},$$

ce qui montre que G est l'harmonique de V par rapport à $M_1M_2M_3$.

Nous savons que le discriminant Δ satisfait à la relation

$$\begin{aligned}\Delta = 4p^3 + 27q^2 &= -[(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)]^2\\ &= -27m_1^2m_2^2m_3^2\\ &= -27r^2,\end{aligned}$$

et comme

$$p = -3f^2, \qquad q = -\frac{2pu}{3}, \qquad r = -\frac{2pv}{3},$$

il vient, après réductions,

$$q^2 + r^2 = 4f^6, \qquad u^2 + v^2 = f^2$$

ou

$$\overline{\mathrm{GU}}^2 + \overline{\mathrm{GV}}^2 = \overline{\mathrm{GF}}^2.$$

Telle est la relation simple entre les vecteurs dont nous avons donné la signification géométrique.

Il en résulte que $\overline{\mathrm{GV}}$ est parallèle à la bissectrice extérieure de FUF′ et $\overline{\mathrm{GU}}$ parallèle à celle de FVF′ : on a, en outre,

$$\overline{\mathrm{GU}}^2 = \overline{\mathrm{VF}}.\overline{\mathrm{F'V}},$$
$$\overline{\mathrm{GV}}^2 = \overline{\mathrm{UF}}.\overline{\mathrm{F'U}},$$

d'où il résulte que $\overline{\mathrm{GU}}$ et $\overline{\mathrm{GV}}$ sont des diamètres conjugués de l'ellipse de Steiner.

On sait que la racine a_i de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

est donnée par la formule de Cardan

$$a_i = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}},$$

et, comme $\Delta = -27r^2$,

$$a_i = \sqrt[3]{\frac{-q + ir}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - ir}{2}},$$

et, en tenant compte de $q^2 + r^2 = 4f^6$,

$$\frac{a_i}{f^2} = \sqrt[3]{\frac{2}{-q + ir}} + \sqrt[3]{\frac{2}{-q - ir}},$$

et, en utilisant les relations ci-dessus,

$$\frac{a_i}{\sqrt[3]{f^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-u+iv}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-u-iv}}.$$

On trouverait, par permutation des u et des v,

$$\frac{m_i}{\sqrt[3]{f^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-v+iu}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-v-iu}}.$$

Nous avons trouvé précédemment, en appelant b_1, b_2, b_3 les côtés de $A_1A_2A_3$,

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 = 3p;$$

mais comme $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, on a également

$$b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2 = -(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) = -3p,$$

car

$$(b_1 + b_2)^2 = -b_3(b_1 + b_2).$$

On sait, d'après une remarque due à M. Laisant [1], que si l'on construit sur A_2A_3 deux triangles équilatéraux de côté et d'autre de la droite A_2A_3, et si l'on appelle ω, ω' les centres de ces deux triangles, on aura

$$\overline{G\omega}.\overline{G\omega'} = \overline{GF}^2 = \overline{GF'}^2,$$

F, F' étant les foyers de l'ellipse de Steiner. Mais on trouve aisément que

$$\overline{G\omega} = \frac{1}{6}(b_3 - b_2) + \frac{i}{2\sqrt{3}}b_1,$$

$$\overline{G\omega'} = \frac{1}{6}(b_3 - b_2) - \frac{i}{2\sqrt{3}}b_1,$$

---

[1] Congrès de Toulouse, 1887; voir *Géométrie* de Rouché et de Comberousse, t. II, p. 624.

d'où

$$\overline{G\omega}.\overline{G\omega'} = \frac{1}{36}(b_3^2 - 2b_2b_3 + b_2^2 + 3b_1^2)$$
$$= \frac{1}{9}(b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2) = -\frac{p}{3} = f^2,$$

ce qui montre que F, F′ sont bien les foyers de l'ellipse de Steiner.

On connaît le théorème suivant : *Si, sur chaque côté* $A_2A_3\ldots$ *d'un triangle* $A_1A_2A_3$, *on construit à l'intérieur et à l'extérieur des triangles équilatéraux de côté* $A_2A_3\ldots$, *les centres de ces triangles forment un triangle équilatéral.*

On obtient ainsi deux triangles équilatéraux de côtés

$$c,\ cj,\ cj^2,\quad d,\ dj^2,\ dj\qquad (\text{avec } j^3 = 1).$$

Je dis qu'on a

$$cd = 3f^2.$$

En effet,

$$b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2$$
$$= 3(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) = 9p;$$

mais le premier membre se décompose comme il suit :

$$-(b_1 + b_2j + b_3j^2)(b_1 + b_2j^2 + b_3j) = 9p,$$

et chacun des facteurs entre parenthèses est respectivement égal à $3c$ et à $3d$ comme il est aisé de s'en rendre compte.

Il vient donc

$$cd = -p = 3f^2.$$

La même propriété a lieu pour les triangles équilatéraux construits sur $M_1M_2M_3$.

Pour que U se trouve sur la droite FF′ (et dans ce cas V se trouve aussi sur cette droite), il faut et il suffit que p^3, q^2, r^2 et, par conséquent, Δ aient des des arguments égaux (mod π).

Dans ce cas, les sommets A_1, A_2, A_3 sont également sur FF′ ou forment un triangle isoscèle ayant cette droite comme axe suivant que Δ est négatif ou positif en prenant FF′ comme axe initial de coordonnées.

[H5a]

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS;

Par M. J.-B. POMEY.

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et à second membre

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + a_2 y^{(m-2)} + \ldots + a_m y = f(x).$$

Je pose

$$F(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m.$$

L'équation

$$F(z) = 0$$

est l'équation caractéristique, dont j'appelle les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Je les suppose inégales.

L'équation différentielle elle-même pourra s'écrire symboliquement, pour abréger,

$$F_y = f(x).$$

J'aurai

$$F'(z)_{z=\alpha_i} = (\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2)\ldots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i - \alpha_m).$$

Je pose

$$F'(z)_{z=\alpha_i} = F'(\alpha_i) = \alpha_i^{m-1} + p_1^i \alpha_i^{m-2} + p_2^i \alpha_i^{m-3} + \ldots + p_{m-1}^i,$$

ce qui détermine les coefficients p^i. J'écrirai symboliquement, pour abréger,

$$y_0^{(m-1)} + p_1^i y_0^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1}^i y_0 = F'_{\alpha_i}(y_0).$$

Enfin, je poserai aussi

$$I_i = \int_0^x e^{-\alpha_i x} f(x)\, dx$$

et je remarque qu'il y a m intégrales de ce genre.

Cela posé, la solution y qui, pour $x = 0$, se réduit à y_0 en même temps que ses $m - 1$ premières dérivées deviennent égales à $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, est donnée par la formule

$$y = \sum_i e^{\alpha_i x} \frac{I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)}{F'(\alpha_i)}.$$

C'est cette formule que nous proposons.

Pour la vérifier, il suffit de former les dérivées successives; on a ainsi

$$y' = \sum \frac{\alpha_i}{F'(\alpha_i)} e^{\alpha_i x} [I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)] + \sum \frac{1}{F'(\alpha_i)} f(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y^m = \sum \frac{\alpha_i^m}{F'(\alpha_i)} e^{\alpha_i x} [I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)] + f(x) \sum \frac{\alpha_i^{m-1}}{F'(\alpha_i)}$$
$$+ f'(x) \sum \frac{\alpha_i^{m-2}}{F'(\alpha_i)} + \ldots + f^{(m-1)}(x) \sum \frac{1}{F'(\alpha_i)}.$$

Or, en vertu des identités d'Euler, toutes ces formules se réduisent; on a, en effet,

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha_i)} = 0, \qquad \sum \frac{\alpha_i}{F'(\alpha_i)} = 0, \qquad \ldots,$$
$$\sum \frac{\alpha_i^{m-2}}{F'(\alpha_i)} = 0, \qquad \sum \frac{\alpha_i^{m-1}}{F'(\alpha_i)} = 1.$$

Formons F_y, il vient

$$F_y = \sum \frac{F(\alpha_i)}{F'(\alpha_i)} e^{\alpha_i x} [I_i + F'_{\alpha_i}(y_0)] + f(x)$$

et cette équation se réduit à

$$F_y = f(x),$$

parce que α_i est racine de $F(z)$.

Donc y est solution.

Pour montrer que y et ses dérivées successives se réduisent à $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, je forme l'expression :

$$y^{(m-1)} + p_1^i y^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1}^i y$$

d'après les valeurs de ces dérivées simplifiées par les relations d'Euler et j'obtiens :

$$y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1}^{iy} = \sum_j \frac{F'_{\alpha_i}(\alpha_j)}{F'(\alpha_j)} e^{\alpha_j x} [I_j + F'_{\alpha_j}(y_0)].$$

Le second membre est une fonction linéaire des quantités $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, qui, dans la formule proposée pour notre intégrale, jouent le rôle de constantes arbitraires. Il faut les déterminer, ce qui peut se faire, en donnant à x la valeur zéro dans l'équation précédente et dans les équations du même type, obtenues en donnant à i les valeurs 1, 2, 3, ..., m. Or, si dans l'équation précédente, nous faisons $x = 0$, nous avons $I_j = 0$, $e^{\alpha_j x} = 1$; puis $F'_{\alpha_i}(a_j) = 0$ dès que i est différent de j et, pour $i = j$, nous avons $F'_{\alpha_i}(\alpha_i) = F'(\alpha_i)$. L'équation se réduit donc à la suivante où, dans le premier membre, les quantités $y_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$ sont les valeurs de y et de ses $m - 1$ premières dérivées pour $x = 0$, savoir

$$y_0^{(m-1)} + p_1^i y_0^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1}^i y_0 = F'_{\alpha_i}(y_0),$$

ce qui est une identité. Donc les inconnues $y_0, y'_0, \ldots,$

$y_0^{(m-1)}$ qui figurent dans les seconds membres doivent bien avoir les valeurs qu'on leur a données; les constantes arbitraires $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$ sont bien égales aux valeurs de y et de ses $(m-1)$ premières dérivées pour $x = 0$.

Il est d'ailleurs facile de voir que le déterminant des équations qui déterminent les valeurs à donner aux constantes arbitraires est différent de zéro, de telle sorte qu'il n'y a pas d'autre solution possible pour les valeurs à leur attribuer que celle qui a été indiquée. Si, en effet, il y avait une relation linéaire identique entre les $F'_{\alpha_i}(y_0)$, comme ce serait le cas si le déterminant s'annulait, on aurait

$$\sum A_i F'_{\alpha_t}(y_0) = 0.$$

Or je dis que toutes les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont nulles.

Pour prouver, par exemple, que l'on a $A_i = 0$, il suffit de poser

$$y_0 = 1, \qquad y'_0 = \alpha_i, \qquad y''_0 = \alpha_i^2, \qquad y_0^{(m-1)} = \alpha_i^{m-1}.$$

On a alors, en général,

$$F'_{\alpha_j}(\alpha_i) = 0$$

si j est différent de i; mais comme les racines sont simples, on a

$$F'(\alpha_i) \gtrless 0,$$

d'où

$$\sum_j A_j F'_{\alpha_j}(\alpha_i) = A_i F'(\alpha_i) = 0$$

et, par suite : $A_i = 0$.

Il est donc prouvé que le déterminant n'est pas nul.

Les traités de calcul différentiel indiquent bien que l'intégration de l'équation différentielle linéaire à second membre se ramène aux quadratures, quand on sait intégrer l'équation sans second membre, mais je n'ai pas vu la solution explicite que je viens de donner dans le cas de l'équation à coefficients constants. Je trouve qu'il y a une certaine analogie entre la formule que je propose et la formule d'interpolation de Lagrange.

CORRESPONDANCE.

M. **L. Poli**. — *Solutions des questions* 774 *et* 1444. — La solution de la question 774 est donnée dans la *Théorie des nombres* d'Ed. Lucas, Tome I (seul publié), pages 92-93. Cette question, de Prouhet, remontant à 1866, doit donc disparaître de la liste de celles qui sont restées sans solution.

Il en est de même pour la question 1444, de Cesàro, dont la solution se trouve dans l'Ouvrage précité, page 257.

M. **F. Egan**. — *Sur la solution de la question* 1511 (1918, p. 70). — La solution de M. Chapuis n'est pas tout à fait exacte. Un système de deux droites n'est pas une forme intermédiaire entre ellipses et hyperboles, à moins que les droites ne soient parallèles. Il y a trois couples de droites satisfaisant cette condition : par exemple BC et la parallèle passant par A. Chaque couple a une infinité de centres, situés sur l'un des côtés du triangle médian. C'est donc ce triangle qui doit remplacer le triangle ABC dans le raisonnement de M. Chapuis.

L'analyse conduit assez rapidement à la même conclusion. Soit

$$lyz + mzx + nxy = 0$$

une conique circonscrite à ABC. En éliminant z entre cette équation et celle de la droite à l'infini,

$$x + y + z = 0,$$

on obtient une équation dont le discriminant

$$\Delta = (l + m - n)^2 - 4lm$$

décidera par son signe si la conique est une ellipse ou une hyperbole. Or, si le centre est (α, β, γ), on trouve

$$\frac{l}{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)} = \frac{m}{\beta(\gamma+\alpha-\beta)}$$
$$= \frac{n}{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)} = \theta = \frac{l+m-n}{(\gamma+\alpha-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)},$$

d'où

$$\Delta = -\theta^2(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma).$$

Donc Δ change de signe chaque fois qu'on traverse l'un des côtés du triangle médian. A l'intérieur de ce triangle, Δ a le signe négatif, la conique est donc une ellipse.

ERRATA.

1918, page 105, ligne 8, *au lieu de* on nous a, *lire* or nous avons.
1918, page 105, ligne 14, *au lieu de* de cercle, *lire* de ce cercle.
1918, page 106, ligne 12, *au lieu de* cercle C, *lire* cercle inscrit C.
1918, page 106, ligne 13, *au lieu de* cet *lire* cette.

[L[1]21]

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES TANGENTIELS DE CONIQUES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Proposons-nous d'abord de chercher les cercles qui font partie d'un réseau tangentiel (système linéaire à deux paramètres) de coniques donné.

Soient

$$(1)\qquad f(u, v, w) = \begin{array}{l} au^2 + a'v^2 + a''w^2 \\ + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0 \end{array}$$

l'équation tangentielle d'une conique C et

$$(2)\quad F(x, y, 1) = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2B'x + 2By + A'' = 0$$

son équation ponctuelle en coordonnées cartésiennes rectangulaires. On sait que les coefficients A, A', ... sont proportionnels aux mineurs correspondants du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}.$$

Pour que C soit un cercle, il faut qu'on ait

$$B'' = 0, \qquad A - A' = 0$$

ou

$$(3)\qquad bb' - a''b'' = 0,$$

$$(4)\qquad a'a'' - b^2 - aa'' + b'^2 = 0.$$

Supposons que C fasse partie d'un réseau tangentiel défini par l'équation

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

où

$$f_i = a_i u^2 + a'_i v^2 + \ldots.$$

On a

$$a = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3,$$
$$a' = a'_1 \lambda_1 + a'_2 \lambda_2 + a'_3 \lambda_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on considère λ_1, λ_2 et λ_3 comme des coordonnées homogènes, les équations (3) et (4) représentent deux coniques qui se coupent généralement en quatre points. On en conclut qu'il existe en général quatre cercles dans un réseau tangentiel de coniques. On peut prévoir des cas où il y en aura une infinité.

2. Cherchons à déterminer, sous une forme aussi simple que possible, la relation qui existe entre ces quatre cercles. On pourrait poursuivre à cet effet l'étude du système (3), (4). Mais il vaut mieux procéder de la manière suivante :

Soient (A), (B), (C) trois cercles donnés, ayant pour centres les points A, B, C et dont les rayons sont R_a, R_b, R_c. Cherchons un quatrième cercle (D), de centre D et de rayon R_d, appartenant au réseau tangentiel défini par les trois premiers.

Pour n'aborder que le cas général, je supposerai que les points A, B, C ne sont pas en ligne droite [1].

Soient x_1, y_1 les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point A. L'équation tangentielle du cercle A s'obtient immédiatement en écrivant que la distance

---

[1] Si les points A, B, C sont en ligne droite, on trouve une infinité de cercles (D), dont les centres D sont sur la droite ABC et qui sont bitangents à la conique bitangente aux cercles (A), (B), (C).

du point A à une tangente au cercle est égale à R_a, ce qui donne

$$A^2 - R_a^2 S = 0,$$

en posant

$$A = x_1 u + y_1 v + w, \qquad S = u^2 + v^2.$$

Les équations des cercles (B), (C), (D) ont des formes analogues.

Si les quatre cercles font partie d'un réseau tangentiel, on a l'identité

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\alpha(A^2 - R_a^2 S) + \beta(B^2 - R_b^2 S) \\ &\quad + \gamma(C^2 - R_c^2 S) + \delta(D^2 - R_d^2 S) = 0, \end{aligned}$$

α, β, γ, δ étant certains coefficients. Or cela peut s'écrire

$$\delta D^2 - (\alpha R_a^2 + \beta R_b^2 + \gamma R_c^2 + \delta R_d^2) S = -\alpha A^2 - \beta B^2 - \gamma C^2.$$

Le premier membre, égalé à zéro, donnerait l'équation tangentielle d'un cercle de centre D; le second membre, égalé à zéro, celle d'une conique conjuguée au triangle ABC. Par conséquent D est nécessairement le centre du cercle conjugué au triangle ABC, c'est-à-dire l'orthocentre de ce triangle. La relation entre les points A, B, C, D est symétrique. Disons, pour abréger, qu'ils forment un système *orthocentrique*.

Cherchons maintenant une relation entre les rayons R_a, R_b, R_c, R_d. A cet effet, remarquons que chacun des points A, B, C, D est le centre d'un cercle conjugué au triangle formé par les trois autres. Désignons par ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d les rayons des quatre cercles.

On a, entre les points A, B, C, D, la relation

$$(6) \qquad \frac{A^2}{\rho_a^2} + \frac{B^2}{\rho_b^2} + \frac{C^2}{\rho_c^2} + \frac{D^2}{\rho_d^2} - S = 0.$$

Elle peut en effet s'écrire, par exemple,

$$A^2 - \rho_a^2 S = -\frac{\rho_a^2}{\rho_b^2} B^2 - \frac{\rho_a^2}{\rho_c^2} C^2 - \frac{\rho_a^2}{\rho_d^2} D^2$$

et exprime bien que le cercle de centre A et de rayon ρ_a est conjugué par rapport au triangle BCD.

La relation (5) et la relation (6) doivent être identiques [1]. On a donc

$$\alpha\rho_a^2 = \beta\rho_b^2 = \gamma\rho_c^2 = \delta\rho_d^2 = \alpha R_a^2 + \beta R_b^2 + \gamma R_c^2 + \delta R_d^2.$$

Si l'on désigne par K la valeur commune de ces quantités, il vient

$$\alpha = \frac{K}{\rho_a^2}, \qquad \beta = \frac{K}{\rho_b^2}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$K = K\left(\frac{R_a^2}{\rho_a^2} + \frac{R_b^2}{\rho_b^2} + \frac{R_c^2}{\rho_c^2} + \frac{R_d^2}{\rho_d^2}\right),$$

et enfin

$$(7) \qquad \frac{R_a^2}{\rho_a^2} + \frac{R_b^2}{\rho_b^2} + \frac{R_c^2}{\rho_c^2} + \frac{R_d^2}{\rho_d^2} = 1.$$

En résumé :

Il existe en général quatre cercles dans un réseau tangentiel de coniques. Leurs centres forment un système orthocentrique et leurs rayons R_a, R_b, R_c, R_d *satisfont à la relation* (7), ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d *désignant les rayons des cercles conjugués aux quatre triangles formés par les quatre points.*

On peut encore donner à la relation entre les quatre cercles une forme géométrique qui permet de construire

---

[1] Si en effet ces deux relations étaient distinctes, on en conclurait, par l'élimination de S, que la conique réduite au point double D, par exemple, est conjuguée par rapport au triangle ABC, ce qui n'est pas vrai.

l'un d'eux, étant donnés les trois autres. Pour cela, remarquons d'abord qu'étant données quatre coniques (A), (B), (C), (D) appartenant à un même réseau tangentiel, leurs quatre cercles orthoptiques ont même centre radical. En effet il existe par hypothèse entre les premiers membres des équations tangentielles des coniques une relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0,$$

qui peut s'interpréter ainsi : il existe une conique (G) dont l'équation s'écrit indifféremment

$$\alpha A + \beta B = 0,$$
$$\gamma C + \delta D = 0,$$

et qui appartient par conséquent à la fois au faisceau tangentiel déterminé par (A) et (B) et au faisceau tangentiel déterminé par (C) et (D).

En vertu d'un théorème classique, les cercles orthoptiques de (A), (B), (G) ont même axe radical; de même les cercles orthoptiques de (C), (D), (G). De là résulte la proposition énoncée.

Comme le cercle orthoptique d'un cercle de rayon R est le cercle concentrique de rayon $R\sqrt{2}$, on voit aisément comment, étant donnés les cercles (A), (B), (C), on construira le cercle (D) dont on connaît déjà le centre.

3. Études maintenant la correspondance entre les foyers des coniques du réseau tangentiel. On peut supposer celui-ci défini par les trois cercles (A), (B) et (C). L'équation générale des coniques est donc

$$(8) \quad \lambda(A^2 - R_a^2 S) + \mu(B^2 - R_b^2 S) + \nu(C^2 - R_c^2 S) = 0.$$

Soient P, Q, R les pieds des hauteurs du triangle

ABC (ce sont aussi les pieds des hauteurs des triangles BCD, CDA et DAB). Je dirai que le triangle PQR est le *triangle pédal* du système orthocentrique (A, B, C, D) et aussi du réseau tangentiel considéré. Le point A par exemple est le centre d'un cercle (A') tangent aux côtés du triangle PQR.

Soient A' le premier membre de l'équation tangentielle de ce cercle et r_a son rayon, de sorte qu'on a

$$A' = A^2 - r_a^2 S,$$

d'où

$$A^2 = A' + r_a^2 S.$$

Soient de même

$$B^2 = B' + r_b^2 S,$$
$$C^2 = C' + r_c^2 S.$$

L'équation (8) peut s'écrire

$$\lambda[A' + (r_a^2 - R_a^2)S] \\ + \mu[B' + (r_b^2 - R_b^2)S] + \nu[C' + (r_c^2 - R_c^2)S] = 0,$$

et l'on voit que la conique représentée par cette équation est homofocale à la conique

$$(9) \qquad \lambda A' + \mu B' + \nu C' = 0.$$

Mais, comme A', B', C' sont trois coniques inscrites au triangle PQR, il en est de même de la conique (9). Ainsi :

Les coniques d'un réseau tangentiel sont homofocales aux coniques inscrites au triangle pédal du réseau.

Il en résulte que la correspondance entre les foyers des coniques d'un réseau tangentiel quelconque n'est pas plus générale que la correspondance entre des foyers des coniques inscrites dans un triangle; on sait que cette dernière correspondance consiste en ceci :

les deux foyers de l'une quelconque de ces coniques sont deux points inverses par rapport au triangle.

Énonçons encore la propriété particulière suivante, qui se déduit immédiatement des développements qui précèdent : *les coniques conjuguées par rapport à un triangle sont homofocales aux coniques inscrites dans son triangle pédal.*

4. Abordons maintenant les systèmes linéaires tangentiels de coniques, à trois paramètres (je dirai plus brièvement : les S_3). Ils contiennent évidemment une infinité de cercles. Cherchons le lieu de leurs centres, en nous bornant à l'étude du cas général.

Soient

$$f_i = a_i u^2 + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations tangentielles de quatre coniques quelconques, et

$$f = au^2 + \ldots = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

l'équation d'une conique quelconque du S_3 qu'elles déterminent. Pour que f soit un cercle, on doit avoir, comme on l'a vu,

$$bb' - a'' b'' = 0, \tag{3}$$

$$a' a'' - b^2 - aa'' + b'^2 = 0. \tag{4}$$

L'équation tangentielle du centre de f est

$$f''_w = b' u + bv + a'' w = 0.$$

Ce centre a donc pour coordonnées cartésiennes

$$x = \frac{b'}{a''}, \qquad y = \frac{b}{a''};$$

d'où

$$b' = a'' x, \qquad b = a'' y.$$

Les équations (3) et (4) peuvent donc s'écrire

$$xy - \frac{b''}{a''} = 0,$$

$$\frac{a' - a}{a''} + x^2 - y^2 = 0.$$

D'autre part, a'', b'', $a' - a$, b' et b sont cinq fonctions linéaires et homogènes des quatre variables λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Il existe donc entre ces cinq quantités une relation linéaire et homogène, que l'on peut écrire

$$-(a' - a) + kb'' + lb' + mb + na'' = 0,$$

k, l, m, n étant des constantes, ou

$$-\frac{a' - a}{a''} + k\frac{b''}{a''} + l\frac{b'}{a''} + m\frac{b}{a''} + n = 0,$$

ou enfin, d'après les relations précédemment écrites,

$$x^2 - y^2 + kxy + lx + my + n = 0,$$

ce qui représente une hyperbole équilatère. Ainsi :

Le lieu des centres des cercles d'un S_3 *est une hyperbole équilatère* H.

Si (A), (B), (C) sont trois quelconques de ces cercles, de centres A, B, C, ils déterminent un réseau tangentiel qui contient un quatrième cercle (D) dont le centre D est l'orthocentre de ABC. Ce centre appartient bien à H, ce qui concorde avec le fait que le réseau considéré fait partie du S_3.

5. Il existe dans le S_3 une infinité de coniques ayant un foyer donné. Quel est le lieu du second foyer F' (je veux dire du second foyer réel, si F est réel, du second foyer imaginaire, si F est imaginaire)? Les coniques considérées sont assujetties à quatre conditions

tangentielles linéaires, deux par le fait qu'elles sont au S_3, deux par le fait qu'elles touchent les isotropes issues de F. Elles forment donc un faisceau tangentiel et touchent, outre ces isotropes, deux droites MX et MY. D'après le théorème de Poncelet, MF et MF' sont également inclinées sur MX et MY. MF' est donc une droite fixe, et c'est le lieu demandé.

Ce résultat se précise par la considération de l'hyperbole H.

Soient F et F' les deux foyers d'une conique quelconque C du S_3. Soient A_1 et A_2 les deux points où FF' rencontre H. Il existe deux cercles (A_1), (A_2) de centres A_1 et A_2, appartenant au S_3.

Considérons le faisceau tangentiel déterminé par ces deux cercles. Il contient une seule conique ayant son foyer en F, et cette conique, faisant partie du S_3, se confond nécessairement avec C. Son second foyer F' est le conjugué harmonique de F par rapport à $A_1 A_2$ [car les foyers des coniques du faisceau tangentiel défini par (A_1) et (A_2) forment sur $A_1 A_2$ une involution dont A_1 et A_2 sont les points doubles]. F' appartient donc à la polaire de F par rapport à H. Ainsi :

Le lieu des seconds foyers F' *des coniques du* S_3 *qui ont un foyer donné* F *est la polaire de ce point par rapport à* H.

Observons que A_1, A_2, A_3 étant trois points quelconques de H, celle des coniques du réseau tangentiel défini par les cercles (A_1), (A_2), (A_3) qui a son foyer en F est l'une des coniques considérées. Or on a vu au n° 3 que le second foyer F' de cette conique est l'inverse de F par rapport au triangle pédal de $A_1 A_2 A_3$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

A_1, A_2, A_3 *étant trois points quelconques d'une* *hyperbole équilatère* H *et* F *étant un point quelconque de son plan, l'inverse de* F *par rapport au triangle pédal de* $A_1A_2A_3$ *appartient à la polaire de* F *par rapport à* H.

[$K^1 5$]

NOTE SUR LES TRIANGLES ISOLOGIQUES;

PAR M. V. THÉBAULT.

D'une manière générale, deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, situés dans un même plan, sont *isologiques* lorsque les obliques, menées respectivement de A, B, C à B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sous un même angle θ, *dans le même sens de rotation*, sont concourantes. Il en résulte d'ailleurs que les obliques menées de A_1, B_1, C_1 à BC, CA, AB, sous le même angle, *dans le sens opposé*, sont aussi concourantes.

Or, si l'on considère un triangle $A_1B_1C_1$ *aplati*, c'est-à-dire ayant ses sommets alignés sur une même droite Δ, la définition précédente est en général défectueuse quant à la deuxième partie. Les obliques menées de A, B, C sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont concourantes (point de concours à l'infini), mais celles qui sont tracées de A_1, B_1, C_1, sur BC, CA, AB ne le sont pas nécessairement.

Il nous semble intéressant de rechercher dans quelles conditions deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, dont le dernier est aplati, sont isologiques.

1. Soient un triangle ABC et une droite quelconque Δ de son plan contenant trois points A_1, B_1 et C_1. Les droites δ_1, δ_2, δ_3 issues respectivement de A, B, C et faisant avec Δ un même angle θ sont parallèles (point de concours à l'infini). Traçons deux droites $A_1\omega$ et $B_1\omega$ faisant respectivement avec BC et CA, dans le sens opposé de rotation, un même angle θ.

Une translation parallèle à Δ, suivant BB_1 par exemple, amène B_1 en B, A_1 en a_1, C_1 en c_1 sur une droite Δ_1, et ω en ω_1. La démonstration générale se déduira par une translation inverse qni mènera Δ_1 en Δ.

Par ω_1 traçons la droite $\omega_1 K$ faisant avec BA l'angle θ. Elle rencontre Δ_1 en K.

Désignons par α, β, γ les angles de la droite Δ respectivement avec les côtés BC, CA, AB. Les droites $B\omega_1$, $a_1\omega_1$, $K\omega_1$, étant antiparallèles par rapport aux angles A, B, C du triangle, forment entre elles les angles

$$A \text{ ou } 180^\circ - A,\quad B \text{ ou } 180^\circ - B,\quad C \text{ ou } 180^\circ - C.$$

Ces droites forment avec Δ des angles

$$\begin{aligned}
(\theta - \alpha) &\quad \text{ou} \quad 180^\circ - (\theta + \alpha),\\
(\theta - \beta) &\quad \text{ou} \quad 180^\circ - (\theta + \beta),\\
(\theta - \gamma) &\quad \text{ou} \quad 180^\circ - (\theta + \gamma).
\end{aligned}$$

Dans les triangles $B\omega_1 a_1$ et $a_1\omega_1 K$, par exemple, on a donc

$$\frac{Ba_1}{a_1K} \times \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(\theta \pm \beta)}{\sin(\theta \pm \gamma)};$$

d'où

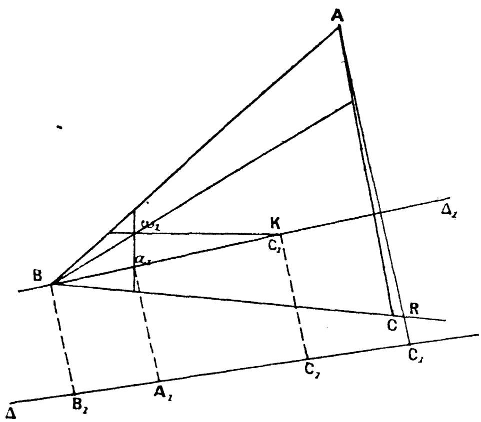
$$\frac{Ba_1}{a_1K} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin(\theta \pm \beta)}{\sin(\theta \pm \gamma)}; \tag{1}$$

les signes + et — étant convenablement groupés.

Pour que la droite issue de C_1, *faisant avec* AB *l'angle θ, passe en ω, il faut et il suffit que* K *coïncide avec* C_1, *c'est-à-dire que la relation* (1) *soit vérifiée.*

Telle est la condition déterminant le triangle aplati $B_1A_1C_1$, B_1 et A_1 étant donnés. Deux relations analogues fixent A_1 et B_1, si l'on donne B_1 et C_1 ou A_1 et C_1.

2. Dans les *Nouvelles Annales* [1], nous avons étudié le cas particulier de la figure où les droites qui



joignent les sommets des triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont parallèles. Il est aisé de constater que la relation (1) y est vérifiée, car

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{BR}{RC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\theta + \gamma)}.$$

---

(1) *Généralisation d'un théorème de M. T. Lemoyne*, 1914, p. 218.

Enfin dans ce dernier cas, si $\theta = 90^\circ$,

$$\frac{B_1 A_1}{A_1 C_1} = -\frac{AB}{AC} \times \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Ainsi se trouve établi et généralisé le théorème fondamental de M. Neuberg sur l'orthopôle :

Soient A′, B′, C′ *les projections des sommets du triangle* ABC *sur une droite quelconque* Δ *de son plan. Les perpendiculaires abaissées de* A′ *sur* BC, *de* B′ *sur* CA, *de* C′ *sur* AB *concourent en un même point* ω.

L'orthopôle ω de Δ par rapport au triangle ABC est donc l'un des centres orthologiques des triangles ABC et $A_1 B_1 C_1$, le second centre étant à l'infini.

3. Les propriétés de l'orthopôle, dans les cas particuliers de la droite Δ par rapport au triangle, sont parfois bien suggestives pour les élèves. Nous en avons proposé un certain nombre de ce genre dans le *Journal de Vuibert*, 1910, pages 7 et 76; dans l'*Éducation mathématique*, 1912, page 151.

Ainsi, si Δ se confond avec l'un des côtés du triangle, son orthopôle devient l'orthocentre du triangle. AA′, BB′, CC′ sont les hauteurs, lesquelles sont par conséquent concourantes.

Il est à remarquer que les hauteurs sont les seules droites, issues des sommets du triangle, qui soient concourantes tout en faisant avec les côtés un même angle, dans le même sens de rotation.

Cette propriété a permis à M. R. Marchay d'obtenir ce remarquable théorème qui semble par suite spécial aux triangles orthologiques [1] :

---

[1] *Journal de Vuibert*, 1916, p. 70.

Deux triangles ABC, $I_aI_bI_c$ *étant tracés dans un même plan, si par* A, B, C *on abaisse respectivement sur* I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b *les perpendiculaires* $I'_cI'_b$, $I'_aI'_c$, $I'_bI'_a$ *qui déterminent un triangle* $I'_aI'_bI'_c$; *et que de même on abaisse de* I_a, I_b, I_c *les perpendiculaires* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *sur* BC, CA, AB *qui déterminent le triangle* $A'B'C'$, *on a la relation*

$$(\text{aire ABC}) \times (A'B'C') = (\text{aire } I_aI_bI_c) \times (\text{aire } I'_aI'_bI'_c).$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2263.

(1915, p. 478.)

Dans un triangle ABC, A_1, B_1, C_1 *sont les milieux des côtés* BC, CA, AB ; D, E, F *sont les contacts de ces côtés avec le cercle inscrit* I, φ *le point de Feuerbach et* P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 *les projections orthogonales de* φ *sur les côtés des triangles* $A_1B_1C_1$ *et* DEF. *Démontrer les relations :*

1°
$$\frac{\varphi A_1 \times \varphi B_1 \times \varphi C_1}{\varphi D \times \varphi E \times \varphi F} = \left(\frac{R}{2r}\right)^2;$$

2°
$$\frac{\sin A}{\varphi P_1} + \frac{\sin B}{\varphi Q_1} + \frac{\sin C}{\varphi R_1} = 0;$$

3°
$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\varphi R_2} = 0.$$

V. Thébault.

Solution

Par M. R. Goormaghtigh.

1° Soient I et O les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ; on a, d'une part [1],

$$\varphi A_1 = \frac{(b-c)R}{2\,OI}, \qquad \varphi B_1 = \frac{(c-a)R}{2\,OI}, \qquad \varphi C_1 = \frac{(a-b)R}{2\,OI}.$$

La solution de la question **2262** montre, d'autre part, que

$$\varphi D = k\frac{b-c}{\sin\frac{A}{2}}, \qquad \varphi E = k\frac{c-a}{\sin\frac{B}{2}}, \qquad \varphi F = k\frac{a-b}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Le facteur k se calcule en exprimant que la somme algébrique des aires $E\varphi F$, $F\varphi D$, $D\varphi E$ est égale à celle du triangle DEF. On a ainsi

$$-k^2\sum\frac{(c-a)(a-b)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cos\frac{A}{2} = 2S',$$

S' désignant l'aire du triangle DEF. Si l'on observe que

$$-\Sigma\, a(c-a)(a-b) = 4\,S(R-2r),$$

$$S' = 2r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

on obtient aisément

$$k^2 = \frac{r^2}{4\,R(R-2r)} = \frac{r^2}{4\,\overline{OI}^2},$$

et, par suite,

$$\varphi D = \frac{(b-c)r}{2\,OI\sin\frac{A}{2}}, \qquad \varphi E = \frac{(c-a)r}{2\,OI\sin\frac{B}{2}}, \qquad \varphi F = \frac{(a-b)r}{2\,OI\sin\frac{C}{2}}.$$

Par conséquent

$$\frac{\varphi A_1\times\varphi B_1\times\varphi C_1}{\varphi D\times\varphi E\times\varphi F} = \frac{R^3}{r^3}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{R^3}{r^3}\,\frac{r}{4R} = \left(\frac{R}{2r}\right)^2.$$

2° et 3° Les relations proposées résultent immédiatement de l'équation du cercle circoncrit à un triangle en coordonnées normales, si l'on observe que les côtés du triangle $A_1B_1C_1$

---

[1] *Voir Journal de Vuibert*, 34ᵉ année, p. 5 et p. 51. *Voir* aussi *Mathesis*, 1914, solution de la question 1934.

sont proportionnels à sin A, sin B, sin C et ceux du triangle DEF proportionnels à $\cos\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}C$. La relation du 2° s'applique à tout point du cercle des neuf points, celle du 3° à tout point du cercle inscrit.

Au moyen des relations

$$\varphi P_1 : \varphi Q_1 : \varphi R_1 = \frac{1}{b-c} : \frac{1}{c-a} : \frac{1}{a-b},$$

$$\varphi P_2 : \varphi Q_2 : \varphi R_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{b-c} : \frac{\sin\frac{1}{2}B}{c-a} : \frac{\sin\frac{1}{2}C}{a-b},$$

on obtient aisément des relations qui ne s'appliquent qu'au point φ, par exemple :

$$\frac{1}{\varphi P_1} + \frac{1}{\varphi Q_1} + \frac{1}{\varphi R_1} = 0,$$

$$\frac{b+c}{\varphi P_1} + \frac{c+a}{\varphi Q_1} + \frac{a+b}{\varphi R_1} = 0,$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\varphi R_2} = 0,$$

$$\frac{\cos^3\frac{A'}{2}}{\varphi P_2} + \frac{\cos^3\frac{B}{2}}{\varphi Q_2} + \frac{\cos^3\frac{C}{2}}{\varphi R_2} = 0.$$

Autres solutions par MM. R. Bouvaist et Ono.

2264.

(1915, p. 478)

Démontrer que, si la tangente en P *à une courbe* (P) *quelconque coupe les axes rectangulaires* Ox *et* Oy *en* S *et* T, *et si la tangente en la courbe* (M), *que décrit le milieu* M *de* ST, *coupe* Ox *et* Oy *en* U *et* V, *on aura*

$$\frac{MU}{MV} = \frac{PS}{PT},$$

et déduire de là une construction géométrique de la tangente UV *quand le point* P *est donné et réciproquement.*

M. d'Ocagne.

Solution
Par M. R. Goormaghtigh.

Soient M′, U′, V′ les symétriques de O par rapport à M, U, V. Les coordonnées ξ, η de M′ sont fonctions d'un paramètre t; l'équation TS et l'équation dérivée par rapport à t s'écrivent

$$\eta x + \xi y = \xi\eta, \qquad \eta' x + \xi' y = \xi'\eta + \eta'\xi.$$

En désignant par P′ la projection de P sur Ox, on a donc

$$\mathrm{TP} : \mathrm{TS} = \mathrm{OP}' : \mathrm{OS} = \frac{\eta'\xi}{\eta'\xi - \eta\xi'}.$$

D'autre part, l'équation de la tangente en M′ au lieu de ce point étant

$$\xi'(y - \eta) = \eta'(x - \xi),$$

on a

$$\mathrm{V'M'} : \mathrm{V'U'} = \frac{\eta'\xi}{\eta'\xi - \eta\xi'} = \mathrm{TP} : \mathrm{TS}.$$

Par suite,

$$\mathrm{MU} : \mathrm{MV} = \mathrm{M'U'} : \mathrm{M'V'} = \mathrm{PS} : \mathrm{PT}.$$

Si l'on appelle K le point où M′P′ rencontre Ox, on a la relation

$$\mathrm{KS} : \mathrm{TM'} = \mathrm{PS} : \mathrm{TP} = \mathrm{M'U'} : \mathrm{M'V'} = \mathrm{SU'} : \mathrm{TM'}.$$

Par conséquent KS = SU′; M′P et M′U ont des directions symétriques par rapport à Ox. La tangente en M à la courbe (M) s'obtient donc en menant par M une droite ayant une direction symétrique, par rapport à Ox, de celle qui joint P au symétrique de O par rapport à M. Réciproquement, pour déduire le point P de la tangente en M à la courbe (M), il suffit de mener par le symétrique de O par rapport à M une droite ayant une direction symétrique de celle de UV par rapport à Ox; l'intersection de cette droite avec TS est le point P cherché.

Autre solution
Par M. J. Lemaire.

Soient ST et S′T′ les tangentes à (P) en deux points voisins P et P′, M et M′ les milieux des segments interceptés sur elles par Ox et Oy, u et v les points où MM′ coupe Ox et Oy. Comme M est le milieu de ST, on a (*fig.* 1)

$$-\frac{v\mathrm{T}}{v\mathrm{O}} = \frac{u\mathrm{S}}{u\mathrm{O}},$$

de même

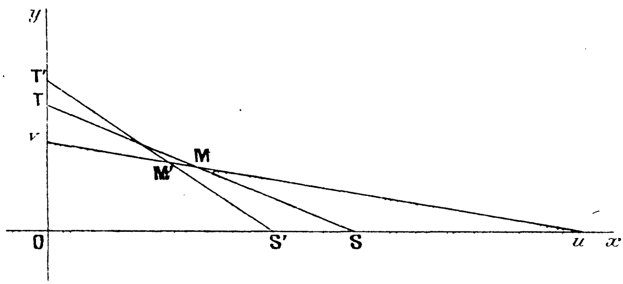
$$-\frac{v\mathrm{T}'}{v\mathrm{O}} = \frac{u\mathrm{S}'}{u\mathrm{S}},$$

par conséquent

$$\frac{v\mathrm{T}}{v\mathrm{T}'} = \frac{u\mathrm{S}}{u\mathrm{S}'},$$

d'où il résulte que ST, S′T′, MM′ sont tangentes à une parabole inscrite à l'angle $\widehat{xOy}$. Si P′ vient se confondre avec P, et par suite M′ avec M, on voit (*fig.* 2) que la tangente UMV en M à (M) touche la parabole (K) inscrite à $\widehat{xOy}$ et tangente en P à ST ; on a donc bien la relation demandée, d'après le théorème de Chasles relatif au rapport anharmonique des traces, sur une tangente mobile, de quatre tangentes fixes à une conique.

Fig. 1.

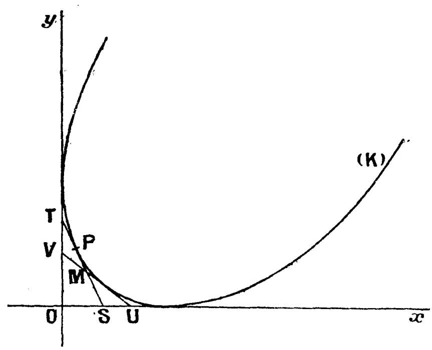


Supposant P connu ainsi que la tangente ST à (P) en ce point, la construction de la tangente UV en M à (M) revient à la détermination de la deuxième tangente menée de M à la parabole (K); mais voici une construction élémentaire (*fig.* 3): si nous supposons le problème résolu, et si nous appelons M_1 le point où OM coupe la parallèle TU_1 à VU, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{M}_1\mathrm{U}_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{MU}}{\mathrm{MV}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PT}},$$

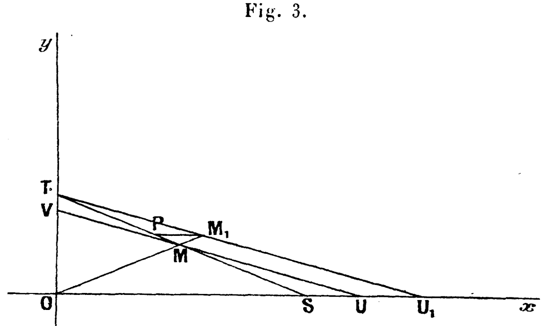
par conséquent PM_1 est parallèle à Ox; connaissant P et ST, on a donc aisément M_1, puis U_1, et la parallèle menée par M à TU_1 est la tangente cherchée.

Fig. 2.



Inversement, étant donné M et la tangente UV en ce point à (M), on a de suite la droite TS ayant son milieu en M, puis TU_1 parallèle à UV, d'où M_1 sur cette droite et sur OM, et la parallèle menée par M_1 à Ox coupe ST au point P.

Fig. 3.



Tout ce qui précède s'étend immédiatement au cas où les axes Ox et Oy ne se coupent pas à angle droit et où M, au lieu d'être le milieu de ST, partage ce segment de droite dans un rapport donné ; par suite les tangentes aux divers points de ST aux courbes correspondantes enveloppent la parabole (K).

On en conclut ce théorème : la normale à une conique Σ coupant ses axes en S et T, on sait que le point M tel que $\frac{MS}{MT} = k$ décrit une conique (M); les tangentes aux coniques (M), obtenues quand k varie, aux points M correspondants de la normale, enveloppent une parabole qui touche les axes de Σ, la normale et la tangente en M; on sait d'ailleurs que cette parabole touche la normale au centre de courbure de Σ au point M.

Autres solutions, par UN ABONNÉ, MM. R. BOUVAIST et T. ONO.

2265.

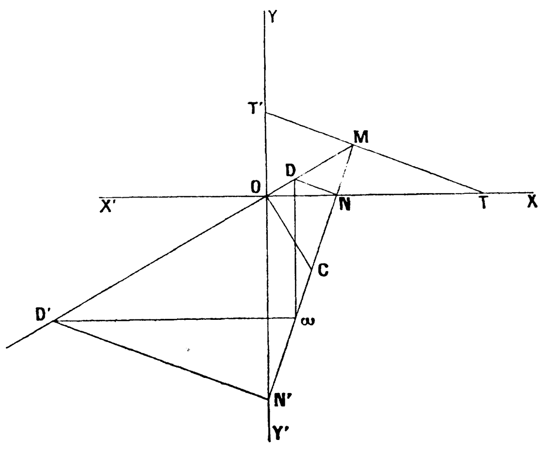
(1915, p. 478.)

Construire les foyers et les sommets de l'axe focal d'une conique dont on donne un point, le centre de courbure correspondant, et : 1° soit un axe ; 2° soit le centre.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION
Par M. J. LEMAIRE.

1° Soient X'OX l'axe focal, Y'OY l'autre axe d'une conique,



M un point de la courbe, T et T', N et N' les points où la tangente et la normale coupent ces axes, ω le centre de courbure en M, D et D′ les points où les parallèles à TT′ menées par N et N′ coupent OM : on sait que les parallèles menées par D et D′ respectivement à YY′ et XX′ passent en ω (construction de Mannheim). Si l'on suppose donnés le point M, le centre de courbure ω en ce point, et l'axe X′OX, la perpendiculaire en N à la normale et la perpendiculaire menée de ω sur l'axe se rencontrent en D; joignant DM, on obtient le centre O, puis l'axe Y′OY, d'où les points N′ et T′; le cercle de diamètre N′T′ coupe l'axe focal aux foyers de la conique; ayant les foyers et un point de la courbe, on obtient sans peine les sommets de l'axe focal. La courbe est une ellipse ou une hyperbole suivant que N est, ou non, situé entre les foyers.

2° La perpendiculaire en O à OM coupant la normale en C, on sait que ωC et NN′ ont le même milieu, d'où la construction suivante, si l'on suppose donnés M, ω, et O : traçant la perpendiculaire en O à OM, on a le point C; du milieu de ωC comme centre, si l'on décrit une circonférence qui passe en O, elle coupe la normale en N et N′; les droites ON et ON′ sont les axes, et l'on termine la construction comme ci-dessus, construction qui s'applique aussi bien si l'on suppose connu l'axe Y′OY que l'axe X′OX.

Autres solutions, par UN ABONNÉ, MM. R. BOUVAIST et T. ONO.

2266.

(1915, p. 478.)

On considère toutes les conchoïdes d'une courbe (M) *quelconque par rapport à un pôle* O. *Pour chaque position du rayon vecteur* OM, *le lieu des centres de courbure répondant à toutes ces conchoïdes est une conique* Γ *dont on donnera une détermination géométrique complète. Reconnaître à quelle condition géométrique* Γ *est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, en remarquant qu'elle ne peut jamais être un cercle. Examiner spécialement le cas où la courbe* (M) *est une spirale d'Archimède de pôle* O *et déterminer dans ce cas les axes de la conique* Γ.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Les conchoïdes d'une courbe (M), par rapport au pôle O, sont les podaires, par rapport à ce point, des courbes parallèles à l'antipodaire (P) de (M). Appelons P le point où la perpendiculaire élevée en M sur OM touche la courbe (P), C_1 le centre de courbure de (P) en P, et A la projection de O sur PC_1. Le centre de courbure C de la conchoïde décrite par un point M′ de OM s'obtient donc de la manière suivante : on projette M′ en P′ sur AC_1, puis C_1 en Q sur OP′, et Q en R sur AC_1 ; le point C est à l'intersection de M′A avec OR. Comme le point Q décrit le cercle (ω) ayant OC_1 pour diamètre, le lieu considéré dans l'énoncé revient donc au suivant : la parallèle à OA menée par un point variable Q de (ω) recoupe ce cercle en Q′ et rencontre AC_1 en R ; lieu du point d'intersection de Q′A et OR. A une droite Q′A correspond une droite OR ; à une droite OR correspondent deux droites AQ′. Le point C décrit donc une cubique ; comme la droite OA fait partie du lieu, le lieu proprement dit est une conique Γ. Elle passe par A, C_1 et par les milieux ω et A′ de OC_1 et OA ; elle est de plus tangente au cercle (ω) en A.

Le centre et les axes de Γ s'obtiennent par une construction simple. Le diamètre du cercle (ω) parallèle à OA rencontre ce cercle en B et B′ et la droite AC_1 en D, les droites AB et AB′ rencontrent OD en deux points E et E′ de Γ; le milieu K de EE′ est le centre de la conique. La droite OD est, en effet, un diamètre de Γ puisqu'elle passe par les milieux des cordes parallèles A′ω et C_1A.

Soient T et T′ les milieux de AE et AE′; les axes de Γ sont dirigés suivant KT et KT′. Les tangentes à Γ en E et E′ sont parallèles à C_1A et coupent respectivement KT et KT′ en L et L′; pour obtenir les longueurs des demi-axes de Γ il suffit de construire les moyennes proportionnelles à KT et KL, d'une part, et à KT′ et KL′, d'autre part.

Des considérations qui précèdent, on déduit aussi que (ω) est le cercle osculateur de la conique Γ au point M. Le point ω est donc l'une des intersections de Γ avec sa développée. On peut encore observer qu'en considérant les cas où QR est tangent au cercle (ω), on obtient les points de Γ dont les tangentes passent par O.

Si le point Q′ est situé sur l'arc C_1A du cercle (ω) et si, en outre, Q′R = OA, les droites Q′A et OR sont parallèles. On en déduit que Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que OC_1 est inférieur, égal ou supérieur à 3OA. La nature des intersections de Γ avec le cercle (ω) montre d'ailleurs que Γ ne peut jamais être un cercle. Revenant à l'énoncé de la question, on peut énoncer ainsi les conditions qui précèdent :

La conique Γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la distance de O au centre de courbure de l'antipodaire (P) de (M) au point correspondant à M est inférieure, égale ou supérieure au triple de la distance de O à la normale de (P).

Dans le cas où (Γ) est une parabole, E' est à l'infini; le sommet est au milieu de LT et le foyer est à l'intersection de LT avec la médiatrice de EL.

Quand (M) est une spirale d'Archimède de pôle O, (P) est une développante de cercle et C_1 coïncide avec A ; Γ est donc alors une ellipse. Le point A et le milieu A' de OA sont les sommets de l'un des axes de Γ. D'après ce qui précède, A' est le centre de courbure de Γ au point A ; on a donc, en désignant les demi-axes de Γ par α et β,

$$\beta = \frac{1}{2} AA', \qquad \alpha^2 : \beta = AA'.$$

L'un des axes est donc AA', l'autre est égal au côté du carré inscrit dans le cercle décrit sur OA comme diamètre.

Autres solutions, par UN ABONNÉ et par M. R. BOUVAIST.

2267.

(1915, p. 479.)

Démontrer géométriquement que si la normale en un point M *d'une parabole rencontre en* N *l'axe de cette courbe, en* P *la tangente au sommet, et que si* Q *est le milieu de* MN, *le rayon de courbure en* M *est le double de* PQ.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Soit T l'intersection de la tangente en M avec la tangente au sommet, soit F le foyer, soit enfin T_1 le symétrique de T par rapport à Q, les trois points T, Q, T_1 se trouvant du reste sur une même parallèle à l'axe. Le cercle des centres, relatif à la position considérée de l'angle mobile FTM, est le cercle FQT_1, coupé par TF en C, le rayon de courbure cherché est égal à TC, or on a

$$TC.TF = 2\overline{TQ}^2 = 2PQ.MQ = 2PQ.TF,$$

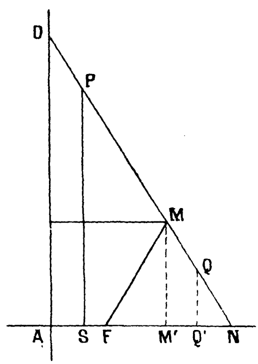
d'où

$$TC = 2MQ.$$

Autre Solution
Par M. J. Lemaire.

Soient F le foyer de la parabole, Δ sa directrice, S son sommet, A le point commun à Δ et à l'axe, D le point où la

Fig. 1.



normale en M coupe Δ, M' et Q' les projections de M et Q sur l'axe.

Comme $M'N = AF$, on a

$$M'Q' = AS, \qquad \text{d'où} \qquad QM = PD,$$

et par conséquent

$$PQ = DM,$$

ce qui démontre le théorème, puisque le rayon de courbure en M est le double de DM.

On peut ajouter les observations suivantes :

1° Mener MJ parallèle à l'axe ANX, et NJ perpendiculaire à MN. Le centre de courbure ω est à la rencontre de MN avec la perpendiculaire Jω à JM.

MJNT est un parallélogramme. Les triangles rectangles P'TN, MJω sont égaux, etc.

2° Achever le rectangle NMTK et le parallélogramme NP'TI.

On sait que MK passe par le foyer F et que Kω, perpendiculaire à MFK, passe par le centre de courbure ω.

NKIω est un rectangle, etc.

3° Mener FC perpendiculaire à MF. On sait que le point C où elle rencontre MN est au milieu du rayon de courbure Mω, etc.

Addition par M. H. Brocard. — Le cercle de courbure en M rencontre la parabole en un autre point R, et la corde commune RM est symétrique de MT par rapport à MM'. La perpendiculaire à RM menée par ω et la droite NX déterminent des triangles rectangles égaux, dont on déduit aisément

$$\omega M = \frac{MT}{\sin\alpha\cos\alpha} = \rho_M,$$

α étant l'angle MTN.

On a ensuite

$$UM = \rho_M \sin 2\alpha = 2MT.$$

MR rencontre AN en V, et l'on sait que V est le milieu de UM, ou que la corde MR est quadruple de la tangente MT, relation signalée ici par G. de Longchamps (**1880**, p. 68-71), parmi d'autres propriétés que le lecteur pourra tirer de la figure décrite ci-dessus.

Note. — Sur la même figure il pourra être intéressant de considérer aussi la corde RM commune à la parabole et au cercle de courbure en M.

Le milieu S de RM est la projection de C sur RM.

D'après une propriété connue, RM est symétrique de MT par rapport à MA.

Soient V, L, G les rencontres de RM, BC, CS avec Ox, et δ l'angle MTx. On voit que MC, BC, GC, perpendiculaires à MT, Ox, MR, forment entre elles l'angle δ.

Dans la série de triangles rectangles à angle δ, ainsi déterminés, on obtient facilement les relations

$$CM = \frac{MT}{\sin\delta\cos\delta}$$

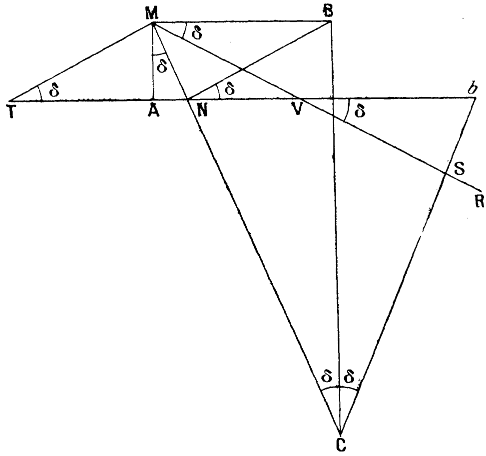
et

$$SM = CM\sin 2\delta = 2\,MT;$$

donc

$$RM = 2\,SM = 4\,MT.$$

Fig. 2.



La corde ci-dessus est donc quadruple de la tangente MT, propriété signalée ici par G. de Longchamps (**1880**, p. 68-71).
Le lecteur pourra aisément ajouter d'autres propositions.

Autres solutions par Un Abonné et par MM. T. Ono et V. Thébault.

2268.

(1915, p. 479.)

Si, d'un point M *pris sur une conique, on mène à cette courbe les trois normales* MP, MQ, MR, *autres que la normale en* M, *le triangle* PQR, *inscrit à la conique donnée, est en même temps circonscrit à une conique fixe.*

G. Fontené.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Cette proposition et celle de la question 2259, résolue (**1916**, p. 447), sont évidemment polaires réciproques par rapport à la conique donnée; il suffit donc d'établir l'une des deux, la première par exemple.

Soient M le point considéré de l'ellipse (E), α, β, γ les contacts avec E des droites QR, RP, QP. Désignons par U et V les intersections avec l'axe focal de $\beta\gamma$ et $M\alpha$, U et V appartiennent à une involution dont le point central est le centre O de (E) et dont deux couples de points conjugués sont les sommets de (E) situés sur l'axe focal, on a donc

$$OU.OV = -a^2,$$

on aura de même

$$OU'.OV' = -b^2,$$

U′ et V′ désignant les points d'intersection des droites considérées avec le petit axe. Ces relations montrent que la projection du point P sur les axes de (E) est sur la symétrique de $M\alpha$ par rapport à O, le point P est donc le pôle par rapport au cercle décrit sur les foyers de (E) comme diamètre de la tangente au point α' de (E) symétrique de α par rapport au petit axe. Il appartient donc à l'ellipse ayant pour sommets les sommets de la développée de (E).

AUTRE SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

On sait (question 2259) que le triangle normal circonscrit, formé par les tangentes en P, Q, R à la conique, est inscrit à la conique (Γ) ayant ses sommets aux rebroussements de la développée de la première; par conséquent le triangle PQR est circonscrit à la conique (Γ') polaire réciproque de (Γ) par rapport à la conique donnée.

Autre solution de M. T. ONO. *Voir* aussi, page 84, Corresp., M. F. BALITRAND.

2270.

(1915, p. 479.)

Démontrer que le cône qui a pour sommet le point double d'une courbe de Viviani et pour base cette courbe est de révolution. F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient S et Γ la sphère et le cylindre dont l'intersection est la courbe de Viviani V. Le centre O de S et le point double A de la courbe V se projettent en O' et A' sur un plan perpendiculaire à l'axe de Γ; ce plan coupe S et Γ suivant deux cercles qui se rencontrent en deux points M et M' de V. Le second de ces cercles a O'A' pour diamètre. Les triangles rectangles O'MA', MO'O sont égaux; par suite,

$$MA' = OO' = AA'.$$

L'angle MAA' vaut donc 45°; par conséquent, le cône qui projette V de A est de révolution et l'angle au sommet vaut 90°.

Autres solutions, par MM. R. BOUVAIST et J. LEMAIRE.

2271.

(1915, p. 531.)

Étant donnée une hyperbole par ses asymptotes et un point M, *démontrer que le centre de courbure en* M *peut être obtenu par l'une des constructions géométriques suivantes :*

1° *On mène la tangente en* M *qui coupe les asymptotes en* A *et* B, *et l'on élève en ces points les perpendiculaires aux asymptotes qui coupent la normale en* M *respectivement en* α *et* β *et se rencontrent en* P. *On joint* PM *et, par* α, *on mène une parallèle à la tangente en* M; *la parallèle à* PB, *menée par le point d'intersection de ces deux droites, passe par le centre de courbure.*

2° *On joint* Bα, *et, par* β, *on mène une parallèle à* PA; *la parallèle à la tangente en* M, *menée par le point de rencontre de ces deux droites, passe au centre de courbure.*

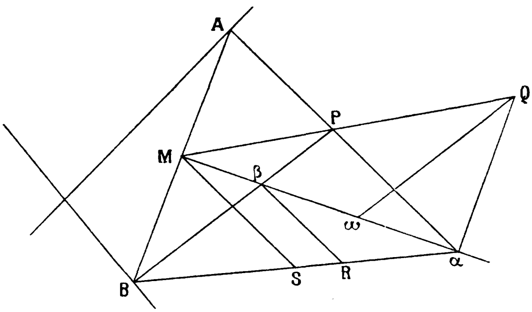
3° *On joint* Bα, *et, par* M, *on mène une parallèle à* PA; *la parallèle à* PB, *menée par le point de rencontre de ces deux droites, passe au centre de courbure.*

F. BALITRAND.

Solution
Par M. J. Lemaire.

Il suffit de prouver que ces diverses constructions donnent le milieu de $\alpha\beta$ qui est, comme on sait, le centre de courbure de l'hyperbole en M.

1° Si Q est le point commun à PM et à la parallèle menée



par α à la tangente en M, le théorème de Thalès donne, en appelant ω le point où la parallèle à PB menée par Q rencontre la normale,

$$\frac{\omega\beta}{M\beta} = \frac{QP}{MP},$$

et, à cause des triangles semblables PMA et PQα,

$$\frac{\omega\beta}{M\beta} = \frac{Q\alpha}{MA};$$

d'ailleurs, les triangles $Q\alpha\omega$ et $BM\beta$ sont semblables, et

$$\frac{\omega\alpha}{M\beta} = \frac{Q\alpha}{MB};$$

comme $MA = MB$, on a bien $\omega\beta = \omega\alpha$, C. Q. F. D.

2° Soit R le point de rencontre de $B\alpha$ et de la parallèle menée par β à PA; le triangle αAB étant isoscèle, αM est bissectrice de $\widehat{A\alpha B}$; comme $\widehat{R\beta\alpha} = \widehat{A\alpha M}$, le triangle $\widehat{R\alpha\beta}$ est aussi isoscèle, et la parallèle menée par R à la tangente en M, étant perpendiculaire à la base $\alpha\beta$, passe au milieu de cette base, c'est-à-dire au centre de courbure.

3° S désignant le point où la parallèle menée par M à PA coupe Bα, ce point est le milieu de Bα, puisque M est le milieu de AB; par suite, la parallèle menée par S à PB passe au milieu de $\alpha\beta$. C. Q. F. D.

Autres solutions, par MM. R. Goormaghtigh, T. Ono et Ph. du Plessis.

2272.

(1915, p. 531.)

On mène d'un point M *les quatre normales à une ellipse* (E) *et les tangentes à cette ellipse aux pieds des normales. Il existe une parabole* (P) *et une seule qui touche ces quatre tangentes. Démontrer que les points où elle la touche sont sur l'hyperbole d'Apollonius* (H) *de* M.

F. Balitrand.

Solution

Par M. R. Bricard.

Soit α l'un des points de rencontre de (H) avec (E), c'est-à-dire le pied de l'une des normales abaissées de M sur (E). La tangente en α à (E) rencontre de nouveau (H) en un point α'. L'angle $\widehat{M\alpha\alpha'}$ étant droit, il en résulte, en vertu d'une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère, que Mα' est perpendiculaire à la tangente en α à (H). Mais on sait que (H) peut être définie comme lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées de ces points sur leurs polaires par rapport à (E) passent en M. Il résulte de là que *le point α' est le pôle, par rapport à* (E), *de la tangente en α à* (H).

Cela posé, la polaire réciproque de (H), par rapport à (E), doit être tangente à la polaire du centre de (E), c'est-à-dire à la droite de l'infini. C'est donc une parabole, qui touche en outre les quatre tangentes analogues à $\alpha\alpha'$, et se confond par conséquent avec la parabole (P) de l'énoncé. (P) touche $\alpha\alpha'$ au pôle de la tangente en α à (H), c'est-à-dire, comme on vient de le voir, au point α' qui appartient à (H), et la proposition est ainsi établie.

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, et l'Auteur.

2273.

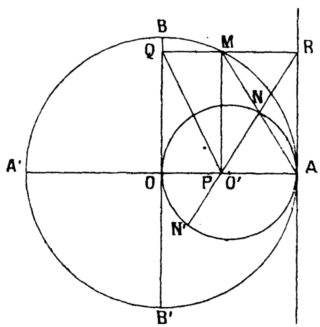
(1915, p. 531.)

Si A *et* A' *sont deux points de rebroussement diamétralement opposés d'une hypocycloïde à quatre rebrousse-*

ments, les bissectrices des angles que les tangentes à cette courbe font avec AA′ *ont pour enveloppes les deux hypocycloïdes à trois rebroussements ayant l'un un point de rebroussement en* A *et le sommet opposé en* A′, *et l'autre* vice versa. **M. d'Ocagne.**

Solution
Par M. J. Lemaire.

Soient O le centre du cercle de diamètre AA′ contenant les quatre points de rebroussement de la première courbe, M un point de ce cercle, P et Q ses projections sur AA′ et sur le



diamètre perpendiculaire BB′, R la projection du même point sur la tangente en A au cercle; comme QR = OA = QP, le triangle QRP est isoscèle et PR est bissectrice de $\widehat{APQ}$: c'est de cette droite qu'il s'agit de chercher l'enveloppe.

Observons que PR est la droite de Simson relative au point M et au triangle inscrit dans le cercle O et ayant un sommet en A′ et deux sommets confondus en A, triangle dont le cercle des neuf points est le cercle O′ de diamètre OA : l'enveloppe de cette droite est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements tritangente à ce dernier cercle, qu'elle touche en A, et ayant par suite un point de rebroussement en A′. Même raisonnement pour l'autre bissectrice, qui est la droite joignant le point P à la projection de M sur la tangente en A′ au cercle O.

Autrement : les deux cercles O et O′ étant homothétiques par rapport à A, le point N où AM coupe O′ est le milieu de AM, et par suite aussi de PR; si N' est le second point commun à PR et au cercle O', l'angle $\widehat{ANN'}$ est double de l'angle $\widehat{RAN}$; l'arc AN' est donc double de l'arc AN; et comme ces arcs sont de sens contraires, la droite NN' enveloppe bien une hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite au cercle O' et touchant ce cercle en A.

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist et Un Abonné.

2274.

(1915, p. 532.)

Dans un triangle ABC, L_a, L_b, L_c *sont les centres des cercles exinscrits. Les droites qui joignent les sommets au point de Lemoine du triangle* $L_A L_B L_C$ *rencontrent les côtés* BC, CA, AB *respectivement en* α, β, γ. *Montrer que le cercle* $\alpha\beta\gamma$ *passe au point* φ *de Feuerbach du triangle* ABC.

V. Thébault.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient Δ_a, Δ_b, Δ_c les distances du point de Lemoine L du triangle $L_a L_b L_c$ aux côtés $L_b L_c$, $L_c L_a$, $L_a L_b$, on a

$$\frac{\Delta_a}{L_c L_b} = \frac{\Delta_b}{L_c L_a} = \frac{\Delta_c}{L_a L_b},$$

d'où

$$\frac{\Delta_a \sin\frac{A}{2}}{a} = \frac{\Delta_b \sin\frac{B}{2}}{b} = \frac{\Delta_c \sin\frac{C}{2}}{c},$$

si maintenant δ_a, δ_b, δ_c désignent les distances du point L aux côtés BC, CA, AB, on a visiblement

$$\delta_b + \delta_c = 2\,\Delta_a \sin\frac{A}{2}, \qquad \delta_c + \delta_a = 2\,\Delta_b \sin\frac{B}{2},$$
$$\delta_a + \delta_c = 2\,\Delta_c \sin\frac{C}{2},$$

d'où, r_a, r_b, r_c désignant les rayons des cercles exinscrits,

$$r_a \delta_a = r_b \delta_b = r_c \delta_c.$$

Soit maintenant $L'_a L'_b L'_c$ le triangle formé en menant par L_a,

L_b, L_c des parallèles à BC, CA, AB, les triangles ABC, $L'_a L'_b L'_c$ sont homothétiques, soit L′ le centre d'homothétie, si δ'_a, δ'_b, δ'_c désignent les distances de L′ à BC, CA, AB on aura, par construction même,

$$\frac{\delta'_a}{r_a} = \frac{\delta'_b}{r_b} = \frac{\delta'_c}{r_c}.$$

L et L′ sont donc inverses par rapport à ABC; or le centre O du cercle circonscrit à $L_a L_b L_c$, qui est inscrit dans $L'_a L'_b L'_c$, et le centre I du cercle inscrit dans ABC, sont deux points homologues; le point L′ est donc sur la droite OI, le point L est par suite sur l'hyperbole équilatère ABCI, et le cercle $\alpha\beta\gamma$ circonscrit au triangle α, β, γ conjugué à cette hyperbole, passera par le point de Feuerbach φ, centre de cette courbe.

Remarques. — 1° Soit M un point quelconque de l'hyperbole équilatère ABCI; les droites AM, BM, CM, coupent BC, CA, AB, en α, β, γ; le cercle $\alpha\beta\gamma$, circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ conjugué à l'hyperbole ABCI, passera par le point de Feuerbach φ, centre de cette courbe, d'où les propositions suivantes :

Soient D, E, F *les points de contacts de côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *avec le cercle* I *inscrit dans ce triangle; si à partir du point* I *nous portons sur* ID, IE, IF *et dans le même sens des segments égaux*, ID′, IE′, IF′, *les droites* AD′, BE′, CF′ *coupent* BC, CA, AB *en* α, β, γ; *le cercle* $\alpha\beta\gamma$ *passe par le point de Feuerbach du triangle* ABC.

En particulier le cercle passant par les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle passe par le point de Feuerbach.

2° Soit ABC un triangle, soit M un point de son plan; les droites AM, BM, CM coupent BC, CA, AB, en α, β, γ; le cercle $\alpha\beta\gamma$ rencontre encore les côtés du triangle en α', β', γ'; les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ se coupent en M′. Le cercle $\alpha\beta\gamma$ coupe le cercle des neuf points du triangle ABC aux centres ω_1 et ω_2 des hyperboles équilatères ABCM, ABCM′. Si le cercle $\alpha\beta\gamma$ est inscrit dans ABC, ω_1 et ω_2 sont confondus, les deux cercles sont tangents. On retrouve ainsi très simplement le théorème de Feuerbach.

Autres solutions par l'Auteur et par M. R. Goormaghtigh.

2275.

(1915, p. 532.)

Les asymptotes d'une hyperbole et les droites qui joignent un point quelconque de cette courbe à ses deux foyers sont tangentes à un même cercle.

M. d'Ocagne.

Solution
Par M. J. Lemaire.

Soient M un point quelconque de l'hyperbole [1], O son centre, F et F′ ses foyers, $2a$ son axe transverse, de sorte que $MF' - MF = 2a$.

Le point I où la normale en M coupe l'axe non transverse est le centre d'un cercle touchant le prolongement de FM en A, et F′M en A′; si l'on observe que $AF = A'F'$, la relation ci-dessus donne $MA = MA' = a$. D'ailleurs, le cercle circonscrit au triangle MFF′ passe en I, et les angles $\widehat{MIA}$ et $\widehat{F'IO}$ sont égaux; les triangles MIA et F′IO sont alors semblables et donnent

$$\frac{IA}{IO} = \frac{a}{c},$$

c demi-distance focale; les tangentes menées de O au cercle I, faisant avec OI des angles qui ont $\frac{a}{c}$ pour sinus, sont les asymptotes de l'hyperbole, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions, par Un Abonné et par M. T. Ono.

2276.

(1915, p. 532.)

Étant données dans un plan deux coniques f et φ, les tangentes menées à φ des foyers de f et les tangentes menées à f des foyers de φ sont huit tangentes d'une même conique.

F. Balitrand.

Solution
Par M. G. Humbert.

Le théorème proposé est un cas particulier d'une proposition relative aux courbes de quatrième *classe*.

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

Soit C_4 une courbe d'*ordre* quatre; une conique σ_1 la coupe en huit points; si l'on joint ceux-ci deux à deux par quatre droites (chaque droite contenant deux points, et par chaque point ne passant qu'une droite), les quatre droites coupent de nouveau C_4 en huit points, qui sont sur une conique σ_2.

C'est là un théorème bien connu : transformons-le par polaires réciproques, en supposant la conique σ_1 formée de deux droites.

Par deux points, I et J, on mène les tangentes à une courbe Γ_4 de quatrième classe, ce qui donne deux systèmes de chacun quatre droites, $d_1, \ldots, d_4$ et $\delta_1, \ldots, \delta_4$. Par le point d'intersection de d_i et de δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, on mène les deux autres tangentes à Γ_4 : les huit droites ainsi obtenues touchent une conique Σ_2.

C'est le théorème proposé, si l'on suppose que Γ_4 se décompose en deux coniques, f et φ, et que I, J sont les points cycliques du plan : d_1 et d_2, δ_1 et δ_2 seront les tangentes menées de I et J à f; d_3 et d_4, δ_3 et δ_4 joueront le même rôle pour φ. Alors les huit droites finales de l'énoncé précédent seront les tangentes menées à chacune des coniques par les foyers réels de l'autre.

Autres solutions, par l'AUTEUR, MM. R. BOUVAIST, J. LEMAIRE et PICARDAT.

2278.

(1915, p. 532.)

Une ellipse étant donnée par ses foyers F *et* F′ *et un point* M, *on élève en* F *une perpendiculaire à* FM *qui rencontre en* α *la normale en* M; *au point* α *on élève à la normale une perpendiculaire qui rencontre* FM *en* β; *la parallèle à* FF′ *menée par* β *passe par le centre de courbure de l'ellipse en* M. F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient N le point commun à FF′ et à la normale en M [1], ω le point où la parallèle à FF′ menée par β coupe la nor-

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

male, P le point de MF' qui se projette en N sur la normale : on sait que la perpendiculaire en P à MF' passe au centre de courbure; il suffit donc de prouver que $\overline{MP}^2 = MN \times M\omega$. Les triangles semblables à la figure donnent

$$\frac{MP}{MN} = \frac{M\alpha}{MF} = \frac{M\beta}{M\alpha},$$

d'où

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{M\beta}{MF} = \frac{M\omega}{MN}$$

et, par suite,

$$\overline{MP}^2 = MN \times M\omega. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autres solutions par MM. DE BEIRES, R. GOORMAGHTIGH et T. ONO.

AUTRE SOLUTION

Par M. PH. DU PLESSIS.

On sait, d'après Mannheim, M étant le milieu de AB, que le centre de courbure μ est le milieu de $\alpha\beta$. Or, il suffit de faire la figure (¹) pour qu'il saute aux yeux que chacune des constructions ci-dessus aboutit au milieu de $\alpha\beta$. En effet :

1° Si la parallèle à la tangente AB menée par α coupe PM en M' et PB en B', puisque M est le milieu de AB, M' est le milieu de αB'; donc la parallèle à B'β menée par M' passe par le milieu μ de $\alpha\beta$.

2° Si la parallèle à PA menée par β coupe Bα en γ, le triangle $\gamma\alpha\beta$ est isoscèle comme αAB; donc la parallèle à AB menée par γ, c'est-à-dire la hauteur, issue de γ, du triangle $\gamma\alpha\beta$ passe par le milieu μ de sa base.

3° La parallèle à Aα menée par M passe par le milieu M'' de αB. Donc la parallèle à Bα menée par M'' passe par M' et par μ.

Autres solutions, par MM. R. GOORMAGHTIGH et T. ONO.

(¹) On laisse ce soin au lecteur.

2279.

(1915, p. 532.)

Soit OAB *le triangle formé par deux diamètres conjugués d'une ellipse et la tangente en un point* M *à cette courbe. Élevons en* A *et* B *les perpendiculaires à la tangente et soient* α *et* β *les points où elles coupent respectivement les perpendiculaires abaissées de* M *sur* OA *et* OB. *Démontrer que la droite* $\alpha\beta$ *passe par le centre de courbure de l'ellipse en* M *et par le point de rencontre des hauteurs du triangle* OAB.

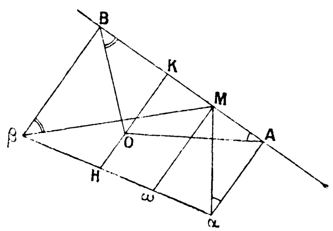
F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Appelons ω le point où $\alpha\beta$ coupe la normale en M, il suffit de prouver que

$$M\omega = \frac{\overline{OM'}^2}{OM.\sin\theta},$$



OM′ désignant le demi-diamètre conjugué de OM, et θ l'angle $\widehat{MOM'}$; la figure donne

$$\frac{M\omega - A\alpha}{B\beta - M\omega} = \frac{MA}{MB},$$

d'où

$$M\omega = \frac{MA.B\beta + MB.A\alpha}{AB};$$

si OK est la distance de O à la tangente en M, les triangles semblables MAα et OKA, MBβ et OKB donnent

$$A\alpha = \frac{MA.AK}{OK}, \qquad B\beta = \frac{MB.BK}{OK},$$

l'expression de Mω peut alors s'écrire

$$M\omega = \frac{MA.MB}{AB\ OK}(BK + AK) = \frac{MA.BM}{OK},$$

c'est bien la valeur du rayon de courbure, car

$$MA.MB = \overline{OM'}^2 \qquad \text{et} \qquad OK = OM \sin\theta.$$

Si OK coupe $\alpha\beta$ en H, un calcul tout à fait analogue au précédent donne

$$KH = \frac{KA.KB}{OK},$$

d'où il résulte que H est l'orthocentre du triangle OAB.

2280.

(1916, p. 95.)

Si l'on divise la suite naturelle des nombres impairs en groupes successifs de termes dont les nombres sont indiqués par les carrés des termes de la suite de Fibonacci, la demi-somme des termes extrêmes du $n^{ième}$ groupe est égal au terme de rang $2n$ de la suite de Fibonacci.

R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTION
Par L'AUTEUR.

Désignons par u_n le terme de rang n de la suite de Fibonacci. En utilisant les notations de M. Laisant [*Propriété de deux suites sommables* (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 116-119)], on a

$$f(n) = 2n - 1, \qquad F(n) = n^2,$$
$$\varphi(n) = u_n^2.$$

On a ensuite, d'après une propriété connue,

$$\Phi(n) = \varphi(1) - (2) + \ldots + \varphi(n) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}.$$

Par conséquent, la somme S_n du $n^{ième}$ groupe considéré est

$$F[\Phi(n)] - F[\Phi(n+1)] = u_n^2 u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 u_n^2,$$
$$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n}.$$

Or, on sait que

$$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n}.$$

On a donc

$$S_n = u_n^2\, u_{2n}.$$

Puisque le groupe considéré est constitué par une progression arithmétique u_n^2 termes, la demi-somme des termes extrêmes de ce groupe vaut u_{2n}.

Autres solutions, par MM. F. Cahn et L. Poli.

2281.

(1916, p. 95.)

Soient A *et* B *les points de contact des tangentes issues d'un point* P *à une conique* Σ, *les tangentes menées par* A *et* B *à une conique* Σ' *homofocale à* Σ, *touchent un cercle dont le rayon reste constant si* P *se déplace sur une conique homothétique et concentrique à* Σ. *En particulier, si* A *et* B *sont les extrémités de deux diamètres conjugués de* Σ, *le carré du rayon de ce cercle est égal à la différence des carrés des demi-axes de* Σ *et* Σ'.

R. Bouvaist.

Solution

Par un Abonné.

Si l'équation tangentielle d'une conique est

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

l'équation quadratique des points A et B où elle est rencontrée par une droite de coordonnées u_0 et v_0 est

$$(a^2 u_0^2 + b^2 v_0^2 - 1)(a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1) \\ - (a^2 u_0 u + b^2 v_0 v - 1)^2 = 0.$$

Si la droite est la polaire du point $P(\alpha, \beta)$, cette équation s'écrit

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)(a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1) - (\alpha u + \beta v - 1)^2 = 0.$$

L'équation d'une conique Σ', homofocale à Σ, étant

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 - K(u^2 + v^2) = 0,$$

cette conique et les points A et B définissent un faisceau tangentiel. Pour qu'il y ait un cercle parmi les coniques du faisceau, il faut et il suffit qu'on ait, x_0, y_0 et R désignant les coordonnées du centre du cercle et son rayon,

$$\lambda\left[\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)(a^2u^2+b^2v^2-1)-(\alpha u+\beta v-1)^2\right]$$
$$+a^2u^2+b^2v^2-1-k(u^2+v^2)$$
$$=\mu[\mathrm{R}^2(u^2+v^2)-(x_0u+y_0v-1)^2].$$

En égalant les coefficients correspondants, on trouve d'abord

$$\lambda\alpha\beta=\mu x_0y_0,\qquad \lambda\alpha=\mu x_0,\qquad \lambda\beta=\mu y_0;$$

d'où

$$\lambda=\mu,\qquad \alpha=x_0,\qquad \beta=y_0.$$

Le centre du cercle est donc le point P, pôle de AB; ce qu'il est facile de voir par la Géométrie.

En égalant ensuite les autres coefficients, on trouve

$$\lambda=\frac{-a^2b^2}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2};$$

puis

$$\lambda[b^2\alpha^2+a^2\beta^2-b^2(a^2+\mathrm{R}^2)]=-b^2(a^2-\mathrm{K}),$$
$$\lambda[b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2(b^2+\mathrm{R}^2)]=-a^2(b^2-\mathrm{K});$$

d'où

$$\mathrm{R}^2=\frac{\mathrm{K}(b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2)}{a^2b^2}.$$

Par suite, si le point P se déplace sur une conique homothétique et concentrique à Σ, R^2 reste constant. En particulier si A et B sont les extrémités de deux diamètres conjugués de Σ, on a

$$b^2\alpha^2+a^2\beta^2=2a^2b^2,$$

d'où

$$\mathrm{R}^2=\mathrm{K};$$

c'est-à-dire que R^2 est égal à la différence des carrés des demi-axes de Σ et Σ'.

Autres solutions, par MM. M. Faucheux et L. Poli.

NÉCROLOGIE.

Albert GAUTHIER-VILLARS

(1861-1918).

C'est avec consternation que nous apprenons, au moment de mettre sous presse ce numéro, la mort subite de notre éditeur M. Gauthier-Villars.

M. le Secrétaire perpétuel E. Picard, en en faisant part à l'Académie des Sciences, a rappelé les services rendus à la Science par la maison Gauthier-Villars, et déclaré que cette fin prématurée excitera les regrets unanimes de l'Académie.

Ces regrets seront partagés par les lecteurs des *Nouvelles Annales* et par ses camarades de l'École Polytechnique, dont il fut élève (promotion 1881).

Nous en adressons l'expression respectueuse et sincère à la famille de celui qui vient de disparaître, et dont la vie entière fut celle d'un homme de bien, intelligent, d'une haute probité et d'un ardent patriotisme.

La Rédaction.

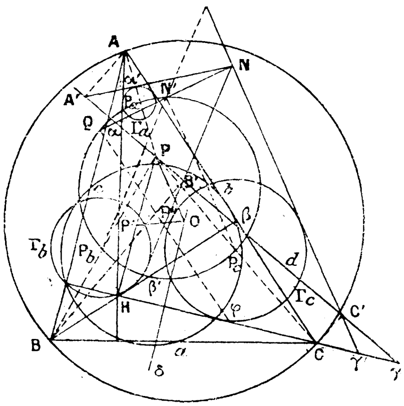
[K'2e]

SUR L'ORTHOPOLE ET CERTAINS LIMAÇONS DE PASCAL ASSOCIÉS AU TRIANGLE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Si l'on projette les sommets d'un triangle ABC sur une droite d, les perpendiculaires abaissées de ces projections sur les côtés correspondants concourent en

Fig. 1.



un point M, orthopôle de d. M. Neuberg a montré [1] que, si la droite d pivote autour d'un point P, son orthopôle décrit une conique. Nous allons déterminer le lieu du symétrique N de M par rapport à la droite d, quand celle-ci tourne autour du point P.

[1] *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, juillet-août 1910).

Le point N peut être défini de la manière suivante (*fig.* 1) : soient A', B', C' les projections de A, B, C sur d; α, β, γ les points où d rencontre les hauteurs AH, BH, CH; α', β', γ' les milieux de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; le point N est à l'intersection des droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$. Or ces droites enveloppent les cercles Γ_a, Γ_b, Γ_c qui ont leurs centres aux milieux P_a, P_b, P_c de PA, PB, PC et qui touchent respectivement les hauteurs AH, BH, CH. D'autre part, les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ sont les symétriques, par rapport à d, des perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB. Par suite, les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ se coupent sous des angles égaux à ceux du triangle. Il résulte de là que le point N décrit un limaçon de Pascal qui est l'isoptique d'angle A des cercles Γ_b et Γ_c, celle d'angle B de Γ_c et Γ_a et celle d'angle C de Γ_a et Γ_b.

Lorsqu'une droite d pivote autour d'un point fixe, le symétrique de l'orthopôle de d, par rapport à d, décrit un limaçon de Pascal.

Cette courbe passe par les projections de P sur les côtés.

2. Le limaçon de Pascal considéré est une conchoïde du cercle $P_aP_bP_c$; déterminons la constante modulaire. Menons par P_b et P_c les parallèles P_bN', P_cN' à $\beta'N$ et $\gamma'N$; la constante cherchée est égale à NN'. Or il est aisé de voir que le parallélogramme formé par les droites $\beta'N$, P_bN', $\gamma'N$, P_cN' est égal au parallélogramme déterminé par les perpendiculaires à AB et AC menées par P et le milieu P' de PH, et l'on a, par suite, $NN' = PP'$.

Le point double Q du limaçon est le point où $N'N$ recoupe le cercle $P_aP_bP_c$. Les distance QP_b, QP_c

étant proportionnelles aux sinus des angles de NN' avec $N'P_b$ et $N'P_c$, l'égalité des parallélogrammes considérés plus haut montre que les distances de Q à P_a, P_b, P_c sont proportionnelles aux cosinus des angles de PH avec les côtés du triangle.

Cela posé, soit φ l'orthopôle du diamètre δ du cercle circonscrit parallèle à PH; les distances de φ aux milieux a, b, c des côtés du triangle sont aussi proportionnelles aux cosinus des angles de δ avec les côtés. Par conséquent, les distances de Q à P_a, P_b, P_c sont respectivement égales à φa, φb, φc. Or les points P_a, P_b, P_c sont les symétriques de a, b, c par rapport au milieu P'' de la droite qui joint P' au centre O du cercle circonscrit; le point Q est donc le symétrique de φ par rapport à P''.

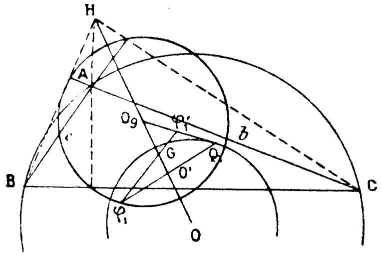
On a donc la proposition suivante, qui permet de déterminer complètement le limaçon correspondant à un point P donné :

Le limaçon de Pascal correspondant au point P *est une conchoïde du cercle égal au cercle des neuf points ayant pour centre le milieu de la distance de* P *au centre* O *du cercle circonscrit, la constante étant égale à la moitié de la distance de* P *à l'orthocentre* H. *Le point double est le symétrique de l'orthopôle du diamètre du cercle circonscrit parallèle à* PH, *par rapport au milieu du segment compris entre* O *et le milieu de* PH.

De ce qui précède il résulte encore que les limaçons correspondant à des points P à égales distances de H sont égaux entre eux, et que les limaçons considérés deviennent des cardioïdes quand P appartient au cercle de centre H dont le rayon est égal au diamètre du cercle circonscrit. Quand P se déplace sur une droite issue de H, le point double du limaçon correspondant décrit une parallèle à cette droite.

3. Considérons maintenant le cas où P coïncide avec O. Soient G le centre de gravité du triangle, φ_1 l'orthopôle de la droite d'Euler, φ'_1 le point complémentaire de φ_1 (*fig.* 2). D'après ce qui précède, le

Fig. 2.



point double Q_1 du limaçon qui correspond au cas spécial considéré est le symétrique de φ_1 par rapport au milieu O' du segment compris entre O et le centre O_9 du cercle des neuf points. Si l'on observe que $\overline{O_9O'} = \frac{3}{2}\overline{O_9G}$ et $\overline{\varphi'_1\varphi_1} = \overline{3\varphi'_1G}$ et qu'on applique le théorème de Menelaüs au triangle $O'\varphi_1G$ coupé par la transversale $O_9\varphi'_1$, on voit que $O_9\varphi'_1$ passe par Q_1 ; en appliquant ensuite le même théorème au triangle O_9Q_1O' coupé par la transversale $\varphi_1G\varphi'_1$, on trouve que Q_1 est le symétrique de O_9 par rapport à φ'_1.

D'autre part, l'orthopôle d'un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC est le foyer de la parabole inscrite au triangle *abc* dont ce diamètre est la directrice; en remarquant que O est l'orthocentre du triangle *abc*, et que φ'_1 est, dans ce triangle, l'orthopôle de sa droite d'Euler, on trouve donc le théorème suivant :

Le lieu des symétriques des foyers des paraboles inscrites à un triangle, par rapport à leurs directrices, est un limaçon de Pascal.

Ce limaçon passe par les sommets du triangle; il est une conchoïde d'un cercle égal au cercle circonscrit ayant pour centre l'orthocentre du triangle, la constante étant égale à la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit.

Le point double du limaçon est le symétrique du centre du cercle circonscrit par rapport à l'orthopôle de la droite d'Euler.

4. Nous avons signalé dans *Mathesis* (1913, p. 81, question 1890) la proposition suivante :

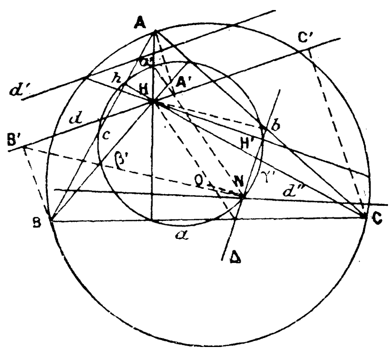
Les perpendiculaires abaissées d'un point variable R *du cercle circonscrit à un triangle sur les côtés recoupent le cercle circonscrit en* A_1, B_1, C_1 : *les points où la droite de Simson de* R *rencontre les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *décrivent trois limaçons de Pascal* L_a, L_b, L_c.

Ces courbes peuvent être considérées comme des cas particuliers de celles obtenues ci-dessus. Il est, en effet, aisé de montrer que le limaçon L_a est la podaire, par rapport à A, du cercle de centre O tangent à BC; cette courbe est donc une conchoïde du cercle de diamètre AO, le pôle étant le sommet A et la constante égale à Oa. On obtient donc la même courbe en supposant que, dans la définition des limaçons considérés plus haut, le point P coïncide avec le sommet A.

Ainsi, *les limaçons* L_a, L_b, L_c *sont aussi les lieux des symétriques des orthopôles des droites menées par les sommets, par rapport à ces droites.*

5. Il résulte encore de ce qui précède que, lorsque d passe par l'orthocentre, le symétrique N de l'orthopôle de d, par rapport à d, appartient au cercle des neuf points. Dans ce cas, le point N jouit de propriétés remarquables qu'on peut déduire de l'étude de l'orthopôle de la manière suivante. Considérons la figure formée par un triangle $A_2B_2C_2$, le cercle circonscrit,

Fig. 3.



une droite d_1 et les droites qui interviennent dans la construction de l'orthopôle S de d_1 ; en projetant cette figure sur un plan passant par d_1, on trouve la proposition suivante : si l'on mène, par les projections des sommets d'un triangle ABC sur une droite d, des droites qui ont des directions conjuguées à celles des côtés du triangle par rapport à une ellipse circonscrite Σ dont l'axe est parallèle à d, ces droites sont concourantes. En étendant ensuite, d'après le principe de continuité, cette propriété au cas où Σ est remplacée par l'hyperbole équilatère (H) circonscrite à ABC et dont l'axe est parallèle à d, on est amené à considérer la définition du point N comme intersection des droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$.

Or, dans le triangle $A_2B_2C_2$, l'orthopôle S de la droite d_1 appartient aux droites de Simson des points où cette droite rencontre le cercle $A_2B_2C_2$. Si l'on transforme cette propriété et si l'on observe que, dans le cas où d passe par H, ce point est une des intersections de (H) et d, on voit que les parallèles menées par H à $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ rencontrent alors les côtés BC, CA, AB en trois points qui appartiennent à une droite Δ [1] qui passe par N (*fig.* 3).

D'autre part, la droite de Simson d'un point du cercle circonscrit à $A_2B_2C_2$ par rapport à ce triangle est la tangente au sommet de la parabole inscrite qui a ce point pour foyer. En transformant cette propriété, on trouve que la parabole π inscrite au triangle ABC et qui est tangente à Δ est aussi tangente aux droites menées par H et inclinées à 45° sur d et que l'axe de cette parabole a une direction symétrique, par rapport à d, de celle de la perpendiculaire abaissée de H sur Δ. Il résulte de là que le symétrique de H par rapport à Δ est le foyer de π et que la projection H' de H sur Δ

---

[1] Cette proposition est identique à ce théorème connu, qui est donc une conséquence directe de celui de Simson :

Deux droites rectangulaires menées par l'orthocentre déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont en ligne droite (*Mathesis*, 1913, p. 256, question 1944; *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1916, p. 124, question 4650; *Journal de Vuibert*, 1916-1917, p. 56, question 8482).

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante :

Les parallèles aux droites de Simson des extrémités d'un diamètre du cercle circonscrit, menées par l'inverse triangulaire Q d'un point quelconque de ce diamètre, déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont sur une droite; le symétrique de Q par rapport à cette droite appartient au cercle circonscrit.

appartient au cercle *abc*; par suite, N est la projection de O sur Δ.

Le centre h de (H) est à l'intersection des parallèles à $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ menées par a, b, c; h est donc le point diamétralement opposé à N sur le cercle *abc* et appartient, par conséquent, à HH'. Or nous avons montré [*Note sur l'orthopôle* (*Mathesis*, 1914)] que l'orthopôle d'une droite d_1 par rapport à un triangle $A_2B_2C_2$ appartient à la transversale réciproque de la symétrique de d_1 par rapport au centre du cercle $A_2B_2C_2$. On en déduit facilement que, dans le triangle ABC, le point N appartient à la transversale réciproque d'' de la symétrique d' de d par rapport à h.

En réunissant ces diverses propriétés, on trouve donc la proposition suivante :

Lorsqu'une droite d passe par l'orthocentre H *du triangle, le symétrique* N *de l'orthopôle de d, par rapport à d, appartient au cercle des neuf points; dans ce cas, les droites qui joignent* H *aux symétriques des sommets, par rapport à d, rencontrent les côtés correspondants en trois points qui appartiennent à une droite* Δ *passant par* N; *le point* N *est la projection du centre du cercle circonscrit sur* Δ; *La perpendiculaire menée de* H *à* Δ *coupe le cercle circonscrit en deux points; l'un de ces points est le foyer de la parabole inscrite qui est tangente à* Δ; *si, par l'autre point, on mène une parallèle à d, la transversale réciproque de la droite obtenue passe par le point* N.

[M¹5b]

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. J. LEMAIRE.

1. Une hypocycloïde à trois rebroussements, étant une courbe de troisième classe, admet six tangentes communes avec une conique, de sorte qu'il existe une relation et une seule entre six pareilles tangentes; cette relation est exprimée par le théorème suivant que j'ai admis, dans une étude précédente (*N. A.*, 1913, p. 49 et 113), comme une conséquence d'un théorème plus général dû à M. G. Humbert :

Pour que six tangentes d'une H_3 *touchent une même conique, il faut et il suffit que la somme des angles qu'elles font avec la tangente* T'T *à l'hypocycloïde en l'un de ses sommets soit égale à* $h\pi$, *h désignant un nombre entier* (la notation H_3 représentant toute hypocycloïde à trois rebroussements).

Cette proposition peut être établie de la manière suivante :

Rappelons d'abord qu'une tangente à une H_3 étant déterminée sans ambiguïté par l'angle ω que fait avec la direction T'T la demi-tangente qui est du même côté que le centre par rapport à T'T, nous pouvons désigner par la notation ω la tangente correspondant à l'angle ω, supposé compris entre zéro et π.

Considérons deux coniques quelconques (C) et (C'), et soient α_1, α_2, ..., α_6 et α'_1, α'_2, ..., α'_6 les angles définissant les deux groupes de tangentes communes à chacune d'elles et à une H_3 que nous appellerons (H); démontrons que

$$\Sigma\alpha_k \equiv \Sigma\alpha'_k, \tag{1}$$

le signe $\equiv$ voulant dire : égale à $h\pi$ près, h entier.

On sait que, si une conique variable passe par quatre points fixes d'une cubique, la corde qui joint les deux autres points d'intersection des deux courbes coupe la cubique en un troisième point qui est fixe; corrélativement, si une conique variable touche quatre tangentes fixes d'une courbe de troisième classe, du point commun aux deux autres tangentes communes, on peut mener une troisième tangente à la courbe, qui est fixe.

Si donc (S) désigne la conique tangente aux droites α_1, α_2, α_3, α_4, α'_5, et si β est la sixième tangente commune à cette conique et à (H), les tangentes α_5 et α_6 d'une part, α'_5 et β d'autre part, se coupent sur une même tangente θ à (H), et nous pouvons écrire (*N. A.*, 1913, p. 54)

$$\alpha_5 + \alpha_6 + \theta \equiv \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha'_5 + \beta + \theta \equiv \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\alpha_5 + \alpha_6 \equiv \alpha'_5 + \beta$$

et par suite

$$\Sigma\alpha_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha'_5 + \beta;$$

soient de même (S') la conique tangente aux droites α_1, α_2, α_3, α'_4, α'_5, et γ la sixième tangente commune à cette conique et à (H); on a, comme ci-dessus,

$$\alpha_4 + \beta \equiv \alpha'_4 + \gamma$$

et, par conséquent,

$$\Sigma \alpha_k \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \gamma;$$

en continuant de proche en proche, on arriverait à la relation

$$\Sigma \alpha_k \equiv \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \varphi,$$

où φ est la sixième tangente commune à (H) et à la conique tangente aux droites α'_1, α'_2, α'_3, α'_4, α'_5; comme il n'existe qu'une seule conique tangente à ces cinq droites, les sixièmes tangentes φ et α'_6 coïncident nécessairement, $\varphi = \alpha'_6$, et la relation ci-dessus est précisément la relation (1) qu'il s'agissait d'établir.

Ainsi $\Sigma\alpha_k$ conserve une valeur constante quand la conique (C) varie; en considérant en particulier le cercle tritangent à (H), on trouve que cette somme est bien de la forme $h\pi$ (h entier), ce qui démontre la première partie du théorème; la seconde en dérive immédiatement, à cause de la remarque faite plus haut relativement à la détermination d'une tangente par son angle avec T'T.

2. Soit ABC un triangle T formé par trois tangentes à (H) perpendiculaires aux tangentes issues d'un point quelconque H; nous savons que H est l'orthocentre de ABC, et que (H) est l'enveloppe des droites de Simson du triangle : considérons le faisceau des hyperboles équilatères (h) circonscrites à ABC, et cherchons le lieu des points de contact M des tangentes à ces hyperboles parallèles à une direction donnée D; sur une parallèle quelconque L à D, il y a deux points tels que M à distance finie, les points doubles de l'involution déterminée sur L par les côtés opposés du quadrangle orthogonal ABCH, et un point à l'infini qui correspond à l'hyperbole (h) ayant L pour direction

asymptotique : le lieu de M est donc une *cubique* (Γ), laquelle passe aux sommets du quadrangle, et aussi évidemment aux pieds des hauteurs du triangle T; cette cubique coupe la droite de l'infini au point à l'infini sur D et aux deux points doubles de l'involution déterminée par les hyperboles du faisceau sur cette droite, c'est-à-dire aux points cycliques.

On voit ainsi que les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs appartiennent à une infinité de cubiques circulaires.

Pour que L soit une asymptote de (Γ), il faut et il suffit que l'un des points P et P' où elle coupe la courbe, P' par exemple, soit rejeté à l'infini, l'autre P devenant alors le milieu commun aux segments déterminés sur la droite par les côtés et les hauteurs correspondantes du triangle T; on sait que c'est là une propriété caractéristique des droites de Simson et que P est alors sur le cercle des neuf points de T, et l'on a ce théorème :

Par les sommets, l'orthocentre et les pieds des hauteurs de tout triangle T *d'une* H_3, *passent une infinité de cubiques circulaires, et l'enveloppe des asymptotes réelles de ces cubiques est l'hypocycloïde* (H) *elle-même; le lieu du point commun à une cubique et à son asymptote réelle est le cercle tritangent à* (H).

Du mode de génération de (Γ) il résulte que les tangentes à cette courbe aux quatre points A, B, C, H sont parallèles à l'asymptote; ces points sont les centres d'anallagmatie de la cubique.

A', B', C' désignant les pieds des hauteurs du triangle T, les tangentes à (Γ) aux points A', B, C en ligne droite de cette cubique coupent la courbe en trois nouveaux points qui sont sur une droite dite *satellite de la première*. Comme les tangentes en B et C sont parallèles à l'asymptote, leurs points tangentiels coïncident avec le point réel à l'infini sur (Γ), et la satellite de A'BC est l'asymptote, d'où l'on conclut que la tangente en A' à la cubique coupe cette courbe au même point P que son asymptote, et que les tangentes aux points analogues B' et C' passent aussi en P; donc :

Si l'on joint un point P *du cercle tritangent à une* H_3 *aux pieds des hauteurs d'un triangle* T *quelconque, il existe une cubique circulaire tangente en ces points aux droites ainsi tracées, et contenant les sommets et l'orthocentre de* T, *et l'asymptote réelle de cette cubique passe en* P *et enveloppe l'hypocycloïde, quand* T *varie et que* P *se déplace sur le cercle tritangent.*

3. Depuis la publication de l'étude rappelée plus haut, j'ai eu connaissance de plusieurs Mémoires sur l'H_3, dus à M. Gob, professeur à l'Athénée de Liége (*Mémoires de la Société royale de Liége*) qui a donné en particulier de curieuses propriétés des ellipses tritangentes à cette courbe.

Je me bornerai à en extraire l'énoncé du théorème suivant, donné sans démonstration par Steiner, et établi par M. Gob, et à en indiquer une autre démonstration simple :

ABC *étant un triangle* T *formé par les tangentes perpendiculaires à trois tangentes concourantes d'une* H_3, *si l'on inscrit à ce triangle une conique variable* (Σ) *passant par l'orthocentre* H, *la tangente* Δ *à cette conique au point* M *diamétralement* *opposé à* H *touche l'hypocycloïde considérée* (H), *enveloppe des droites de Simson de* T.

D'abord il n'existe qu'une droite Δ de direction donnée, car cette direction, fixant la tangente en H à (Σ), détermine une conique unique.

Comme par H passent deux paraboles inscrites au triangle, la droite de l'infini est bitangente à l'enveloppe de Δ, qui est ainsi une courbe de troisième classe (Δ).

Cette courbe est manifestement tangente aux côtés et aux hauteurs du triangle. Soit N le point où Δ coupe BC, supposons que la tangente en H à (Σ) vienne se confondre avec la parallèle à BC, qui coupe AC et AB en b et c, Δ vient se confondre avec BC, et le point de contact de ce côté avec l'enveloppe (Δ) est la limite de N, c'est-à-dire le point de contact A_1 de BC avec la conique correspondante. D'après le théorème de Brianchon, Bb, Cc et A_1H concourent, de sorte que

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{Hc}{Hb};$$

mais, D désignant le pied de la hauteur issue de A, on a aussi

$$\frac{DB}{DC} = \frac{Hc}{Hb};$$

par conséquent,

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{DB}{DC},$$

et cette relation est vraie en signe comme les précédentes. On en conclut que A_1 et D sont symétriques par rapport au milieu de BC, c'est-à-dire que A_1 est le point où (H) touche ce côté; les courbes (Δ) et (H) sont donc tangentes en A_1 et aux deux autres points analogues B_1 et C_1; comme elles touchent aussi les hauteurs de T et sont bitangentes à la droite de l'infini, elles coïncident, ce qui établit la proposition. M. Gob démontre que le lieu du point M est l'ellipse tritangente à (H) aux points A_1, B_1, C_1.

[K²6]

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. S. ÔUE;

PAR M. N. AGRONOMOF.

Dans *The Tôhoku Mathematical Journal* (1916, p. 225), M. S. Ôue a énoncé le théorème suivant :

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4 *sur une circonférence, les cercles d'Euler de trois quelconques de ces points concourent en un même point* (1, 2, 3, 4).

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *sur une circonférence, les points* (2, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4) *sont sur une même circonférence* [1, 2, 3, 4, 5].

Étant donnés les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *sur une circonférence, les cercles* [2, 3, 4, 5, 6], [1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 6], [1, 2, 3, 4, 5] *concourent en un même point* (1, 2, 3, 4, 5, 6), *etc.*

Voici une généralisation du théorème de M. S. Ôue :

Étant donnés n points sur une hypersphère de m dimensions, les centres de gravité de $(n-1)$ *quel-*

conques de ces points sont sur une même hypersphère $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

Soit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_m^2 = R^2$$

l'équation d'hypersphère. Si les coordonnées de n points sont

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_{1,1}, & \alpha_{2,1}, & \alpha_{3,1}, & \ldots, & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \alpha_{2,1}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,1}^2}, \\
\alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2}, & \alpha_{3,2}, & \ldots, & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \alpha_{2,2}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,2}^2}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n}, & \alpha_{3,n}, & \ldots, & \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2};
\end{array}$$

celles de centres de gravité sont

$$\mathcal{G}(2, 3, \ldots, n) \left\{ \begin{array}{l}
\dfrac{\alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \ldots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\
\dfrac{\alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \ldots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,2}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,2}^2} + \ldots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \alpha_{2,n}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1};
\end{array} \right.$$

$$\mathcal{G}(1, 3, \ldots, n) \left\{ \begin{array}{l}
\dfrac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,3} + \ldots + \alpha_{1,n}}{n-1}, \\
\dfrac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,3} + \ldots + \alpha_{2,n}}{n-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\sqrt{R^2 - \alpha_{1,1}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,1}^2} + \ldots + \sqrt{R^2 - \alpha_{1,n}^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1};
\end{array} \right.$$

. . . .

On voit que, quelles que soient les valeurs de α, les points $\mathcal{G}$ sont sur une même hypersphère

$$\left(x_1 - \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \ldots + \alpha_{1,n}}{n-1}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \ldots + \alpha_{2,n}}{n-1}\right) + \ldots$$
$$+ \left(x_n - \frac{\sqrt{R^2 - \ldots - \alpha_{m-1,1}^2} + \ldots + \sqrt{R^2 - \ldots - \alpha_{m-1,n}^2}}{n-1}\right)^2 = \frac{R^2}{(n-1)^2}.$$

Étant donnés $(n+1)$ *points* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ *sur une hypersphère de m dimensions, les hypersphères* $(2, 3, \ldots, n+1)$, $(1, 3, \ldots, n+1)$, $\ldots$, $(1, 2, \ldots, n)$ *concourent en un même point* $[1, 2, \ldots, n+1]$.

Les équations $(2, 3, \ldots, n+1)$, ... sont

$$\left(x_1 - \frac{\alpha_{2,1}+\ldots+\alpha_{2,n+1}}{n-1}\right)^2 + \ldots$$
$$+\left(x_n - \frac{\sqrt{R^2-\ldots-\alpha_{m-1,2}^2}+\ldots+\sqrt{R^2-\ldots-\alpha_{m-1,n+1}^2}}{n-1}\right)^2 = \frac{R^2}{(n-1)^2};$$
....

On vérifie facilement que les hypersphères $(2, 3, \ldots, n+1)$, $(1, 3, \ldots, n+1)$, ... passent par le point

$$\frac{\alpha_{1,1}+\alpha_{1,2}+\ldots+\alpha_{1,n+1}}{n-1},$$
$$\frac{\alpha_{2,1}+\alpha_{2,2}+\ldots+\alpha_{2,n+1}}{n-1},$$
....

Aussi même on peut démontrer que :

Étant donnés $(n+2)$ *points* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ *sur une hypersphère de m dimensions, les points* $[2, 3, \ldots, n+2]$, $[1, 3, \ldots, n+2]$, $\ldots$, $[1, 2, \ldots, n+1]$ *sont sur une même hypersphère* $[1, 2, \ldots, n+2]$.

Étant donnés $(n+3)$ *points* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+3}$ *sur une hypersphère de m dimensions, les hypersphères* $(2, 3, \ldots, n+3)$, $(1, 3, \ldots, n+3)$, $\ldots$, $(1, 2, \ldots, n+2)$ *concourent en un même point* $[1, 2, \ldots, n+3]$.

Etc.

Pour $m=2$, $n=3$, on retrouve les théorèmes de M. S. Ôue.

CORRESPONDANCE.

M. **M.-F. Egan.** — *Au sujet de la question* 1617 (*voir* la solution, 1918, p. 73). — Le théorème énoncé dans la question peut s'exprimer comme il suit : « Soient A, B, C les pieds des normales abaissées d'un point P à une parabole, et soit A′ le deuxième point de rencontre de AP avec la courbe; les tangentes à la parabole en B, C, A′, ainsi que la droite BC et le diamètre mené par A′, touchent une même parabole de foyer P. BC est la tangente au sommet de cette parabole. »

Une transformation par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre P, donne l'énoncé suivant : *Soient* A, B, C *les pieds des normales à une ellipse issues d'un point* P *situé sur la courbe*, A′ *le point de l'ellipse diamétralement opposé à* A, Q *et* R *les pôles de* BC *et* PA′; *les points* B, C, A′, P, Q, R *sont sur une même circonférence dont* PQ *est un diamètre.*

Ceci se démontre assez facilement. En effet, les normales à l'ellipse en P, A, B, C concourent, donc P, A′, B, C sont sur un cercle de Joachimsthal (J). Les angles PBQ, PCQ étant droits, PQ est un diamètre de (J). Soit O le centre de l'ellipse. O est le milieu de AA′, et la droite OR passe par le milieu de PA′, OR est donc parallèle à AP et par conséquent perpendiculaire aux tangentes en A et A′ à l'ellipse. Or, d'après un théorème de Laguerre (¹), le cercle de Joa-

(¹) *Voir* Casey, *Analytical Geometry*, 1893, p. 219.

chimsthal passe par le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente en A', c'est-à-dire par le point R : ce qui achève la démonstration.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2282.

(1916, p. 95.)

Soit Γ *la section d'une quadrique* Σ *par le plan polaire d'un point* P *par rapport à cette quadrique, la développable circonscrite à* Γ *et à une quadrique* Σ' *homofocale à* Σ *est circonscrite à une sphère dont le rayon reste constant si* P *décrit une quadrique homothétique et concentrique à* Σ. *En particulier, si* Γ *passe par les extrémités de trois diamètres conjugués de* Σ, *le carré du rayon de cette sphère est égal au double de la différence des carrés des demi-axes de* Σ et Σ'. R. BOUVAIST.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

La solution ne diffère pas de celle de la question 2281, mais les calculs sont un peu plus longs parce qu'il y a trois variables au lieu de deux.

Si l'équation tangentielle de Σ est

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0,$$

l'équation de Γ est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) \\ - (\alpha u + \beta v + \gamma w - 1)^2 = 0 :$$

α, β, γ étant les coordonnées de P.

La quadrique Σ' ayant pour équation

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 - K(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

détermine avec Γ un faisceau tangentiel et, pour qu'il y ait dans le faisceau une sphère, de rayon R et de centre x_0, y_0, z_0, on doit avoir

$$\lambda\left[\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1) - (\alpha u + \beta v + \gamma w - 1)^2\right]$$
$$+ a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 - K(u^2 + v^2 + w^2)$$
$$= \mu[R^2(u^2 + v^2 + w^2) - (x_0 u + y_0 v + z_0 w - 1)^2].$$

En égalant les coefficients correspondants, on trouve d'abord

$$\lambda = \mu, \qquad x_0 = \alpha, \qquad y_0 = \beta, \qquad z_0 = \gamma;$$

puis

$$\lambda\left[a^2\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) - (R^2 - \alpha^2)\right] = -(a^2 - K),$$

$$\lambda\left[b^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) - (R^2 - \beta^2)\right] = -(b^2 - K),$$

$$\lambda\left[c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) - (R^2 - \gamma^2)\right] = -(c^2 - K);$$

d'où l'on tire, après quelques transformations,

$$R^2 = K\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right);$$

et si Γ passe par les extrémités de trois diamètres conjugués

$$R^2 = 2K,$$

puisque alors

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 3.$$

Les propositions sont donc démontrées.

2283.

(1916, p. 96.)

Σ et Σ' étant deux ellipsoïdes homofocaux, un plan tangent à Σ coupe Σ' suivant une conique dont l'aire est inversement proportionnelle au cube de la projection sur une perpendiculaire au plan sécant du demi-diamètre de Σ' conjugué de ce plan sécant. R. Bouvaist.

SOLUTION

Par un Abonné.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipsoïde Σ' et

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

celle du plan sécant.

Ce plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont le produit des axes a pour valeur

$$S^2=\frac{abc(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-p^2)}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation tangentielle de Σ étant

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1-K(u^2+v^2+w^2)=0;$$

si l'on exprime que le plan sécant est tangent à cet ellipsoïde, on trouve

$$a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma-p^2=K$$

et, par suite,

$$S^2=\frac{Kabc}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais la projection du demi-diamètre conjugué du plan sécant sur la perpendiculaire à ce plan, n'est autre chose que la distance de l'origine au plan tangent à Σ' parallèle au plan sécant.

Soit h cette distance, on a

$$h^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$

et, par suite,

$$S^2 = \frac{K abc}{h^3}.$$

2284.

(1916, p. 96.)

Σ et Σ' étant deux quadriques homofocales, les plans tangents à Σ parallèles aux plans tangents à un cône homofocal au cône asymptotique de Σ' coupent Σ' suivant des coniques d'aire constantes. R. Bouvaist.

Solution

Par un Abonné.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de Σ' et

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 0,$$

ou bien, en coordonnées tangentielles,

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

celle d'un cône homofocal à son cône asymptotique.

Soient d'autre part

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 - K(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

l'équation tangentielle de Σ et

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

l'équation ponctuelle du plan sécant.

En exprimant qu'il est tangent à Σ et parallèle à un plan tangent au cône homofocal du cône asymptotique de Σ', on trouve respectivement

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma - p^2 = \mathrm{K},$$
$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma \qquad = \lambda.$$

Le produit des axes de la section de Σ' par le plan sécant ayant pour valeur

$$\mathrm{S}^2 = \frac{abc(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma - p^2)}{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

on voit, en vertu des relations précédentes, qu'il est constant.

2285.

(1916, p. 96.)

Soient A′, B′, C′ *les pieds des trois céviennes* AM, BM, CM *de triangle* ABC, *et* N *le point d'intersection de* AM *avec l'axe d'homologie des triangles* ABC, A′B′C′. *Démontrer que*

$$\frac{\mathrm{NA'}}{\mathrm{NA}} = 2\frac{\mathrm{MA'}}{\mathrm{MA}}.$$

T. Ono.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

L'axe d'homologie coupe BC, CA, AB en P, Q, R, on a

$$\frac{\mathrm{NA'}}{\mathrm{NA}} = \frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RB}}\,\frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{PB}}, \qquad \frac{\mathrm{MA'}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{C'B}}{\mathrm{C'A}}\,\frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{CB}};$$

or

$$\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RA}} = \frac{\mathrm{C'B}}{\mathrm{C'A}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{CP}} = \frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{BP}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{CP} - \mathrm{CA'}}{\mathrm{CP}} = \frac{\mathrm{BP} - \mathrm{BA'}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{PA'}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{PA'} - \mathrm{PC} + \mathrm{CA'}}{\mathrm{CB}} = \frac{2\mathrm{CA'}}{\mathrm{CB}},$$

d'où enfin

$$\frac{\mathrm{NA'}}{\mathrm{NA}} = 2\frac{\mathrm{MA'}}{\mathrm{MA}}.$$

Autres solutions par MM. G. Boulloud, M. Faucheux, J. Lemaire et L. Poli.

2286.

(1916, p. 96.)

Factoriser le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2abc & -c^3 & -b^3 & a \\ -c^3 & 2abc & -a^3 & b \\ -b^3 & -a^3 & 2abc & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

T. Ono.

Solution

Par un Abonné.

Multiplions les colonnes du déterminant Δ par $1, 1, 1, bc - a^2$ et ajoutons; on trouve ainsi le facteur $a+b+c$. D'autre part, en divisant les colonnes par bc, ca, ab, 1, puis en multipliant les lignes par a, b, c, abc, on voit que Δ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & -c^2 & -b^2 & a^2 \\ -c^2 & 2b^2 & -a^2 & b^2 \\ -b^2 & -a^2 & 2c^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \Delta'.$$

Δ' est un polynome en a^2, b^2, c^2, divisible par $a+b+c$: il contient donc le facteur

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) + \varpi.$$

Le quotient de Δ' par ϖ est une forme quadratique symétrique en a^2, b^2, c^2. En multipliant les colonnes de Δ' par $1, 1, 1, -3$ et ajoutant, on trouve le facteur $a^2+b^2+c^2$. Le facteur qui reste est donc $k(a^2+b^2+c)$. Enfin, en examinant le coefficient de a^8, on trouve que $k = -1$. Donc

$$\Delta = -(a^2+b^2+c^2)^2\,\varpi.$$

Autres solutions par MM. R. Bouvaist et L. Poli.

2287.

(1916, p. 148.)

Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$ *les coordonnées normales d'un point* P *sur le cercle circonscrit au triangle* ABC. *L'équation de la droite Wallace correspondant à* P *est représentée par*

$$\frac{\gamma'\alpha}{c(\alpha'+\gamma'\cos B)}+\frac{\alpha'\beta}{a(\beta'+\alpha'\cos C)}+\frac{\beta'\gamma}{b(\gamma'+\beta'\cos A)}=0.$$

T. Ono.

SOLUTION GÉNÉRALISÉE

Par M. R. Bouvaist.

J'ai montré (*N. A.*, 1915, p. 556) que l'équation du cercle isopodaire correspondant à l'angle $\frac{\pi}{2}-V$, d'un point P par rapport à un triangle ABC était, en posant

$$\Delta = a\alpha+b\beta+c\gamma,\qquad \Delta\alpha' = a\alpha'+b\beta'+c\gamma',$$
$$\mathcal{C} = a\beta\gamma+b\alpha\gamma+c\alpha\beta,\qquad \mathcal{C}\alpha' = a\beta'\gamma'+b\alpha'\gamma'+c\alpha'\beta',$$

$$\begin{aligned}\Delta\alpha'\mathcal{C}\alpha'\mathcal{C} - abc \times \Delta\Big[&\frac{\alpha}{a}\alpha'(\gamma'+\beta'\cos A+\beta'\sin A \operatorname{tang} V)(\beta'+\gamma'\cos A-\gamma'\sin A\operatorname{tang} V)\\ &+\frac{\beta}{b}\beta'(\alpha'+\gamma'\cos B+\gamma'\sin B\operatorname{tang} V)(\gamma'+\alpha'\cos B-\alpha'\sin B\operatorname{tang} V)\\ &+\frac{\gamma}{c}\gamma'(\beta'+\alpha'\cos C+\alpha'\sin C\operatorname{tang} V)(\alpha'+\beta'\cos C-\beta'\sin C\operatorname{tang} V)\Big]=0.\end{aligned}$$

Si P est sur le cercle circonscrit $\mathcal{C}\alpha'=0$, l'équation de la droite de Wallace relative au point P et à l'angle $\frac{\pi}{2}-V$ peut donc s'écrire en posant

$$\lambda_1 = \gamma'+\beta'\cos A+\beta'\sin A\operatorname{tang} V,$$
$$\mu_1 = \alpha'+\gamma'\cos B+\gamma'\sin B\operatorname{tang} V,$$
$$\nu_1 = \beta'+\alpha'\cos C+\alpha'\sin C\operatorname{tang} V,$$
$$\lambda_2 = \beta'+\gamma'\cos A-\gamma'\sin A\operatorname{tang} V,$$
$$\mu_2 = \gamma'+\alpha'\cos B-\alpha'\sin B\operatorname{tang} V,$$
$$\nu_2 = \alpha'+\beta'\cos C-\beta'\sin C\operatorname{tang} V,$$

$$(1)\qquad \frac{\alpha'\alpha}{a}\lambda_1\lambda_2+\frac{\beta'\beta}{b}\mu_1\mu_2+\frac{\gamma'\gamma}{c}\nu_1\nu_2=0;$$

or

$$\lambda_1\mu_1\nu_1=\lambda_2\mu_2\nu_2;$$

cette relation exprime en effet que la droite de Wallace coupe les trois côtés du triangle en trois points en ligne droite d'où, en posant $\lambda_1\mu_1\nu_1 = \lambda_2\mu_2\nu_2 = k$,

$$\begin{aligned} c\alpha'\lambda_1\lambda_2\mu_1 &= k\,a\gamma', \\ a\beta'\nu_1\mu_1\mu_2 &= k\,b\alpha', \\ b\gamma'\lambda_1\nu_1\nu_2 &= k\,c\beta'; \end{aligned}$$

l'équation (1) devient

$$\frac{\gamma'\alpha}{c\mu_1} + \frac{\alpha'\beta}{a\nu_1} + \frac{\beta'\gamma}{b\lambda_1} = 0$$

qui, pour $V = 0$, est la forme donnée par l'énoncé.

Autres solutions par MM. M. FAUCHEUX et L. POLI.

2289.

(1916, p. 138.)

On construit une ellipse au moyen des cercles décrits sur les axes comme diamètres. La droite menée par le centre pour obtenir quatre points, M, M', ... *est une asymptote de l'hyperbole homofocale à l'ellipse et passant par* M. *Extension à l'espace.* G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient Ox et Oy les axes de l'ellipse, la tangente au point M de la courbe et la tangente au point M_1 correspondant du cercle principal par exemple coupent Ox en T, comme MT est la normale à l'hyperbole homofocale à l'ellipse passant par M, OM_1 perpendiculaire à M_1T sera une asymptote de cette hyperbole.

L'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - 0$ est le lieu de l'intersection des plans parallèles à Oxy, Oxz, Oyz menés respectivement par les points où la droite $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma}$ coupe les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

plans $x = a\alpha$, $y = b\beta$, $z = c\gamma$, les quadriques homofocales à l'ellipsoïde passant par le point $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, auront pour équations

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0,$$

λ étant déterminé par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2+\lambda} = 0,$$

équation qui exprime que la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ est commune aux cônes asymptotiques de ces deux surfaces.

Autres solutions par E.-N. Barisien et par MM. G. Boulloud, M. Faucheux et L. Poli.

2290.

(1916, p. 368.)

Si d'un point P *d'une strophoïde dont les tangentes au point double sont* Ox *et* Oy, *on mène à la courbe deux tangentes* PAC, PBD, A *et* B *étant sur* Ox, C *et* D *sur* Oy, *on a*

$$\left(\frac{1}{\text{OA}} - \frac{1}{\text{OB}}\right)\left(\frac{1}{\text{OC}} - \frac{1}{\text{OD}}\right) = \text{const.}$$

R. Bouvaist.

Solution

Par un Abonné.

Prenons le point O pour origine et Ox et Oy pour axes de coordonnées. La strophoïde a pour équation

$$(y + cx)(x^2+y^2) - axy = 0.$$

En posant $y = tx$ on a pour les coordonnées d'un point de la courbe les expressions

$$x = \frac{at}{(c+t)(1+t^2)}, \qquad y = \frac{at^2}{(c+t)(1+t^2)}.$$

L'équation de la droite qui joint les deux points t et t_1 est

$$\begin{aligned}&[\quad c(t+t_1) + tt_1 \quad - t_1 t_1^2]\, x\\ &+ [-c \quad + ctt_1 - tt_1(t+t_2)]\, y - att_1 = 0.\end{aligned}$$

Cela posé, on sait que les paramètres de deux points tels que les tangentes en ces points se coupent sur la courbe sont égaux et de signes contraires. Donc, si t désigne le paramètre du point P et si l'équation précédente représente la droite PAB, celle de PCD s'en déduira en changeant le signe de t_1.

On a alors

$$\frac{1}{\mathrm{OA}} = \frac{c(t+t_1)+tt_1-t^2t_1^2}{att_1}, \qquad \frac{1}{\mathrm{OB}} = \frac{c(t-t_1)-tt_1-t^2t_1^2}{-att_1}$$

et, de même,

$$\frac{1}{\mathrm{OC}} = \frac{-c+ctt_1+tt_1(t+t_1)}{att_1}, \qquad \frac{1}{\mathrm{OD}} = \frac{-c-ctt_1-tt_1(t-t_1)}{-att_1};$$

par suite,

$$\left(\frac{1}{\mathrm{OA}}-\frac{1}{\mathrm{OB}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{OC}}-\frac{1}{\mathrm{OD}}\right) = -\frac{4}{a^2tt_1^2}(c-tt_1^2)^2.$$

Mais les paramètres des points d'intersection de la droite

$$ux+vy-1=0$$

avec la strophoïde sont donnés par l'équation

$$t^3+(c-av)t^2+(1-au)t+c=0$$

et sont, par suite, liés par la relation

$$t_1t_2t_3=-c.$$

Donc les paramètres des points de contact des tangentes à la courbe issues de P vérifient la relation

$$tt_1^2=-c,$$

et l'on a

$$\left(\frac{1}{\mathrm{OA}}-\frac{1}{\mathrm{OB}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{OC}}-\frac{1}{\mathrm{OD}}\right) = \frac{8}{a^2} = \text{const.}$$

2291.

(1916, p. 368.)

Soient O *le point double d'une cubique nodale,* Ox *et* Oy *les tangentes en ce point,* M *un point de la courbe,*

T_M *la tangente en ce point;* T_M *rencontre la courbe en* M_1, *soit* T_{M_1} *la tangente en ce point; la conjuguée harmonique de* T_{M_1} *par rapport à* OM_1, T_M *rencontre* Ox *et* Oy *en* A *et* B; *la conique passant par* OAB *et tangente en* M *à la cubique a, avec celle-ci en* M, *un contact du troisième ordre.* R. BOUVAIST.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

On doit à Laguerre le théorème suivant (*N. A.*, 1870, p. 256; *Œuvres complètes*, t. II, p. 140):

« Si d'un point A d'une hypocycloïde à trois rebroussements, on mène à la courbe la tangente dont le point de contact ne coïncide pas avec A; en désignant par T le point de contact de cette tangente, si l'on prolonge TA d'une longueur égale à elle-même, le point T', extrémité de ce prolongement, est le foyer de la parabole qui suroscule en A l'hypocycloïde. »

Si l'on étend, par projection, ce théorème aux quartiques qui ont trois points de rebroussement; puis si l'on transforme par dualité le théorème ainsi généralisé, on obtient, par les cubiques à point double, la proposition qui fait l'objet de la question 2291.

Il suffit de remarquer que le point A et le point à l'infini sur la tangente forment une division harmonique avec T et T'.

2292.

(1916, p. 368.)

Soit H_3 *une hypocycloïde à trois rebroussements tangente à deux droites rectangulaires* OB *et* OA *en* A *et* B, *l'hyperbole équilatère qui touche* AB *et admet pour asymptotes* OA *et* OB *a, en dehors des côtés du triangle* OAB, *trois tangentes communes avec* H_3, *montrer que le centre de gravité du triangle formé par ces trois tangentes est le point* O. R. BOUVAIST.

SOLUTION

Par M. L. POLI.

L'équation tangentielle générale des hypocycloïdes à trois rebroussements, en coordonnées rectangulaires est

$$w(u^2+v^2)+au^3+bu^2v+cuv^2+du^3=0.$$

Si les axes choisis ont deux tangentes rectangulaires quelconques OA et OB, l'équation sera

$$(\mathrm{H}_3)\qquad w(u^2+v^2)+bu^2v+cuv^2=0$$

et les points de contact auront pour équation

$$(\mathrm{A})\qquad vb+w=0,$$

$$(\mathrm{B})\qquad uc+w=0.$$

La droite AB a pour coordonnées $(b, c, -bc)$. Elle est tangente à H_3.

Une hyperbole équilatère qui admetOA et OB pour asymptotes a pour équation $kuv=w^2$. Si l'on écrit qu'elle touche AB il faudra faire $k=bc$.

Et les tangentes communes à l'hyperbole et à H_3 seront les solutions du système

$$\begin{cases} w(u^2+v^2)+uv(bu+cv)=0, \\ bc\,uv=w^2. \end{cases}$$

Faisons $w=1$, et portons $u=\dfrac{w^2}{bw}$ dans la première équation. On trouve

$$\left(v+\frac{1}{b}\right)\left(v^3+\frac{1}{bc^2}\right)=0;$$

on aurait de même

$$\left(u+\frac{1}{c}\right)\left(u^3+\frac{1}{bc^2}\right)=0.$$

Les tangentes communes, autres que les axes et AB, ont donc pour coordonnées

$$\begin{array}{lll} -\left(\dfrac{1}{b^2c}\right)^{\frac{1}{3}} & -\left(\dfrac{1}{bc^2}\right)^{\frac{1}{3}} & 1, \\ -\alpha\left(\dfrac{1}{b^2c}\right)^{\frac{1}{3}} & -\alpha^2\left(\dfrac{1}{bc^2}\right)^{\frac{1}{3}} & 1, \\ -\alpha^2\left(\dfrac{1}{b^2c}\right)^{\frac{1}{3}} & -\alpha\left(\dfrac{1}{bc^2}\right)^{\frac{1}{3}} & 1, \end{array}$$

α désignant une racine imaginaire cubique de l'unité.

La première est réelle et les deux autres imaginaires conjuguées.

Les sommets du triangle qu'elles forment ont pour coordonnées ponctuelles

$$\left[-\alpha(b^2c)^{\frac{1}{3}},\quad -\alpha^2(bc^2)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$\left[-\alpha^2(b^2c)^{\frac{1}{3}}\right],\quad -\alpha(bc^2)^{\frac{1}{3}}\Big],\qquad \left[-(b^2c)^{\frac{1}{3}},\quad -(bc^2)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Et l'on voit aisément que la somme des abscisses comme celle des coordonnées est nulle ($1+\alpha+\alpha^2=0$), c'est-à-dire que le centre de gravité du triangle coïncide avec l'origine.

Autres solutions par un Abonné et par M. M. Faucheux.

2294.

(1916, p. 400.)

Enveloppe du plan d'un triangle ABC *variable dont les sommets décrivent les arêtes d'un trièdre de façon que le point de contact du plan avec son enveloppe soit toujours au centre de gravité des masses m_1, m_2, m_3 placées aux trois sommets* A, B, C. A. Pellet.

Solution

Par M. M. Faucheux.

Prenons les arêtes pour axes de coordonnées; soit

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{1}$$

l'équation du plan variable. a, b, c sont fonctions de deux paramètres. Nous pouvons supposer c fonction de a et de b.

Pour trouver le point de contact avec l'enveloppe, il faut y joindre les deux équations obtenues en dérivant successivement par rapport à a et b

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial c}{\partial a}=0,\\ &\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial c}{\partial b}=0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et le système (2) doit être vérifié pour

$$(3)\quad x = \frac{m_1 a}{m_1+m_2+m_3},\quad y = \frac{m_2 b}{m_1+m_2+m_3},\quad z = \frac{m_3 c}{m_1+m_2+m_3},$$

ce qui fournit les conditions

$$\frac{m_1}{a} + \frac{m_3}{c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0,$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m_1}{a} + m_3 \dfrac{\partial \operatorname{Log} c}{\partial a} = 0, \\ \quad\text{et} \\ \dfrac{m_2}{b} + m_3 \dfrac{\partial \operatorname{Log} c}{\partial b} = 0; \end{array}\right.$$

a, b, c sont liés par la relation

$$m_1 \frac{da}{a} + m_2 \frac{db}{b} + m_3 d \operatorname{Log} c = 0,$$

$$a^{m_1} b^{m_2} c^{m_3} = \text{const.}$$

Pour trouver l'équation de l'enveloppe, il suffit d'éliminer a, b, c entre les équations (3) et cette équation.

L'équation cherchée est

$$x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3} = k,$$

k étant une constante arbitraire.

L'équation montre que toutes les surfaces sont homothétiques par rapport à l'origine, ce qu'il était facile de prévoir.

Autre solution par M. L. Poli.

2295.

(1916, p. 400.)

La somme des carrés, la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres impairs *sont données par les formules suivantes :*

$$S_2 = \frac{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}{1.2.3},$$

$$S_3 = S_1 \times (2n^2 - 1),$$

$$5S_4 = S_2 \times (12n^2 - 7);$$

pour $n = 5k \pm 1$, S_4 *est divisible par* S_2.

G. Fontené.

SOLUTION

Par M. R. Massart.

Dans la formule

$$\begin{aligned}\Sigma_{m-1} = n^{m-1} + {} & \left(\frac{n^m - 1}{m} - \frac{m-1}{2}\right)(\Sigma_{m-2} - n^{m-2}) \\ & - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\Sigma_{m-3} - n^{m-3}) \\ & - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(\Sigma_{m-4} - n^{m-4}) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

permettant d'obtenir les sommes des puissances entières successives des n premiers nombres naturels, faisons successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$; nous trouvons

$$\Sigma_0 = n,$$

$$\Sigma_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3},$$

$$\Sigma_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\Sigma_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

La somme S_2 des carrés des n premiers nombres impairs étant égale à

$$S_2 = \sum_1^n (2n-1)^2 = 4\sum_1^n n^2 - 4\sum_1^n n + \sum_1^n 1,$$

vaut donc

$$\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{2n(4n^2-1)}{1.2.3} = \frac{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}{1.2.3}.$$

On trouve de même

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_1^n (2n-1)^3 \\
&= 8\sum_1^n n^3 - 12\sum_1^n n^2 + 6\sum_1^n n - \sum_1^n 1 \\
&= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n \\
&= 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1) = S_1 \times (2n^2-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_1^n (2n-1)^4 \\
&= 16\sum_1^n n^4 - 32\sum_1^n n^3 + 24\sum_1^n n^2 - 8\sum_1^n n + \sum_1^n 1 \\
&= \frac{8n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15} - 8n^2(n+1)^2 \\
&\quad + 4n(n+1)(2n+1) - 4n(n+1) + n \\
&= \frac{48n^5 - 40n^3 + 7n}{15} = \frac{n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)}{15} \\
&= S_2 \times \frac{1}{5}(12n^2-7),
\end{aligned}$$

d'où

$$5S_4 = S_2 \times (12n^2 - 7).$$

De cette dernière relation il résulte que S_4 est divisible par S_2 quand la fraction $\frac{12n^2-7}{5}$ est entière, ce qui a lieu dès que $n = 5k \pm 1$, ainsi que l'indique le développement

$$\frac{12(25k^2 \pm 10k + 1) - 7}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{12(25k^2 \pm 10k) + 5}{5}.$$

Autres solutions par E.-N. Barisien et par MM. J. Bouchary, Chalde et L. Poli.

2296.

(1916, p. 478.)

Étant donnés une ellipse E *de foyers* F, F′ *et un point* M *de son plan qui se projette en* P *et* Q *sur les axes; si* T_1, T_2 *sont les points de contact des tangentes à* E *issues de* M, *et* N_1, N_2, N_3, N_4 *les pieds des normales à* E *issues du même point* M, *les onze points suivants*

$$M, \quad P, \quad Q, \quad F, \quad F', \quad T_1, \quad T_2, \quad N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad N_4$$

sont situés sur une même strophoïde oblique dont le point double est en M. *Cette strophoïde reste la même pour une autre ellipse de foyers* F *et* F′.

Les foyers imaginaires de E *sont aussi situés sur cette strophoïde.* E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. G. Boulloud.

Si l'on cherche le lieu des points de contact des coniques homofocales à E avec les tangentes issues de M, on trouve une strophoïde. En effet, sur une droite Δ issue de M, il existe un seul point du lieu qui s'obtient, par la conique du faisceau, tangente à Δ. De plus, par le point M passent deux coniques, homofocales à E et qui sont orthogonales; le point M est donc un point double à tangentes rectangulaires. Le lieu cherché passe également par les points cycliques, car ceux-ci font partie du faisceau. Ce lieu est donc une cubique circulaire ayant un point double à tangentes rectangulaires, c'est-à-dire une strophoïde.

D'après ce qui précède, elle passe par les foyers réels ou imaginaires de E et par les points M, T_1 et T_2. Il est facile de montrer qu'elle passe par les pieds N_1, N_2, N_3 et N_4 des normales issues de M puisque l'un d'eux, N_1 par exemple, est le point de contact de MN_1 avec la conique du faisceau, autre que E, passant par N_1 et orthogonale à cette dernière.

On voit également que l'un P des deux autres points (P et Q) est le point de contact de MP avec la conique du faisceau passant en P.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, Vinciguerra et un Abonné.

2297.

(1916, p. 478.)

Soient T_1, T_2, T_3 *les trois points de contact des tangentes menées d'un point* M *à une cardioïde dont le point de rebroussement est* O. *Le lieu du point* M *tel que les droites* OT_1, OT_2, OT_3 *et la tangente de rebroussement forment un faisceau harmonique est une quartique.*

E.-N. Barisien.

Solution

Par un Abonné.

Soient
$$(x^2+y^2-2ax)^2-4a^2(x^2+y^2)=0$$

l'équation de la cardioïde et

$$x=\frac{4a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y=\frac{8a\lambda}{(1+\lambda^2)^2}$$

les coordonnées d'un de ces points en fonction d'un paramètre variable λ.

L'équation d'une tangente à la courbe est

$$(3\lambda^2-1)x+\lambda(\lambda^2-3)y+4a-x=0;$$

ou bien, en l'ordonnant par rapport à λ,

$$\lambda^3y+3\lambda^2x-3\lambda y+4a-x=0.$$

Différentions cette équation par rapport à λ, nous obtenons
$$\lambda^2y+2\lambda x-y=0.$$

qui représente évidemment le rayon vecteur du point de contact de la tangente avec la cardioïde. Le coefficient angulaire de ce rayon vecteur est donc égal à $\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$. Si on le désigne par μ et si l'on élimine λ entre les deux équations

$$\lambda^3y+3\lambda^2x-3\lambda y+4a-x=0,$$
$$\lambda^2\mu+2\lambda-\mu=0,$$

on obtient l'équation qui donne les coefficients angulaires des trois droites OT_1, OT_2, OT_3.

Cette élimination ne donne lieu à aucune difficulté spéciale et l'on arrive à l'équation

$$(1)\quad (x^2-y^2+4ax+4a^2)\mu^3 \\ -6xy\mu^2-3(x^2-y^2-4ax)\mu-2y(4a-x)=0.$$

Il faut maintenant exprimer que les trois racines μ_1, μ_2, μ_3 de cette équation et la valeur $\mu=0$, correspondant à la tangente de rebroussement, forment une proportion harmonique, ce qui s'exprime par

$$\frac{2}{\mu_1}=\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu^3};$$

ou bien par

$$\frac{2}{\mu_1}=\frac{\mu_2+\mu_3}{\mu_2\mu_3}=\frac{\mu_1(\mu_1+\mu_2+\mu_3-\mu_1)}{\mu_1\mu_2\mu_3};$$

ou enfin

$$\mu_1^3-\mu_1^2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)+2\mu_1\mu_2\mu_3=0.$$

Remplaçant les fonctions symétriques $\mu_1+\mu_2+\mu_3$ et $\mu_1\mu_2\mu_3$ par leurs valeurs tirées de l'équation (1) ci-dessus, on voit que μ_1 doit être racine de

$$(2)\quad (x^2-y^2+4ax+4a^2)\mu^3-6xy\mu^2+4y(4a-x)=0.$$

Retranchant (2) de (1), on a

$$\mu=-\frac{2y(4a-x)}{x_2-y_2-4ax}.$$

Substituant cette valeur dans (2), on obtient pour équation du lieu cherché

$$2y^2(4a-x)^2(x^2-y^2+4ax+4a^2) \\ +6xy^2(4a-x)(x^2-y^2-4ax)-(x^2-y^2-4ax)^3=0,$$

équation d'une sextique qui ne paraît pas décomposable.

2298.

(1916, p. 479.)

Étant donnés une parabole et un de ses points M, *on mène en ce point la normale qui coupe à nouveau la* *courbe en* M_1 *et son axe en* N. *Démontrer géométriquement :*

1° *Que le point* M *et le pôle* P *de* MM_1, *par rapport à la parabole, sont équidistants de la directrice;*

2° *Que la perpendiculaire élevée en* N *à* MM_1 *et la perpendiculaire abaissée de* M *sur l'axe se coupent sur le diamètre du point* P. F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient Δ la directrice, F le foyer, T le point où la tangente en M rencontre Δ, M' le point où MF recoupe la courbe. La droite TM' est tangente en M' à la parabole et est parallèle à MM_1; le point P est donc à l'intersection de MT et du diamètre du point M'. Comme M'M et M'P sont symétriques par rapport à M'T, les points M et P sont symétriques par rapport à T et, par suite, équidistants de Δ.

Désignons par Q et Q' les projections de M et M' sur Δ, et par R le point où la parallèle menée par M à Δ coupe la perpendiculaire élevée en N sur MN; les triangles rectangles QFQ', MNR sont égaux. Par suite, Q'R est parallèle à FN et le point R appartient au diamètre de P.

Autres solutions par MM. G. BOULLOUD, R. BOUVAIST, X. CHAPUIS, M. FAUCHEUX et J. LEMAIRE.

2299.

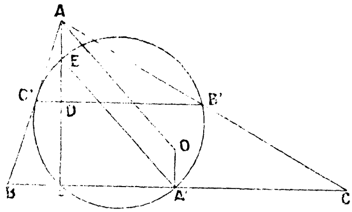
(1916, p. 479.)

Soient ABC *un triangle,* O *le centre du cercle circonscrit,* α *le pied de la hauteur issue du sommet* A *sur* BC. *On considère la parabole ayant pour foyer* α *et pour directrice* OA, *et les deux autres paraboles analogues. Démontrer que ces trois paraboles ont trois tangentes communes (en dehors de la droite de l'infini) et trouver ces tangentes.* F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle, D et E les points où $A\alpha$ coupe la droite B'C' et le cercle circonscrit à A′B′C′; on sait que la droite de Simpson relative à ce triangle et au point α du cercle est la parallèle menée par D à A′E; mais D est le milieu de αA, et A′E est parallèle à OA;



cette droite de Simpson étant la tangente au sommet de la parabole inscrite à A′B′C′ et de foyer α, celle-ci n'est autre que la parabole ayant α pour foyer et OA pour directrice : cette parabole et les deux paraboles analogues sont donc tangentes aux trois droites joignant deux à deux les milieux des côtés du triangle donné.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, H. Brocard, X. Chapuis et L. Poli.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par *E. Picard*, membre de l'Institut. In-8°, Tome IV; VI-596 pages, 2 planches (Paris, Gauthier-Villars, 1917); prix 25^{fr}.

Ém. Borel. — *Leçons sur les fonctions monogènes, uniformes d'une variable complexe*, rédigées par G. Julia. In-8°, XII-166 pages (Paris, Gauthier-Villars, 1917); prix $7^{\text{fr}},50$.

[I 19 c]

SUR UNE CATÉGORIE D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES N'AYANT EN NOMBRES ENTIERS QU'UN NOMBRE FINI DE SOLUTIONS ;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. On connaît actuellement des catégories étendues d'équations indéterminées (*voir* notre Note des *Nouvelles Annales*, août 1916),

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

à coefficients entiers de degré quelconque, qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers x, y. Mais il ne semble pas qu'on se soit beaucoup préoccupé de donner un moyen réellement pratique d'avoir une limite supérieure du module de ces solutions, en vue, par exemple, de permettre la résolution complète de (1) par un nombre limité d'essais directs.

C'est ce problème que nous allons étudier pour les équations (1) de la forme

$$F(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0 = 0, \tag{2}$$

où φ_s est un polynome homogène et de degré s à coefficients entiers réels; on suppose que les directions asymptotiques sont distinctes [1], aucune n'étant pa-

[1] Le cas où une des directions asymptotiques est parallèle à l'un des axes se ramène au cas où il en est autrement par un changement de variables linéaire à coefficients entiers et de déterminant égal à 1. On peut d'ailleurs le traiter directement d'une manière analogue.

rallèle aux axes, en sorte que φ_n possède un terme en x^n et un en y^n, et de plus que

$$\varphi_n = A(y - c_1 x)\ldots(y - c_k x)\psi_{n-k}(x, y), \qquad 0 \leqq k \leqq n,$$

$c_1, \ldots, c_k$ étant des nombres réels, $\neq 0$, rationnels et distincts, tandis que l'équation $\psi_{n-k}\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = 0$ a $n - k$ racines imaginaires toutes finies, $\neq 0$ et distinctes. On sait, en effet, et on le vérifiera tout à l'heure, que les équations (2) de ce type n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers. On peut d'ailleurs supposer l'équation (2) irréductible.

Rappelons que la courbe (2) en coordonnées cartésiennes rectangulaires possède k asymptotes réelles non parallèles aux axes

$$(3) \qquad y = c_i x + d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

avec

$$d_i = -\frac{\varphi_{n-1}(1, c_i)}{\varphi'_n(1, c_i)}, \qquad \varphi'_n(1, c_i) = \frac{d}{dc_i}\varphi_n(1, c_i),$$

d_i étant fini, et, ici, rationnel.

Pour les valeurs de x dont le module est assez grand, les points réels x, y de la courbe (2) sont dans le voisinage d'une des asymptotes (3); occupons-nous d'abord de ces points.

Soit c une des quantités $c_1, \ldots, c_n$. Je pose

$$(4) \qquad t = \frac{y}{x} = c + \frac{d + \varepsilon}{x},$$

$$f_n(t) = \varphi_n(1, t), \qquad f'_n(t) = \varphi'_n(1, t), \qquad f_{n-1}(t) = \varphi_{n-1}(1, t),$$

$$f_n(c) = 0, \qquad d = -\frac{\varphi_{n-1}(1, c)}{\varphi'_n(1, c)} = -\frac{f_{n-1}(c)}{f'_n(c)},$$

$$(5) \qquad F(x, y) = x^n f_n(t) + x^{n-1} f_{n-1}(t) + Bx^{n-2}.$$

On a

$$f_n(t) = f_n(c) + \frac{d+\varepsilon}{x} f'_n(c) + \left(\frac{d+\varepsilon}{x}\right)^2 \mathrm{R},$$

$$f_{n-1}(t) = f_{n-1}(c) + \frac{d+\varepsilon}{x} \mathrm{S},$$

$$\mathrm{F}(x, y) = x^n f_n(c) + x^{n-1}[(d+\varepsilon) f'_n(c) + f_{n-1}(c)] \\ + x^{n-2}[(d+\varepsilon)^2 \mathrm{R} + (d+\varepsilon)\mathrm{S} + \mathrm{B}] = 0,$$

R, S étant des polynomes en $\left(\frac{d+\varepsilon}{x}\right)$, B un polynome en $\frac{1}{x}$ et $\frac{d+\varepsilon}{x}$, ou

$$\mathrm{F}(x, y) = x^{n-1} \varepsilon f'_n(c) + x^{n-2}[(d+\varepsilon)^2 + (d+\varepsilon)\mathrm{S} + \mathrm{B}] = 0,$$

ou encore, si C représente le coefficient de x^{n-2} dans le second membre,

$$(6) \qquad \psi(\varepsilon) = \varepsilon f'_n(c) + \frac{\mathrm{C}}{x} = 0, \qquad \varepsilon + \frac{\mathrm{C}}{x f'_n(c)} = 0.$$

Soit

$$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{A}_0 y^n + \mathrm{A}_1 y^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n,$$

où A_i est un polynome en x de degré $\leqq i$; les points réels de la courbe situés sur l'asymptote $y = cx + d$ satisfont à $\varepsilon = 0$ ou à

$$\mathrm{A}_0(cx+d)^n + \mathrm{A}_1(cx+d)^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

équation qui est de la forme

$$(7) \qquad \mathrm{D}_0 x^{n-2} + \mathrm{D}_1 x^{n-3} + \ldots + \mathrm{D}_{n-2} = 0.$$

Cette équation, où l'on suppose les D_i entiers, n'a pas lieu identiquement, sans quoi l'asymptote ferait partie de la courbe (2), et F ne serait pas irréductible.

Dès lors, $|\mathrm{D}_{n-2}|$ est une limite supérieure du module des racines *entières* réelles de (7). Si l'on envisage successivement les k asymptotes réelles, soit Δ une limite supérieure $> |\mathrm{D}_{n-2}|$ des quantités $|\mathrm{D}_{n-2}|$

correspondantes : pour $|x| \geqq \Delta$, la courbe n'a aucun point entier (c'est-à-dire à coordonnées entières) sur une asymptote.

Soit maintenant $|x| \geqq \Delta$: pour les valeurs entières de x et y qui satisfont à cette condition et à l'équation (2),

$$(7\ bis) \qquad \varepsilon = y - cx - d = \frac{M}{N}, \qquad N > 0, \qquad M \neq 0,$$

où M, N sont des entiers premiers entre eux, N ne dépendant que des dénominateurs des fractions irréductibles égales à c et d. On a donc

$$|\varepsilon| \geqq \frac{1}{N}.$$

Supposons alors que nous ayons pu trouver une limite inférieure $\Delta_1 \geqq \Delta$ de $|x|$ telle que pour les valeurs de $x| \geqq \Delta_1$ les deux quantités $\psi\left(\frac{1}{N}\right)$ et $\psi\left(-\frac{1}{N}\right)$ soient $\neq 0$ et de signes contraires : l'équation (6) en ε possédera une racine de module $< \frac{1}{N}$ à laquelle correspondra un point x, y de la courbe (2) à coordonnées non entières toutes deux, pour chaque valeur de $|x| \geqq \Delta_1$. Il suffira pour cela, d'après (6), que

$$(8) \qquad \frac{1}{N} > \left|\frac{C}{x f_n'(c)}\right|, \qquad \text{pour} \qquad x| \geqq \Delta_1, \qquad |\varepsilon| \leqq \frac{1}{N}.$$

Cherchons alors une limite supérieure de $|C|$, pour $|x| \geqq \Delta$, $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{N}$, en tenant compte de l'expression de C

$$C = (d+\varepsilon)^2 R + (d+\varepsilon) S + B.$$

R et S sont des polynomes de degré $n-2$ en $\frac{d+\varepsilon}{x}$; il est facile de trouver des limites supérieures de $|R|$

et $|S|$, par suite de $|C - B|$ quel que soit $|x| \geqq \Delta$ et $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{N}$; dans les mêmes conditions on obtient sans peine une limite supérieure de $|B|$, puisque

$$B = \varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) + \ldots, \qquad t = c + \frac{d+\varepsilon}{x};$$

on en conclut une limite supérieure Γ de $|C| < \Gamma$ applicable pour toutes les valeurs de $|x| \geqq \Delta$ et de $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{N}$. Il suffira de prendre $\Delta_1 \geqq \frac{N\Gamma}{|f'_n(c)|}$ pour que la condition (8) ait lieu; les racines c, étant rationnelles, se calculent par un procédé connu.

On opérera de même pour les k asymptotes. Soit ξ un nombre supérieur ou au moins égal aux k quantités Δ_1 correspondantes : pour toute valeur de $|x| \geqq \xi$, la courbe possède k points réels x, y non entiers. Il en est de même pour toute valeur de $|y| \geqq \eta$, η étant un nombre que l'on peut déterminer par la même méthode en intervertissant les rôles de x et de y, ou encore en remarquant que, si $|x| < \xi$, l'équation (2) en y a une limite supérieure du module de ses racines réelles η telle que $|y| < \eta$; par suite si $|y| \geqq \eta$, on a $|x| \geqq \xi$.

Il y aura toutefois à s'assurer que ces k points x, y sont distincts, lorsque $k > 1$. Soient alors

$$y = cx + d, \qquad y = c_1 x + d_1$$

deux asymptotes distinctes, et deux points correspondants parmi les k points précités, avec

$$y = cx + d + \varepsilon, \qquad y_1 = c_1 x + d_1 + \varepsilon_1;$$

on n'aura pas $y = y_1$ si

$$|c - c_1||x| > |\varepsilon_1| + |\varepsilon| + |d_1 - d|,$$

ou, *a fortiori*, si

$$|c - c_1||x| > \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} + |d_1 - d|.$$

Il suffira de choisir ξ de façon que, pour toutes les combinaisons deux à deux des quantités c, c_1, on ait, en outre des conditions déjà indiquées,

$$(9) \qquad |c - c_1|\xi > \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N} + |d_1 - d|, \qquad |x| \geqq \xi.$$

On supposera que cela ait été fait.

II. La question posée au début du n° I est complètement résolue quand $k = n$. Lorsque $k < n$, nous supposons que les $n - k$ racines imaginaires de $\psi_{n-k}(1, c) = 0$ sont distinctes. Soit c l'une d'elles,

$$c = \gamma + \delta i, \qquad d = \gamma' + \delta' i, \qquad \delta \neq 0.$$

Les formules (4) à (6) s'appliquent encore, et $y = cx + d$ est une asymptote imaginaire. Les points réels de la courbe situés sur cette asymptote satisfont à $\delta x + \delta' = 0$. Soit Δ' une limite supérieure des quantités $\left|\frac{\delta'}{\delta}\right|$, plus grande que chacune d'elles, pour les diverses asymptotes imaginaires (ou encore, si l'on y trouve avantage, une limite supérieure de ces quantités et de ξ). Pour $|x| \geqq \Delta'$, il n'y a aucun point réel sur les asymptotes imaginaires.

Dans (6), on a

$$(10) \qquad \varepsilon = e_1 + e_2 i = -\frac{C}{x f'_n(c)} = y - cx - d;$$

ε ne peut être réel pour un point (x, y) réel que si $-e_2 = \delta x + \delta' = 0$, ce qui est impossible quand $|x| \geqq \Delta'$; c'est ce que nous supposerons.

Nous envisagerons des limites supérieures $C_1 > |C|$ et $C'_1 > |C'|$ des modules de C et de sa dérivée C' par rapport à ε pour chaque valeur de x de module $\geqq \Delta'$ et pour les valeurs de ε de module $\leqq \rho$, ρ étant un nombre positif que l'on choisira convenablement dans chaque application : ces limites C_1, C'_1 sont faciles à déterminer.

Nous allons maintenant considérer une quantité δ_1 telle que

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \geqq \Delta', \qquad \delta_1 \geqq \dfrac{\lambda C_1}{\rho |f'_n(c)|}, \qquad \delta_1 \geqq \dfrac{\lambda C'_1}{|f'_n(c)|}, \\ \qquad\qquad \lambda \text{ nombre donné } > 2; \end{array} \right.$$

pour toute valeur de $|x| \geqq \delta_1$, l'équation (10) en ε a, comme nous allons le montrer, une racine, forcément imaginaire, de module $\leqq \rho$.

Soit l'intégrale

$$J = \int_K \frac{1 + \dfrac{C'}{x f'_n(c)}}{\varepsilon + \dfrac{C}{x f'_n(c)}} d\varepsilon$$

prise dans le plan complexe des ε le long d'une circonférence K de rayon ρ ayant pour centre l'origine. On sait que $\dfrac{J}{2\pi i}$ est le nombre des racines de cette équation comprises dans le cercle K. Je dis que J est $\neq 0$. En effet, soient $X_1 + iY_1$ le numérateur, $\varepsilon(X + iY)$ le dénominateur; d'après (11), sur la circonférence,

$$|X_1 + iY_1| \geqq 1 - \frac{1}{\lambda}, \qquad |X + iY| \geqq 1 - \frac{1}{\lambda};$$

si $\varepsilon = \rho e^{i\varphi}$, $d\varepsilon = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$ sur la circonférence, on a

$$J = i \int_K \frac{X_1 + iY_1}{X + iY} d\varphi$$

et

$$X_1 \geqq 1 - \frac{1}{\lambda}, \qquad X \geqq 1 - \frac{1}{\lambda}, \qquad |Y_1| \leqq \frac{1}{\lambda}, \qquad Y \leqq \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{X_1 + iY_1}{X + iY} = \frac{XX_1 + YY_1 + i(XY_1 - YX_1)}{X^2 + Y^2},$$

et, puisque $\frac{J}{2\pi i}$ est réel,

$$\frac{J}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi} \int_K d\varphi \, \frac{XX_1 + YY_1}{X^2 + Y^2};$$

cette expression est $\neq 0$, car

$$XX_1 \geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2, \qquad |YY_1| \leqq \frac{1}{\lambda^2} \qquad \text{et} \qquad XX_1 > |YY_1|,$$

λ étant > 2. Les conditions (11) entraînent donc l'existence dans K d'une racine ε de (6) ou (10), au moins. A chaque asymptote imaginaire correspond ainsi une racine ε au moins de l'équation (10) correspondante.

Soient les deux asymptotes

$$y = cx + d, \qquad y = c_1 x + d_1,$$

et les équations (6) ou (10) correspondantes

$$y = cx + d + \varepsilon, \qquad y = c_1 x + d_1 + \varepsilon_1;$$

les points x, y correspondant à une même valeur de x sont distincts si

$$|c - c_1|\,|x| > |d - d_1| + |\varepsilon| + |\varepsilon_1|.$$

ou si

$$(12) \qquad |c - c_1|\,|x| > |d - d_1| + \rho + \rho_1$$

($|\varepsilon_1| \leqq \rho_1$, ρ_1 étant pour ε_1 la quantité analogue à ρ pour ε).

D'ailleurs le point x, y satisfaisant à (10) ne peut être réel que si

$$-e_2 = \delta x + \delta', \qquad |\delta|\,|x| \leqq |\delta'| + \rho,$$

c'est-à-dire si l'on n'a pas

(13) $$|\delta|\,|x| > |\delta'| + \rho.$$

Soit alors ξ_1 une valeur de $|x|$ qui satisfasse à la fois aux conditions (9), (11), (12) et (13) : pour toute valeur de x telle que

(14) $$|x| \geqq \xi_1,$$

la courbe (2) a k points réels non entiers et $n-k$ points imaginaires tous distincts deux à deux. On peut de même trouver un nombre η_1 tel que pour

(15) $$|y| \geqq \eta_1$$

la même propriété ait lieu. Finalement les points entiers de la courbe (2) sont tels que

(16) $$|x| < \xi_1, \qquad |y| < \eta_1.$$

Les calculs et les raisonnements se simplifieront notablement dans certains cas particuliers, par exemple si les asymptotes passent toutes par l'origine ($d = 0$), c'est-à-dire si, dans (2), $\varphi_{n-1}(x, y) = 0$. Nous allons le vérifier sur un exemple.

III. Envisageons l'équation indéterminée

(17) $$\begin{cases} y(y^2-1) - A x(x^2-1) = 0, \qquad A = \dfrac{\alpha^3}{\beta^3}, \\ \qquad\qquad \alpha,\ \beta \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

Les asymptotes ont pour équations

$$y = cx, \quad y = cjx, \quad y = cj^2x, \quad c = \frac{\alpha}{\beta}, \quad j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

On peut supposer $\alpha < \beta$, x et y positifs; alors on a les solutions évidentes $x = 0$ ou ± 1, $y = 0$ ou ± 1. Soit x et $y > 1$; on a $y < x$ et, comme on le voit directement, $x > 10$.

Considérons, pour chaque valeur de x, l'équation en y

$$y^3 - y - c^3(x^3 - x) = 0;$$

elle aura deux racines imaginaires dès que

$$27c^6(x^3 - x)^2 - 4 > 0,$$

ou, pour $x > 1$, dès que

$$(18) \qquad x^3 - x > \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\beta^3}{\alpha^3}.$$

Cette condition peut être remplacée par

$$(19) \qquad x \geqq \frac{\beta^2}{3\alpha}, \qquad x > 10,$$

comme on le vérifie facilement.

Donc, à chaque valeur de x positive satisfaisant à (19) correspondent pour (17) deux valeurs imaginaires de y. Nous n'envisagerons que des valeurs de x vérifiant les inégalités (19).

D'autre part, l'équation (6) en ε, pour l'asymptote réelle, avec $f'_n(c) = 3c^2$, est

$$(cx + \varepsilon)^3 - (cx + \varepsilon) - c^3x^3 + c^3x = 0,$$

ou

$$3c^2x^2\varepsilon = (c - c^3)x + \varepsilon - 3cx\varepsilon^2 - \varepsilon^3,$$

ou

$$\varepsilon = -\frac{C}{3c^2x} = \frac{c - c^3 + \dfrac{\varepsilon - \varepsilon^3}{x} - 3c\varepsilon^2}{3c^2x}.$$

Ici, $\Delta = 1$, $N = \beta$. Il nous suffit, dans l'application de l'inégalité (8), d'envisager des valeurs de x satisfaisant à (19). De plus, ε, n'ayant alors qu'une valeur réelle, qui ne peut s'annuler pour $x > 0$, puisque l'asymptote réelle coupe la courbe à l'origine, a le le même signe que pour les valeurs de x assez grandes, c'est-à-dire le signe $+$. On pourra donc prendre ici

$$c - c^3 + \frac{\varepsilon - \varepsilon^3}{x} - 3c\varepsilon^2 \leqq c - c^3 + \frac{\varepsilon}{x} - 3c\varepsilon^2 < c = \frac{\alpha}{\beta} = \Gamma,$$

car

$$3c\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{x} + c^3 \geqq 3c\varepsilon^2 - 3c^2\varepsilon + c^3 = c^3\left(3\frac{\varepsilon^2}{c^2} - 3\frac{\varepsilon}{c} + 1\right) > 0,$$

$$\xi = \Delta_1 \geqq \frac{N\Gamma}{|f'_n(c)|} = \frac{\alpha}{3c^2} = \frac{\beta^2}{3\alpha}.$$

Finalement, quand $\beta = 2$, l'équation (17) n'a d'autres solutions en entiers que les solutions banales qui correspondent à x et y égaux à 0 ou ± 1 ; il en est de même quand $\beta > 2$, sauf peut-être pour les solutions qui satisferaient à $11 \leqq x < \frac{\beta^2}{3\alpha}$.

Corrélativement, on voit de suite que les valeurs de y correspondant à ces solutions possibles sont plus petites que $\frac{\beta+1}{3}$, avec $\beta > 2$.

En se basant sur ces conditions

$$(20) \qquad 11 \leqq x < \frac{\beta^2}{3\alpha}, \qquad 2 \leqq y < \frac{\beta+1}{3}, \qquad 2 < \beta,$$

on peut obtenir une série de cas où il n'y a certainement d'autres solutions que les solutions banales indiquées, en remarquant que

$$x(x^2-1) = \lambda\beta^3, \qquad y(y^2-1) = \lambda\alpha^3 :$$

1° Cas où β impair divise un des nombres x, $x-1$,

$x+1$, comme il arrive quand β est premier impair :

$$x \geqq \beta^3 - 1, \qquad \text{d'où} \qquad \beta^3 - 1 < \frac{\beta^2}{3\alpha},$$

ce qui est impossible;

2° Cas où α impair divise un des nombres y, $y-1$, $y+1$ (exemple, α premier impair) :

$$y \geqq \alpha^3 - 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\beta+1}{3} > \alpha^3 - 1;$$

si cette condition n'a pas lieu, il n'y a que les solutions banales précitées;

3° On trouvera de même des conditions relatives à β, soit quand $\beta = \beta_1 \beta_2$, ou $\beta = \beta_1 . \beta_2 . \beta_3$, β_1, β_2, β_3 étant des nombres premiers impairs distincts, soit quand $\beta = 2^\mu . \beta_1$, avec $\mu > 0$, β_1 premier impair; $11 < \frac{\beta^2}{3\alpha}$ est déjà une condition de même nature;

4° On n'a que les solutions banales précitées quand $\beta \leqq 8$ [1].

Remarque. — On pourrait étudier par des procédés analogues les équations indéterminées de degré n

$$f(y) = c^n f(x),$$

où manquent les termes de degré $n-1$ en x et y; mais je ne veux pas insister à ce sujet.

---

[1] Le n° III constitue une réponse partielle à la question 4597 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1915, p. 267).

[K¹2e]

DEUX THÉORÈMES DE MM. LEMOYNE ET FONTENÉ SUR L'ORTHOPOLE ;

PAR M. V. THÉBAULT.

Nous nous proposons de donner une solution élémentaire du théorème fondamental de M. T. Lemoyne sur l'orthopôle d'une droite Δ par rapport à un triangle ABC (¹) et de généraliser celui de M. Fontené (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 56).

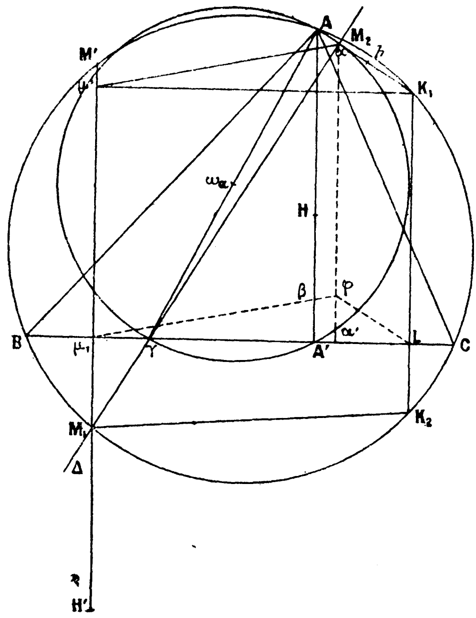
1. M. T. Lemoyne (*Nouvelles Annales*, 1904, p. 400) énonce sans démonstration le théorème suivant :

Les axes radicaux des cercles podaires de chacun des points d'une transversale Δ, *par rapport à un triangle* ABC, *passent par un point fixe* φ; ce qui revient à dire que φ *a même puissance par rapport à tous ces cercles. Lorsque* Δ *coupe le cercle* ABC, *en deux points* M_1, M_2, *les droites de Simson de* M_1 *et* M_2 *se rencontrent au point* φ.

Nous avons démontré en la généralisant la deuxième partie de cette proposition (*Bulletin de Mathéma-*

(¹) Une élégante démonstration de ce théorème, la seule qui, croyons-nous, soit parue aux *Nouvelles Annales*, a été donnée par M. R. Bouvaist (1915, p. 558). — *Voir* aussi une démonstration analytique de M. Neuberg : *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910).

tiques élémentaires, 1910, p. 261, et *Nouvelles Annales*, 1915, p. 221). Considérant le cas où Δ est un diamètre du cercle circonscrit O au triangle ABC, nous avons remarqué que par l'orthopôle φ de Δ passe



une troisième droite de Simson relative au triangle ABC, celle du point K symétrique de l'orthocentre H de ABC par rapport à φ.

Cette droite est du reste l'axe de la parabole de foyer φ et de directrice Δ. On arrive à ce résultat en montrant que la droite de Simson du point K', diamétralement opposé au point K sur le cercle O, est parallèle à Δ.

Plus généralement, Δ *étant une sécante quelconque qui rencontre le cercle* O *en* M_1 *et* M_2, *la perpendi-*

culaire de A *sur* Δ *coupe* O *en* K_1, *la perpendiculaire* K_1K_2 *à* BC *rencontre* O *en* K_2. *La droite de Simson de* K_2, *par rapport à* ABC, *passe au point de concours des droites de Simson de* M_1 *et* M_2, *c'est-à-dire à l'orthopôle* φ *de* Δ.

Soient L le pied de la perpendiculaire K_1K_2 sur BC, α la projection de A sur Δ, φ l'intersection de la parallèle $L\varphi$ à $A\alpha$ avec la perpendiculaire $\alpha\alpha'$ à BC (*voir* la figure).

$L\varphi$ est la droite de Simson de K_2 par rapport à ABC.

Traçons la perpendiculaire $M_1\mu_1\mu'_1$ à BC, μ'_1 étant sur la parallèle $K_1\mu'_1$ à BC;

$$\alpha\varphi = K_1L = \mu_1\mu'_1,$$

et $\mu_1\varphi$ est égal et parallèle à $\mu'_1\alpha$,

Les quatre points M_1, μ'_1, α, K_1 étant concycliques, $\mu'_1\alpha$ et $M'A$ sont antiparallèles à M_1K_1 par rapport à $M_1\mu'_1$ et AK_1 et par suite parallèles entre elles.

Si H' est l'orthocentre du triangle BM_1C, on a facilement

$$\mu_1H' = \mu_1M', \qquad M_1H' = AH;$$

d'où

$$\mu_1M_1 = \mu_1H' - M_1H' = \mu_1M' - AH = H\beta,$$

et $M_1\mu_1H\beta$ étant un parallélogramme, $\mu_1\varphi$ est la droite de Simson de M_1 par rapport à ABC.

De même $\mu_2\varphi$ est la droite de Simson de K_2 par rapport à ABC.

Par suite, φ point de la droite de Simson de M_2 est aussi l'intersection des droites de Simson de M_1 et M_2, c'est-à-dire l'orthopôle de Δ.

2. Désignons par δ_1, δ_2, δ_3 les angles de $L\varphi$ respectivement avec AB, BC, CA.

Le parallélisme de AK_1 et $L\varphi$ donne

$$(K_1A, AB) = (\varphi L, AB) = \delta_1;$$

de même

$$\widehat{K_1BC} = \widehat{K_1AC} = (\varphi L, AC) = \delta_3.$$

Or

$$(1) \qquad \varphi\alpha = K_1L = \frac{K_1B \times K_1C}{2R} = 2R \sin\delta_1 \sin\delta_3.$$

Le cercle ω_a de diamètre $A\gamma$ passe en α et A', pied de la hauteur AA' de ABC; soit α' l'intersection de ω_a et de $\alpha\varphi$. Ce cercle ω_a ayant son centre sur la droite des milieux de AB et AC, le quadrilatère $AA'\alpha'\alpha$ est un trapèze isoscèle.

Alors on obtient sans difficulté

$$(2) \qquad \varphi\alpha' = (AK_1 - 2A\alpha) \sin\delta_2 = 2d \sin\delta_2,$$

d étant la distance du centre O à la droite Δ, car h étant l'orthocentre du triangle $K_1M_1M_2$, c'est-à-dire le symétrique de A par rapport à Δ,

$$2d = hK_1 = AK_1 - 2A\alpha.$$

Appelons d' la distance de φ à Δ,

$$d' = \varphi\alpha \sin\delta_2 = 2R \sin\delta_1 \sin\delta_3 \sin\delta_3.$$

Cette valeur remarquable donne aussitôt la formule

$$d' = 2R \cos\Delta_1 \cos\Delta_2 \cos\Delta_3$$

donnée par M. J. Neuberg : *Sur les cercles podaires relatifs à un triangle fixe* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910, p, 5). Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les angles de Δ avec AB, BC, CA, angles complémentaires de δ_1, δ_2, δ_3.

Enfin les relations (1) et (2) donnent l'expression de la puissance de φ dans le cercle ω_a :

$$\varphi\alpha.\varphi\alpha' = 4Rd \sin\delta_1 \sin\delta_2 \sin\delta_3 = 2dd'.$$

La symétrie de ce résultat montre que *l'orthopôle* φ *est le centre radical des trois cercles* ω_a, ω_b, ω_c *qui ont pour diamètres respectifs les droites qui joignent les sommets* A, B, C *aux intersections de* Δ *avec* AB, BC, CA.

3. Soient S un point quelconque de Δ; DEF le triangle podaire de ce point par rapport à ABC; M l'intersection de SD avec la parallèle AM à BC; α la projection orthogonale de A sur Δ; AO rencontre Δ en R_a dont les projections sur AB et CA sont U_a, V_a.

Les cercles $AMD\alpha$ et $AU_a\alpha V_a$, de diamètres respectifs AS et AR_a, donnent

$$\widehat{E\alpha F} = \widehat{U_a\alpha V_a} = 180^\circ - \widehat{A},$$

et EF, U_aV_a sont tangentes à une parabole de foyer α, conique qui, visiblement, est tangente aussi aux côtés AB et CA.

Appelons alors P_a l'intersection des tangentes EF et U_aV_a :

$$\widehat{\alpha EC} = \widehat{\alpha P_a V_a}.$$

Or, dans le quadrilatère inscrit $AM\alpha E$,

$$\widehat{\alpha EC} = \widehat{\alpha MA};$$

d'où

$$\widehat{\alpha MA} = \widehat{\alpha P_a V_a},$$

et αM *passe au point d'intersection* P_a *de* EF *et* U_aV_a.

Dans le cercle DEF,

$$DP_a.P_aK = EP_a.P_aF.$$

Or, dans le cercle AEαFM, de diamètre AS,

$$MP_a.P_a\alpha = EP_a.P_aF = DP_\alpha.P_aK.$$

Le quadrilatère MDαK est alors inscriptible; le centre du cercle est situé sur la perpendiculaire à MD en son milieu, c'est-à-dire sur la droite B_1C_1 des milieux de BC et CA.

Soit α' le symétrique de α par rapport à B_1C_1. Le cercle de diamètre AQ, Q étant l'intersection de BC et Δ, contient α et α'. De plus, α' est un point du cercle MDαK.

Donc

$$D\varphi.\varphi K = \alpha\varphi.\varphi\alpha' = 2\,dd' = \text{const.}$$

et le théorème fondamental de M. Lemoyne sur l'orthopôle est établi.

4. A propos de deux théorèmes de M. Fontené, nous avons donné dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 498) une démonstration simple de la construction de l'orthopôle d'un diamètre OS du cercle circonscrit O par rapport à un triangle ABC.

La précédente figure va nous permettre d'étendre cette détermination de l'orthopôle φ au cas le plus général d'une droite *quelconque* Δ du plan du triangle ABC.

Considérons alors les groupes de cercles ω_1 et ω_2, ω_1 et ω_3, ω_2 et ω_3, respectivement circonscrits aux triangles DEF, AFE et MDαKα'.

Leurs axes radicaux, qui sont respectivement EF, Dφ, αM, se coupent en un même point, intersection de EF et αM, c'est-à-dire P_a.

D'où ce théorème général :

On donne un triangle ABC *et une droite* Δ *quel-*

conque de son plan. Les rayons AO, BO, CO *du cercle circonscrit au triangle rencontrent* Δ *en trois points* R_a, R_b, R_c, *dont les projections orthogonales sur les côtés adjacents sont* U_aV_a, U_bV_b, U_cV_c. *Soient* DEF *le triangle podaire d'un point* S *de* Δ *par rapport à* ABC; P_a, P_b, P_c, *les intersections respectives des droites* U_aV_a *et* EF, U_bV_b *et* FD, U_cV_c *et* DE. *Les trois droites* DP_a, EP_b, FP_c *concourent en un point* φ *orthopôle de* Δ *par rapport au triangle* ABC.

[L¹6b]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES;

Par M. J. LEMAIRE.

Il s'agit du théorème suivant :

M *désignant un point d'une conique* (E), ω *le centre de courbure en ce point, si une conique* (Σ) *passe aux foyers réels de* (E) *et a en* M, *avec* (E), *trois points communs confondus*, ω *est le pôle de* FF′ *par rapport à* (Σ).

Considérons d'abord une conique quelconque (S) passant en F, F′, et touchant (E) en M; les traces N et T de la normale et de la tangente en M sur l'axe focal de (E) étant conjuguées harmoniques par rapport aux foyers, MN est la polaire de T par rapport à (S), et le pôle P de FF′ est sur cette normale. On sait que si trois coniques ont deux points communs, les trois sécantes communes joignant deux à deux leurs autres points communs concourent; si donc Δ est la sécante commune à (S) et à (E) qui ne passe pas en M, cette droite coupe FF' en un point fixe T', quand (S) varie, M restant fixe; en considérant la conique particulière (S') bitangente à (E), on voit que T' est symétrique de T par rapport au centre O de (E).

Il suit de là que P et le point Q, où Δ coupe la normale MN, forment sur cette droite deux divisions homographiques, quand (S) varie, et la proposition sera établie si nous prouvons que ω et M *sont deux points homologues* de ces divisions.

Les coniques (S) réduites aux systèmes de droites MF et MF', MT et FF', donnent les points homologues M et D et le point double N, en appelant D le point commun à MN et à $\varphi\varphi'$, φ et φ' étant les seconds points où MF et MF' coupent (E). La conique (S'), tangente à (E) au point M' diamétralement opposé à M, donne le point à l'infini sur la normale et le point E où $T'M'$ coupe cette droite, de sorte que finalement tout revient à prouver que

$$(\omega MN\infty) = (MDNE)$$

ou

$$(\infty MN\omega) = (EDNM). \tag{1}$$

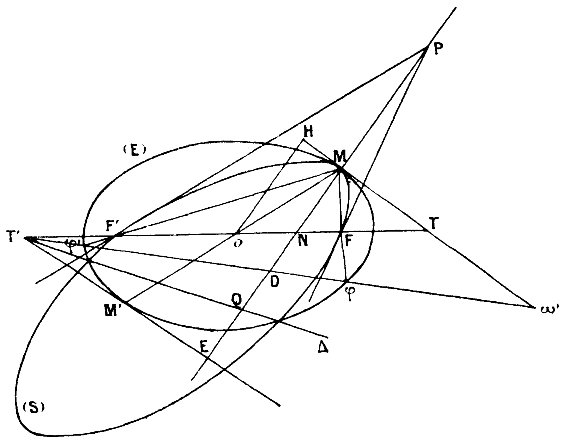
Soit ω' le point où $T'\varphi'\varphi$ coupe MT; d'après le théorème de Frégier généralisé, si deux cordes $M\varphi$, $M\varphi'$ d'une conique ont des directions symétriques par rapport à la normale en M, $\varphi\varphi'$ pivote autour du pôle de la normale : ω' est donc le pôle de MN par rapport à (E), c'est-à-dire le centre de courbure en M de la conique homofocale à (E) et passant en ce point. Considérant le faisceau (T′, EDNM), nous voyons que

$$(\mathrm{EDNM}) = (\infty\omega'\mathrm{TM})$$

et la relation (1) peut être remplacée par

$$(\infty\mathrm{MN}\omega) = (\infty\omega'\mathrm{TM});$$

cette dernière relation se déduit sans peine de la construction bien connue, due à Mannheim, des points ω et ω'; elle est aussi une conséquence du fait que ω et ω' sont les points où la normale et la tangente sont



touchées par la parabole tangente à ces droites et aux axes de la conique (E).

Autrement : quand (S) varie, le pôle P de FF′ et le centre de courbure C de cette conique en M forment sur la normale deux divisions homographiques, dont il suffit de montrer que ω est un point double. Considérant les mêmes coniques particulières que plus haut, nous avons en M un point double, en N et le point à l'infini sur la normale deux points homologues; de plus, P étant à l'infini pour la conique (S′), le point homologue est le centre de courbure μ de (S') en M, de sorte qu'il s'agit d'établir que

$$(\mathrm{MN}\infty\omega) = (\mathrm{M}\infty\mu\omega),$$

ou

$$\frac{\omega \mathrm{N}}{\omega \mathrm{M}} = \frac{\mu \mathrm{M}}{\omega \mathrm{M}},$$

ou

$$\omega \mathrm{N} = \mu \mathrm{M},$$

ou

$$\omega \mathrm{M} - \mathrm{NM} = \mu \mathrm{M};$$

α et β désignant les demi-axes de (S'), a et b ceux de la conique (E), nous avons

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

car le cercle de Monge de (S') est le cercle principal de (E); si θ est l'angle de OM avec la direction conjuguée, qui est la même pour (E) et pour (S'), on sait que

$$\omega \mathrm{M} = \frac{a'^2}{\mathrm{OM}.\sin\theta},$$

$$\mu \mathrm{M} = \frac{\alpha'^2}{\mathrm{OM}.\sin\theta},$$

a' et α' demi-diamètres conjugués de OM dans les deux coniques, et la relation à établir s'écrit

$$(2) \qquad \frac{a'^2 - \alpha'^2}{\mathrm{OM}.\sin\theta} = \mathrm{MN};$$

mais

$$a'^2 + \overline{\mathrm{OM}}^2 = a^2 + b^2,$$

et

$$\alpha'^2 + \overline{\mathrm{OM}}^2 = a^2,$$

d'où

$$a'^2 - \alpha'^2 = b^2,$$

et la relation (2) peut se mettre finalement sous la forme

$$b^2 = \mathrm{OH}.\mathrm{MN},$$

OH étant la distance du centre O à la tangente, et cette égalité exprime un théorème bien connu.

La propriété que nous venons de démontrer est vraie aussi, en vertu du principe de continuité, pour une conique (Σ') passant aux foyers imaginaires de (E) et ayant en M, avec (E), trois points communs confondus.

On en déduit la suivante : *Si du centre de courbure* ω *d'une conique en un point* M *on lui mène des tangentes, les points de contact, réels ou imaginaires, sont deux foyers d'une conique passant en* M *et ayant en ce point même cercle osculateur que la conique donnée.*

[F8 fβ]

CONDITION DE FERMETURE D'UNE SUITE DE CERCLES;

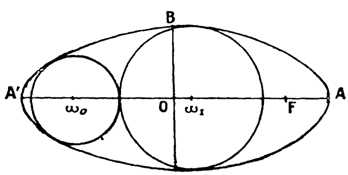
PAR M. G. FONTENÉ.

La courbe de la figure étant une ellipse, il existe, entre les cercles (ω) et (ω'), une relation doublement quadratique qui donne lieu au théorème suivant :

1. THÉORÈME. — *Étant donnée une ellipse, on considère une suite de cercles* (ω_0), (ω_1), (ω_2), ... *bitangents à l'ellipse, et ayant leurs centres sur l'axe focal, tels, en outre, que chacun d'eux soit tangent au précédent. Pour que cette suite se ferme* *avec p cercles, quel que soit le cercle* (ω_0), *il faut et il suffit qu'on ait*, F *étant un foyer et* B *un sommet du petit axe*,

$$\widehat{\mathrm{OFB}} = \frac{m\pi}{p} \qquad \left(\frac{m}{p} \text{ irréductible}\right).$$

Si p est pair, $p = 2q$, *le cercle* (ω_i) *et le cercle* (ω_{i+q}) *sont symétriques par rapport au centre de*



l'ellipse. (La figure est faite pour $p = 6$, $m = 1$.)

Si l'on désigne par α l'abscisse du centre de l'un des cercles, par ρ son rayon, on a d'abord

$$\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1,$$

et l'on peut poser

$$\alpha = c\cos\varphi, \qquad \rho = b\sin\varphi.$$

Si α', ρ' se rapportent à un cercle analogue, tangent au précédent, on aura (*en choisissant l'un des deux cercles possibles*)

$$\alpha' - \alpha = \rho' + \rho$$

ou

$$c(\cos\varphi' - \cos\varphi) = b(\sin\varphi' + \sin\varphi),$$

ou

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi' - \varphi}{2} = \frac{-b}{c} = -\operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

ou enfin

(α) $$\varphi' = \varphi - \omega.$$

On en déduit immédiatement

$$(1) \qquad \frac{\alpha_n}{c} = \cos(\varphi - n\omega),$$

$$(2) \qquad \frac{\rho_n}{b} = \sin(\varphi - n\omega),$$

avec

$$\tang\frac{\omega}{2} = \frac{b}{c},$$

$$\omega = 2\widehat{\mathrm{OFB}} = \widehat{\mathrm{BFB'}}.$$

Le cercle d'indice p se confondra avec le cercle d'indice zéro si l'on a

$$p\omega = 2m\pi,$$

$$\widehat{\mathrm{OFB}} = \frac{\omega}{2} = \frac{m\pi}{p},$$

comme on l'a annoncé.

Si p est pair, $p = 2q$, on aura, m étant impair,

$$\frac{\alpha_q}{c} = \cos(\varphi - q\omega) = \cos(\varphi - m\pi) = -\cos\varphi = -\frac{\alpha_0}{c},$$

où $\alpha_q = -\alpha_0$: le cercle (ω_i) et le cercle (ω_{i+q}) seront alors symétriques par rapport au centre de l'ellipse.

[En faisant varier le système des p cercles, il arrive un moment où le cercle α_0 a son centre en O; on a alors, avec $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\alpha_n = c\sin n\omega, \qquad \rho_n = b\cos n\omega.$$

Plaçons-nous dans le cas où p est pair, $p = 2q$. Si p est doublement pair, $q = 2r$, $p = 4r$, le cercle d'indice r est un cercle de rayon nul ayant son centre au foyer F, et le cercle d'indice $r + h$ se confond avec le cercle d'indice $r - h$. Si p est simplement pair,

$$q = 2s + 1, \qquad p = 2(2s + 1),$$

le cercle d'indice s est le cercle osculateur en A, le cercle d'indice $s+1$ se confond avec lui, et le cercle d'indice $s+1+h$ se confond avec le cercle d'indice $s-h$.]

Si l'on remplace l'axe focal par l'axe non focal, ou si l'on considère une hyperbole, les fonctions circulaires sont remplacées par des fonctions hyperboliques dont la période est imaginaire, et la fermeture du système n'est plus possible; l'énoncé ci-dessus le montre d'ailleurs.

2. *Si l'on développe les formules* (1) *et* (2), *on voit que* α_n *et* ρ_n *ne s'expriment pas en fonction algébrique de* n; *mais cela se produit par la parabole, qui offre un cas de dégénérescence des formules.*

La relation entre les rayons de deux cercles consécutifs est alors

$$\rho'-\rho=2p;$$

mise sous la forme $\rho'-p=\rho+p$, cette relation exprime que le point de contact des deux cercles est équidistant des cordes de contact de ces cercles avec la parabole. On peut regarder cette relation comme résultant de la décomposition d'une relation doublement quadratique

$$(\rho'-\rho)^2=4p^2.$$

Les rayons des cercles (ω) sont alors en progression arithmétique; on a les formules

$$\rho_n-\rho_0=2p.n,$$
$$\alpha_n-\alpha_0=\frac{1}{2p}(\rho_n^2-\rho_0^2)=2n(\rho_0+pn).$$

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand.** — *Sur la chaînette d'égale résistance.* — Dans son article *Sur les mouvements plans dans lesquels la tangente a une vitesse angulaire constante* (*N. A.*, 1917, p .361), M. Charles Michel a démontré un certain nombre de propriétés de la *chaînette d'égale résistance.* A ces propriétés on peut en ajouter quelques autres. Nous conservons les notations de la figure 2 de la page 367.

Soit P_1 la projection de P sur la droite MI_1 :

1° *La courbe décrite par* P_1 *est une développante de la courbe décrite par* P.

2° *La distance* MP_1 *est constante.*

3° *L'arc de la courbe* (P_1), *compté à partir du point correspondant au sommet de la chaînette, est égal à la distance de* M *à la tangente au sommet.*

La courbe (P_1) est la caustique par réflexion de la chaînette pour des rayons incidents parallèles à l'axe de la courbe.

Soit P′ la projection de I sur MI_1. La courbe (P′) possède les propriétés suivantes :

1° *Sa normale est la droite* P′P.

2° *Un arc quelconque est égal à l'arc correspondant de la chaînette.*

3° *Son rayon de courbure est égal à* $\frac{MI}{3}$.

M. **M.-F. Egan.** — *Au sujet de la question* 1914

(1901, p. 192; *voir* la solution, 1918, p. 146). — Le théorème de l'énoncé est un cas particulier du théorème de Kempe [1] : lorsqu'une figure plane invariable reprend sa position initiale, après avoir glissé sur son plan d'une façon quelconque comprenant une seule révolution complète, le lieu dans le plan mobile des points décrivant des courbes d'aire donnée est un cercle dont le centre C décrit la courbe d'aire minima. Encore, en désignant par (A) l'aire de la courbe décrite par le point A, on a

$$(\mathrm{A}) = (\mathrm{C}) + \pi \mathrm{CA}^2.$$

Dans le cas actuel, le centre C de l'ellipse décrit le même arc de cercle dans les deux sens, l'aire (C) est donc nulle. C est donc le centre des cercles dont il est question dans le théorème de Kempe, et l'on a

$$(\mathrm{A}) = \pi \mathrm{CA}^2.$$

M. L. **Poli**. — *Au sujet de la question* **1522** (1885, p. 56; 1916, p. 394). — Cette question, de Cesàro, est ainsi énoncée : *Le déterminant de* $(n-1)^2$ *éléments, dont l'élément général* $u_{i,j}$ *est égal au nombre des diviseurs communs de* $i+1$ *et* $j+1$, *représente la totalité des entiers non supérieurs à* n, *dépourvus de diviseurs carrés autres que l'unité.* Cette proposition me semble erronée. On la met en défaut en faisant $n=6$ et en formant le déterminant du cinquième ordre indiqué, qui ne vérifie pas l'énoncé.

---

[1] *Messenger of Mathematics*, 1878. — WILLIAMSON, *Integral Calculus*, 1896, p. 210.

M. L. **Poli**. — *Sur la question* **1522**, *de Cesàro* (1885, p. 56; 1916, p. 394). — L'énoncé semble erroné, car si l'on y remplace n par 6, le déterminant indiqué ne contient pas 5.

M. V. **Thébault**. — *Sur la question* **2353**. — Cette construction est depuis longtemps connue. *Voir* par exemple *N. A.*, 1858, p. 177; *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1879, p. 287; *Mathesis*, 1884, p. 42.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2230.

(1914, p. 432; 1915, p. 287.)

Déterminer les courbes planes (M), *telles que les droites joignant les différents points de* (M) *aux centres de courbure correspondants de la développée, soient parallèles entre elles.* F. Balitrand.

Solution
Par M. H. Brocard.

Soient NT le diamètre vertical d'un cercle TMN roulant sur une droite Ox horizontale; NT′ le diamètre vertical du cercle symétrique, tangent en N à Ox. Prenons sur la circonférence NT un point M, qui aura pour symétrique M′ sur la circonférence NT′.

On sait que M décrit une cycloïde ayant en M pour tangente MT et pour normale MN, qui, prolongée de longueur égale, donne en M′ le centre de courbure en M.

M′ appartient à la développée, ou à une cycloïde égale, et par la même construction, le centre de courbure I en M′ sera sur M′T′, en un point I symétrique de M′ par rapport à T′.

Par suite, IT′ est égal et parallèle à MT, et MI égal et parallèle à TT′ ou de direction constante (celle de la verticale).

La courbe (M) est donc la cycloïde. C'est ce que l'on pourra obtenir aussi par l'analyse.

En effet, d'après une formule connue, on a, pour une courbe quelconque,

$$R_{M'} = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2} R_M,$$

où

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \qquad r = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Mais, par la condition de l'énoncé, les deux rayons de courbure MM′, M′I, dirigés vers les points M′, I, donnent la relation

$$MM' \sin\delta + M'I \cos\delta = 0$$

avec

$$\tang\delta = p;$$

donc

$$R_M p + R_{M'} = 0$$

ou

$$\frac{R_{M'}}{R_M} = -p,$$

et alors l'équation différentielle de la courbe (M) sera

$$-pq^2 = 3pq^2 - r(1+p^2)$$

ou

$$4pq^2 = r(1+p^2),$$

dont l'intégrale première est

$$C(1+p^2)^2 = q$$

ou

$$R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{4a}{\sqrt{1+p^2}} = 4a\cos\delta,$$

propriété de la cycloïde dérivée du cercle de rayon a, et qui revient à

$$R_M = MM' = 2MN.$$

Autre Solution
Par M. R. Goormaghtigh.

Prenons pour axes mobiles Ox, Oy la tangente et la normale en un point de la développée d'une courbe (M) et désignons par s et ρ l'arc et le rayon de courbure de cette développée en ce point. La droite qui joint le centre de courbure de la développée au point de la courbe (M) correspondant à O fait avec Ox un angle φ tel que

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho}{s}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{\rho},$$

d'où successivement

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{s^2+\rho^2}{\rho^2 s^2} = \frac{1}{s^2}\left(s\frac{d\rho}{ds} - \rho\right),$$

$$\rho\, d\rho + s\, ds = 0, \qquad s^2 + \rho^2 = a^2.$$

Les courbes répondant à la question sont les cycloïdes.

2300.

(1916, p. 479.)

Un cercle mobile roule extérieurement sur un cercle fixe; chaque point du cercle mobile décrit une épicycloïde. Trouver le lieu des centres de courbure de ces épicycloïdes correspondant à une position déterminée du cercle mobile. F. Balitrand.

Solution

Par M. Ph. du Plessis.

Soient O et R le centre et le rayon du cercle fixe, ω et r ceux du cercle mobile; ces cercles se touchent au point I. La construction de Savary indique que, si P est le point diamétralement opposé au point M dans le cercle mobile, le centre de courbure C correspondant au point M est à la rencontre des droites OP et MI (*voir* la figure de la page 434 des *Nouvelles Annales* de 1915). Dans la Note à laquelle se réfère cette figure, M. d'Ocagne a remarqué que le triangle MIω coupé par la transversale OCP donnait

$$2\frac{R+r}{R}\frac{CI}{CM} = 1,$$

d'où se déduit

$$\frac{IC}{IM} = -\frac{R}{R+2r}.$$

Le lieu cherché, qui est celui du point C, est donc le cercle homothétique par rapport à I de celui que décrit le point M, c'est-à-dire du cercle mobile, le rapport d'hométhétie étant celui qui figure au second membre de cette formule.

Autres solutions par MM. G. Boulland, M. Faucheux, R. Goormaghtigh, J. Lemaire et L. Poli.

2301.

(1916, p. 479.)

Soit un faisceau tangentiel de quadriques, dont une sphère S *de centre* P, *et soit* F *l'une des quatre coniques planes du système. Les trois autres coniques du système sont les sections, par les plans polaires respectifs de* P, *de trois quadriques ayant* F *pour focale commune. Chacune de ces trois quadriques passe par les deux points limites des sphères coaxiales avec* S *ayant le plan de* F *pour plan radical.* M.-F. Egan.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Posons

$$\begin{aligned} S &= (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2 \\ &= R^2(u^2+v^2+w^2)-(u\alpha+v\beta+w\gamma+s)^2=0, \end{aligned}$$

$$F = a^2u^2+b^2v^2-s^2=0;$$

l'équation

$$[a^2u^2+b^2v^2-s^2+\lambda(u^2+v^2+w^2)]+\mu(u\alpha+v\beta+w\gamma+s)=0$$

représentera la conique, section de la quadrique

$$a^2u^2+b^2v^2-s^2+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$$

par le plan polaire de P relatif à cette surface, si l'on a

$$\mu=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{a^2+\lambda}-\dfrac{\beta^2}{b^2+\lambda}-\dfrac{\gamma^2}{\lambda}};$$

l'équation de cette conique sera

$$\Sigma \equiv a^2u^2 + b^2v^2 - s^2 + \lambda(u^2+v^2+w^2) - \frac{(u\alpha + v\beta + w\gamma + s)^2}{\dfrac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{\gamma^2}{\lambda} - 1} = 0,$$

ou, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2 - R^2}{\lambda} - 1 = 0,$$

$$\Sigma \equiv R^2(a^2u^2 + b^2v^2 - s^2) + \lambda[R^2(u^2+v^2+w^2) - (u\alpha + v\beta + w\gamma + s)] = 0.$$

Σ sera donc une focale du faisceau $S + \mu F = 0$, si l'équation (1) est vérifiée ; or elle exprime que la quadrique

$$a^2u^2 + b^2v^2 - s^2 + \lambda(u^2+v^2+w^2) = 0$$

passe par les points $\left(x = \pm\alpha, y = \pm\beta, z = \pm\sqrt{\gamma^2 - R^2}\right)$, points limites du faisceau de sphères déterminé par la sphère S et le plan de F.

Remarque. — Cette question revient au fond à la question 892 de Laguerre (1916, p. 321).

2302.

(1916, p. 479.)

Le lieu de la projection du centre de courbure en un point d'une cissoïde sur la parallèle menée par ce point à l'asymptote est une cubique d'Agnesi.

R. Goormaghtigh.

Solution

Par un Abonné.

Soit

$$x(x^2+y^2) - ay^2 = 0$$

l'équation d'une cissoïde droite. On peut poser, t désignant un paramètre variable,

$$x = \frac{a}{1+t^2}, \qquad y = \frac{a}{t(1+t^2)};$$

d'où l'on déduit, pour le coefficient angulaire de la tangente en un point de la courbe, la valeur $\frac{1+3t^2}{2t^3}$.

L'équation de la normale en ce point est donc

$$2t^4x + 2t^3y - 2at^2 + ty - a = 0.$$

En la différentiant par rapport à t et à la variable d'homogénéité, on obtient

$$8t^3x + 9t^2y - 2at + y = 0,$$
$$3t^3y - 4at^2 + 3ty - 4a = 0;$$

d'où, pour les coordonnées de la projection du centre de courbure sur la parallèle à l'asymptote,

$$x = \frac{a}{1+t^2}, \qquad y = \frac{4a}{3t}.$$

Le lieu de ce point est donc

$$9y^2(x-a) + 16a^2x = 0;$$

ou, en posant $x - a = X$,

$$9y^2X + 16a^2(X+a) = 0.$$

Autres solutions par E.-N. Barisien et par MM. L. Long et L. Poli.

2303.

(1916, p. 480.)

On considère deux hypocycloïdes à trois rebroussements égales ayant une tangente de rebroussement A_1A_2 *commune et telles que l'une ait un rebroussement en* A_1 *et le sommet opposé en* A_2; *l'autre un rebroussement en* A_2 *et un sommet opposé en* A_1. *Si d'un point* P *de* A_1A_2 *on mène à ces hypocycloïdes les tangentes* PM_1 et PM_2 *situées d'un même côté de* A_1A_2, *la corde des contacts enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.*

R. Goormaghtigh.

Solution

Par un Abonné.

Prenons A_1 comme origine et A_1A_2 comme axe des x. Soit H_1 l'hypocycloïde qui a un rebroussement en A_1 et H_2 celle qui a un rebroussement en A_2. En posant $A_1A_2 = a$, ces deux courbes ont respectivement pour équations tangentielles

$$au^3 - (u^2 + v^2) = 0,$$
$$auv^2 - (u^2 + v^2) = 0.$$

Désignons par λ et μ deux paramètres variables, nous pourrons poser pour la première

$$u = \frac{1 + \lambda^2}{a}, \qquad v = \frac{\lambda(1 + \lambda^2)}{a};$$

et pour la seconde

$$u = \frac{1 + \mu^2}{a}, \qquad v = \frac{1 + \mu^2}{a\mu}.$$

De sorte que l'équation d'une tangente quelconque est pour H_1

$$x + \lambda y - \frac{a}{1 + \lambda^2} = 0$$

et pour H_2

$$x + \frac{y}{\mu} - \frac{a}{1 + \mu^2} = 0.$$

Pour que ces deux tangentes se coupent sur A_1A_2, il faut que l'on ait $\mu = \pm\lambda$. Nous verrons plus loin que, si les points de contact sont du même côté de A_1A_2, $\mu = -\lambda$.

L'équation de la première tangente s'écrit donc

$$\lambda^3 y + \lambda^2 x + \lambda y + x - a = 0.$$

En la différentiant par rapport à λ et à la variable d'homogénéité, on obtient pour les coordonnées du point de con tact M_1 les valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{a(1 + 3\lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}, \qquad y_1 = \frac{a(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

De même pour les coordonnées de M_2

$$x_2 = \frac{a(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)^2}, \qquad y_2 = \frac{2a\mu^3}{(1+\mu^2)^2}.$$

Comme $\mu = \pm\lambda$, il faut, pour que y_1 et y_2 soient de même signe, que $\mu = -\lambda$; donc

$$x_2 = \frac{a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \qquad y_2 = -\frac{2a\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Cela posé, l'équation de M_1M_2 est

$$x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-y_1x_2=0.$$

Des formules précédentes on déduit

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &= -\frac{4a\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}, \\ y_1-y_2 &= \frac{2a\lambda(\lambda^2-1)}{(1+\lambda^2)^2}, \\ x_1y_2-y_1x_2 &= \frac{2a\lambda(1+\lambda^2)(1-3\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^4}. \end{aligned}$$

Par suite, les coordonnées de la droite M_1M_2 sont, en fonction du paramètre variable λ,

$$u = \frac{1-\lambda^4}{a(1-3\lambda^2)}, \qquad v = -\frac{2\lambda(1+\lambda^2)}{a(1-3\lambda^2)}.$$

Pour obtenir l'équation tangentielle de la courbe enveloppée par M_1M_2, il suffirait d'éliminer λ entre les deux équations précédentes. Pour faciliter cette élimination, transportons l'origine des axes au milieu de A_1A_2, en conservant leurs directions. Les nouvelles coordonnées de M_1M_2 seront

$$U = \frac{2(1-\lambda^4)}{a(1-6\lambda^2+\lambda^4)}, \qquad V = -\frac{4\lambda(1+\lambda^2)}{a(1-6\lambda^2+\lambda^4)};$$

d'où, par l'élimination de λ, la relation

$$a^2(U^2-V^2)^2-4(U^2+V^2)=0.$$

C'est l'équation d'une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant les axes de coordonnées pour axes de symétrie et les bissectrices de ces axes pour tangentes de rebroussement.

Autres solutions par MM. R. BOUVAIST et J. LEMAIRE.

2304.

(1916, p. 480.)

Dans un triangle ABC, *les* AB *et* AC *déterminent, sur la médiatrice relative au côté* BC, *un segment* $\alpha\beta$. *Les perpendiculaires, abaissées des sommets* B *et* C *sur la droite qui joint l'orthocentre du triangle au milieu du côté* BC, *déterminent sur la même médiatrice un segment* $\alpha'\beta'$. *Démontrer que ces deux segments sont égaux.*

F. BALITRAND.

SOLUTION
Par M. J. LEMAIRE.

Appelons A′ le milieu du côté BC, H l'orthocentre du triangle, D le pied de la hauteur issue de A, et supposons par exemple $AB < AC$; les triangles semblables de la figure donnent

$$A'\alpha = \frac{AD \times BA'}{BD},$$

$$A'\beta = \frac{AD \times CA'}{CD},$$

d'où

$$\alpha\beta = A'\alpha - A'\beta = \frac{AD \times BA'(CD - BD)}{BD \times CD} = \frac{2\,AD \times BA' \times A'D}{BD \times CD}.$$

Mais

$$BD \times CD = AD \times DH,$$

donc

$$\alpha\beta = \frac{2\,BA' \times A'D}{DH};$$

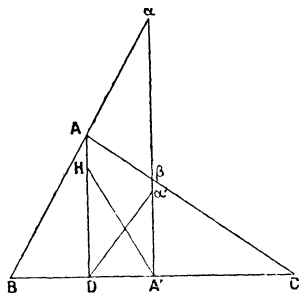
d'autre part, les triangles $BA'\alpha'$ et HDA' étant semblables, on a

$$\frac{BA' \times A'D}{DH} = A'\alpha',$$

on en conclut

$$\alpha\beta = 2\,A'\alpha' = \alpha'\beta'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration suppose aigus les angles B et C, on



l'adapte aisément au cas où l'un de ces angles est obtus.

Autres solutions, par E.-N. Barisien et par MM. R. Bouvaist et M. Faucheux.

2305.

(1916, p. 480.)

On donne une conique S *et un point* C *dans son plan. Il existe deux cercles de centre* C *tels que la conique* S *et l'un de ces cercles admettent des triangles circonscrits à* S *et inscrits au cercle. Les triangles de chacune des deux familles sont conjugués à une conique* Σ; *démontrer que les centres des deux coniques* Σ *sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de la conique* S.

G. Fontené.

Solution

Par un Abonné.

Soient S et S′ deux coniques telles qu'il existe des triangles T circonscrits à S et inscrits à S′; ces triangles sont conjugués à une conique Σ, qui est l'une des quatre coniques par rapport auxquelles S et S′ sont polaires réciproques. M. R. Bouvaist a montré (*N. A.*, 1916, p. 185) que le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles T, lieu qui est une conique, dépend uniquement de la conique S et du cercle de Monge de la conique Σ. La figure étant rapportée aux axes de la conique S, et le cercle de Monge de la conique Σ ayant pour centre le point (x_0, y_0), et pour rayon ρ, l'équation du lieu en question est

$$(1)\qquad [2x_0x + 2y_0y - x_0^2 - y_0^2 + \rho^2 + a^2 + b^2]^2 \\ - 4[a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2] = 0.$$

Les directions asymptotiques de cette conique sont perpendiculaires aux tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conique S; son centre est sur la perpendiculaire menée du centre de S à la polaire du point (x_0, y_0) par rapport à S.

La conique S étant donnée, ainsi que le cercle de Monge de la conique Σ, ce qui détermine le lieu (1), la conique Σ dépend d'un paramètre, la conique S′ dépend d'un paramètre. Si l'on choisit le rayon ρ du cercle de Monge de façon que le lieu soit une conique évanouissante, *l'une des coniques* S′ *sera un cercle* et le lieu se réduira à un point C, centre de ce cercle (*cf.* 1916, p. 355, 1°). La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(2)\quad [\rho^2 + a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2]^2 + 4(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0;$$

les valeurs de ρ^2 ne sont réelles que si le point (x_0, y_0) est intérieur à la conique S, et les deux droites qui forment le lieu sont bien imaginaires. Si l'on prend

$$\rho^2 = x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2 + 2\varepsilon\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2},$$

l'équation (1) devient

$$\left[x_0x + y_0y + \varepsilon\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2}\right]^2 \\ - (a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2 = 0.$$

Le centre (α, β) du cercle S′ qui est l'une des coniques S′ est le centre de la conique évanouissante représentée par l'équation précédente, et l'on trouve

$$\frac{\alpha}{b^2x_0} = \frac{\beta}{a^2y_0} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2}}.$$

Inversement, si le centre (α, β) du cercle S′ est donné, on a

$$(3)\qquad \frac{b^2x_0}{\alpha} = \frac{a^2y_0}{\beta} = \frac{a^2b^2}{\varepsilon\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + ab^2}},$$

pour les centres des deux coniques Σ qui correspondent aux deux cercles S'. *Ces deux points sont sur le diamètre de la conique* S *qui est conjugué de la direction perpendiculaire à* OC, *à égale distance du centre* O *de cette conique et intérieurs à cette conique.*

QUESTIONS.

2366. Soient M_1, μ_1, ν_1 et M_2, μ_2, ν_2 deux points correspondants de deux courbes inverses par rapport à un pôle O et leurs deux premiers centres de courbure en ces points. Les droites $M_1\mu_1$ et $M_2\mu_2$ se coupent en K, les droites $\mu_1\nu_1$ et $\mu_2\nu_2$ rencontrent en P_1 et P_2 la perpendiculaire élevée en O sur $O\mu_1\mu_2$. Si l'on mène par P_1 et P_2 des parallèles à $\nu_1 K$ et $\nu_2 K$ qui coupent respectivement $M_1\mu_1$ et $M_2\mu_2$ en Q_1 et Q_2, les points Q_1 et Q_2 appartiennent à une parallèle à OM_1M_2.

Cette proposition donne une construction du deuxième centre de courbure en un point de l'inverse d'une courbe Γ quand on connaît les deux premiers centres de courbure de Γ au point correspondant.

R. GOORMAGHTIGH.

2367. On sait que, si d'un point quelconque on mène les trois normales à une parabole, le cercle des neuf points du triangle formé par les tangentes aux pieds de ces normales contient le sommet de la courbe. Démontrer que, plus généralement, si l'on projette en g sur la tangente au sommet O le centre de gravité d'un triangle inscrit et qu'on prolonge Og de la moitié de sa longueur, le point obtenu appartient au cercle des neuf points du triangle formé par les tangentes à la parabole aux sommets du triangle inscrit considéré.

R. GOORMAGHTIGH.

NOTE BIOGRAPHIQUE.

Albert Gauthier-Villars (1).

Né à Villiers-sur-Orge le 16 juin 1861, Albert Gauthier-Villars entra à l'École Polytechnique en 1881. Lieutenant d'artillerie, il donna sa démission, fut associé à son père en 1888 et lui succéda en 1898 dans la direction de la célèbre Maison d'édition. Il avait été nommé chevalier de la Légion d'honneur en 1897.

Au début de la guerre, bien qu'exempté par son âge de toutes obligations militaires, il n'avait pas hésité à s'engager, et c'est en reprenant son ancien grade de lieutenant qu'il fit les débuts de la campagne. Il fut par la suite nommé capitaine, et commandait une batterie d'artillerie lourde (22^e du 77^e Rég^t).

Officier de la Légion d'honneur en 1914, il fut confirmé dans ce grade au titre militaire (10 juillet 1918) avec la mention suivante :

« Officier de tout premier ordre, alerte et énergique, d'une très belle tenue au feu. Grâce à sa valeur technique, à sa science d'artilleur, à la belle impulsion qu'il a su donner à sa batterie, a su obtenir des résultats remarquables dans les tirs de destruction sur des pièces à longue portée. »

(1) Nous n'avons pu qu'indiquer en quelques lignes, dans notre numéro de juillet, la perte cruelle faite par les *Nouvelles Annales*. Nous tenons à y ajouter aujourd'hui quelques indications plus complètes sur la vie de celui qui vient de nous quitter.

Note de la Rédaction.

Il était en outre décoré de la Croix de guerre avec deux citations, et sa batterie avait mérité la citation suivante :

« Sous les ordres du capitaine Gauthier-Villars, malgré de très sérieuses difficultés d'ordre technique, a attaqué à plusieurs reprises et a réussi à atteindre, le 3 mai 1918, une pièce allemande de gros calibre dont les tirs menaçaient gravement la ville de Paris. »

Albert Gauthier-Villars est mort subitement le 14 juillet 1918, à son poste de commandement, succombant sous le poids des fatigues de la guerre.

A la séance du 16 juillet de l'Académie des Sciences, M. Émile Picard, secrétaire perpétuel, a fait part à ses confrères de cette douloureuse nouvelle. Il a rappelé les grands services rendus à la Science par la Maison d'édition dont celui que nous venons de perdre, digne héritier des traditions paternelles, était directeur, et ajouté que cette mort laissera des regrets unanimes dans le monde scientifique français, où Albert Gauthier-Villars ne comptait que des amis. C'est la vérité même.

A ces regrets s'associeront notamment les collaborateurs de la librairie et de l'imprimerie. Ils n'ont pas oublié que Gauthier-Villars père avait fondé une caisse de retraites en faveur du personnel de la Maison, et que son fils fut le continuateur de cette œuvre généreuse et intelligente.

En terminant cette Notice trop brève, la rédaction des *Nouvelles Annales* tient à renouveler l'expression de sa sympathie et de son respect à ceux que laisse derrière lui Albert Gauthier-Villars. Sa vie aura été un noble exemple et le plus légitime des titres de noblesse morale pour ses héritiers.

[A2b]

SUR LE SYSTÈME DE n ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} x_1(x_2+x_3+\ldots+x_n) \;+\; 1.2(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=3^2a^2,\\ x_2(x_1+x_3+\ldots+x_n) \;+\; 2.3(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=5^2a^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})+n(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=(2n+1)^2a^2; \end{array}\right.$$

Par M. R. ALEZAIS.

Ce système a fait partie de la composition de Mathématiques au Concours général de 1880 et il est proposé comme exercice dans plusieurs algèbres élémentaires. M. Moret-Blanc l'a résolu dans ce Recueil (1882, p. 266), mais ses conclusions sont inexactes. Il n'est pas vrai, ainsi qu'il le suppose, que, pour une valeur de n, chaque inconnue ne puisse prendre que deux valeurs égales et de signes contraires et que les 2^n solutions du système (on lit dans le texte n^2) s'obtiennent en combinant les signes de toutes manières.

On voit immédiatement que les solutions du système (1) sont opposées deux à deux; mais il en existe en général qui sont infinies ou imaginaires. J'appellerai *système suffisant de solutions* un système formé de la moitié des solutions réelles et finies et ne contenant pas de solutions opposées.

Si le système (1) se réduit à une équation unique, c'est

$$2x_1^2 = 9a^2,$$

d'où

$$x_1 = \pm\frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

S'il est du second ordre, on a

$$\begin{cases} x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)^2 = 9a^2, \\ x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2)^2 = 25a^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$(x_1 + x_2)^2 = 4a^2, \qquad x_1 x_2 = a^2,$$

et l'on obtient les deux solutions doubles

$$x_1 = x_2 = a, \qquad x_1 = x_2 = -a.$$

Soit désormais $n > 2$ et posons, comme a fait M. Moret-Blanc,

(2) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y.$$

Les équations (1) deviennent, avec $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_i^2 - y x_i - i(i+1)y^2 + (2i+1)^2 a^2 = 0,$$

et l'on en tire

(3) $$2x_i = y + \varepsilon_i(2i+1)\sqrt{y^2 - 4a^2},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont des signes indépendants les uns des autres. En portant les valeurs (3) dans la relation (2) et en posant

(4) $$m = 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + \ldots + (2n+1)\varepsilon_n,$$

on a

$$(n-2)y + m\sqrt{y^2 - 4a^2} = 0, \qquad [m^2 - (n-2)^2]y^2 = 4m^2a^2.$$

Le radical étant supposé positif ainsi que a, on voit que y et m sont de signes contraires; on doit donc écrire

$$y = \frac{-2ma}{\sqrt{m^2 - (n-2)^2}}, \qquad \sqrt{y^2 - 4a^2} = \frac{2(n-2)a}{\sqrt{m^2 - (n-2)^2}};$$

et l'on a

$$(5)\quad x_i = \frac{[-m+\varepsilon_i(2i+1)(n-2)]a}{\sqrt{m^2-(n-2)^2}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Quel que soit i, ces valeurs sont infinies avec

$$m^2-(n-2)^2=0$$

et elles sont purement imaginaires avec

$$m^2-(n-2)^2<0.$$

On passe d'une solution à la sôlution opposée en changeant les signes de tous les ε, ce qui change aussi le signe de m.

Les 2^n solutions correspondent aux 2^n systèmes de valeurs des ε. On est donc amené à former tous les arrangements n à n des deux nombres 1 et -1. On peut écrire successivement ceux qui contiennent de toutes manières 0, puis 1, puis 2, ..., puis n nombres -1, mais ceux qui en ont p et $n-p$ correspondent à des solutions opposées; on voit donc que pour obtenir un système suffisant de solutions, si $n=2n'+1$, cas où le développement

$$2^n = 1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+n+1$$

a $2(n'+1)$ termes, il suffit de prendre les arrangements qui contiennent 0, 1, ..., n' nombres -1; si $n=2n'$, le même développement ayant $2n'+1$ termes, aux arrangements qui contiennent 0, 1, ..., $n'-1$ nombres -1, il faut ajouter la moitié de ceux qui en ont n'. Comme, d'une manière générale, on a

$$C_{2n'-1}^{n'} = \frac{1}{2}C_{2n'}^{n'},$$

on peut ajouter ceux qui contiennent n' nombres -1

parmi les $n-1$ premiers nombres et qui ont 1 pour $n^{\text{ième}}$ nombre. C'est ainsi que j'ai procédé pour former le Tableau que l'on trouvera un peu plus loin. Chaque arrangement qui y figure correspond à une solution, si grand que soit n, pourvu que l'on suppose ajoutés à droite un nombre suffisant de nombres 1. J'ai placé tous les arrangements qui concernent un ordre déterminé avant ceux qui concernent aussi l'ordre suivant.

Pour un arrangement donné, il reste à calculer les valeurs correspondantes de m et du radical.

Quand tous les ε sont positifs, on a

$$m = n(n+2),$$

et comme

$$2i+1 = 3+2(i-1),$$

on a en général

$$m = n(n+2) - 6\lambda - 4\mu, \tag{6}$$

en désignant par λ le nombre des ε négatifs et par μ la somme de leurs indices diminués chacun d'une unité. J'appellerai *indices réduits* les indices diminués d'une unité et je considérerai les nombres $0, 1, \ldots, n-1$ comme les numéros d'ordre des rangs $1, 2, \ldots, n$. Ces indices réduits ou numéros d'ordre étant inscrits en tête du Tableau des arrangements, la valeur de m s'obtient pour chacun d'eux, d'après la formule (6), par un calcul facile, et la valeur du radical s'en déduit sans peine. Il sera néanmoins plus avantageux de procéder de la manière suivante. Posons

$$|m| - (n-2) = 2\mathrm{H}.$$

H est un entier; car, d'après (6), m est de même parité que n, et nous pourrons représenter la quantité sans radical par 4Δ avec

$$\Delta = H(H + n - 2). \tag{7}$$

En réduisant a à l'unité, la formule (5) devient ainsi :

Avec $m > 0$

$$x_i = \frac{-2H - (n-2) + \varepsilon_i(2i+1)(n-2)}{2\sqrt{\Delta}},$$

avec $m < 0$

$$x_i = \frac{2H + n - 2 + \varepsilon_i(2i+1)(n-2)}{2\sqrt{\Delta}}.$$

On voit enfin que, si l'on pose

$$x'_i = \frac{(n-2)i - H}{\sqrt{\Delta}}, \qquad x''_i = -\frac{(n-2)(i+1) + H}{\sqrt{\Delta}}, \tag{8}$$

on a

$$\text{avec } m > 0 \begin{cases} x_i = x'_i & \text{si} \quad \varepsilon_i = 1, \\ x_i = x''_i & \text{si} \quad \varepsilon_i = -1; \end{cases}$$

$$\text{avec } m < 0 \begin{cases} x_i = -x''_i & \text{si} \quad \varepsilon_i = 1, \\ x_i = -x'_i & \text{si} \quad \varepsilon_i = -1. \end{cases}$$

Les valeurs x'_i d'une part et les valeurs x''_i d'autre part sont n termes consécutifs d'une même progression arithmétique; mais il n'existe que deux solutions, opposées l'une à l'autre, pour lesquelles les valeurs des n inconnues appartiennent à la même série.

m ne figure plus explicitement, mais il faut tenir compte de son signe; dans le Tableau suivant, je n'ai inscrit que les valeurs de H et de Δ, mais ces valeurs sont en *chiffres gras* quand m est négatif.

							$n = 3$.		$n = 4$.		$n = 5$.		$n = 6$.	
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	H.	Δ.	H.	Δ.	H.	Δ.	H.	Δ.
	1						7	$2^3.7$	11	11.13	16	$2^4.19$	22	$2^2\,11.13$
	-1	1					4	$2^2.5$	8	$2^4.5$	13	$2^4.13$	19	19.23
$n > 2$	1	-1	1				2	2.3	6	$2^4.3$	11	2.7.11	17	3.7.17
	1	1	-1				0	0	4	$2^3.3$	9	$2^2.3^3$	15	3.5.19
$n > 3$	1	1	1	-1					2	2^3	7	2.5.7	13	13.17
	-1	-1	1	1					3	3.5	8	$2^3.11$	14	$2^2.3^2.7$
	-1	1	-1	1					1	3	6	2.3^3	12	$2^6.3$
	1	-1	-1	1					-1	-1	4	$2^2.7$	10	$2^2.5.7$
$n > 4$	1	1	1	1	-1						5	$2^3.5$	11	3.5.11
	-1	1	1	-1	1						4	$2^2.7$	10	$2^2.5.7$
	-1	1	1	1	-1						2	2.5	8	$2^5.3$
	1	-1	1	-1	1						2	2.5	8	$2^5.3$
	1	-1	1	1	-1						0	0	6	$2^2.3.5$
	1	1	-1	-1	1						0	0	6	$2^2.3.5$
	1	1	-1	1	-1						-1	-2	4	2^5
	1	1	1	-1	-1						1	2^2	2	$2^2.3$
$n > 5$	1	1	1	1	1	-1							9	$3^2.13$
	-1	1	1	1	1	-1							6	$2^2.3.5$
	1	-1	1	1	1	-1							4	2^5
	1	1	-1	1	1	-1							2	$2^2.3$
	1	1	1	-1	1	-1							0	0
	1	1	1	1	-1	-1							-2	-2^2
	-1	-1	-1	1	1	1							7	7.11
	-1	-1	1	-1	1	1							5	$3^2.5$
	-1	-1	1	1	-1	1							3	3.7
	-1	1	-1	-1	1	1							3	3.7
	-1	1	-1	1	-1	1							1	5
	-1	1	1	-1	-1	1							-1	-3
	1	-1	-1	-1	1	1							1	5
	1	-1	-1	1	-1	1							-1	-3
	1	-1	1	-1	-1	1							-1	-3
	1	1	-1	-1	-1	1							1	5
	...	...	...	...	...	...							...	....

En comptant le nombre des valeurs nulles ou négatives de H, on voit que les systèmes d'ordre 3, 4, 5, 6 ont respectivement 2, 0, 4, 2 solutions infinies et 0, 2, 2, 8 solutions imaginaires. Par suite, les systèmes suffisants de ces quatre ordres contiennent respectivement 3, 7, 13, 27 solutions dont les valeurs se déduisent de suite des formules (8).

Voici ces solutions pour les ordres 3 et 4. Au lieu de supposer a réduit à l'unité, je lui donne pour valeur celle du plus petit dénominateur commun des expressions des x relatives à $a = 1$; les valeurs des x deviennent ainsi égales aux numérateurs correspondants :

$n = 3$.

x_1.	x_2.	x_3.	a.
6	5	4	$2\sqrt{14}$
6	2	1	$2\sqrt{5}$
1	5	-1	$\sqrt{6}$

$n = 4$.

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	a.
9	7	5	3	$\sqrt{143}$
6	2	1	0	$2\sqrt{5}$
2	6	0	-1	$2\sqrt{3}$
1	0	6	-2	$\sqrt{6}$
0	1	2	-6	$\sqrt{2}$
-7	-9	3	5	$\sqrt{15}$
-5	3	-9	7	$\sqrt{3}$

On voit que ces deux systèmes n'admettent aucune solution rationnelle; il en est de même du système d'ordre 6; car, avec $n = 6$, aucune valeur de Δ n'est carré parfait; mais le système d'ordre 5 admet la solution

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 13, \quad x_4 = -11, \quad x_5 = -14, \quad a = 2.$$

Il n'a d'ailleurs aucune solution rationnelle que cette solution et son opposée.

Solutions qui dépendent d'un même dénominateur. — S'il est faux que toutes les solutions aient un dénominateur unique, on voit déjà sur le Tableau précédent que cela peut arriver pour plusieurs d'entre elles, et, quand n croît, il est facile de voir que le nombre des dénominateurs distincts devient même relativement petit. En effet, à chaque valeur de H correspond une seule valeur de Δ, et H ne peut prendre que les valeurs entières, o inclus, dont la plus grande est $\frac{n(n+1)}{2}+1$ et la plus petite $-\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-3}{2}$, suivant que n est pair ou impair; on voit encore, en considérant les plus petits systèmes de valeurs de λ et μ, que H ne prend jamais sa valeur maxima diminuée de 1, de 2, de 4 ou de 6 unités. Le nombre des dénominateurs distincts est donc au plus, suivant la parité de n,

$$\frac{n^2+2n-6}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2+2n-7}{2},$$

nombres qui croissent bien moins rapidement que 2^n. Il y a d'ailleurs, en général, des solutions pour toutes ces valeurs de H. D'après le Tableau précédent, les quatre ordres considérés n'offrent que deux exceptions : $H=0$ avec $n=4$ et $H=3$ avec $n=5$ ne donnent aucune solution.

Proposons-nous de trouver toutes les solutions qui correspondent à une valeur de H.

Si H est donné, m est connu au signe près, car j'ai posé

$$|m| = 2H+n-2.$$

m est d'ailleurs relié au nombre λ des ε négatifs et à la somme μ de leurs indices réduits par la formule (6). Il en résulte

$$(9)\quad 2\mu = \frac{n(n+1)}{2} - (H-1) - 3\lambda \qquad (\text{avec } m > 0),$$

$$(10)\quad 2\mu = \frac{n(n+3)}{2} + H - 1 - 3\lambda \qquad (\text{avec } m < 0).$$

Ces formules déterminent la parité de λ. C'est d'ailleurs un entier positif inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Enfin, pour qu'une valeur de λ convienne, il faut que la valeur correspondante de μ soit supérieure ou égale à la somme des λ indices réduits les plus faibles et inférieure ou égale à la somme des λ indices réduits les plus forts $\left(\text{ou qui précèdent le plus fort, si } \lambda = \frac{n}{2},\right.$ car nous avons dit que dans ce cas les λ nombres -1 doivent être pris parmi les $n-1$ premiers nombres de $\left.\text{l'arrangement}\right)$. Un nombre fini d'essais permet donc de trouver tous les systèmes de valeurs de λ et μ qui correspondent à une valeur de H.

Pour chacun de ces systèmes, il reste ensuite à déterminer tous les systèmes de valeurs des ε pour lesquels λ des ε sont négatifs et ont μ pour somme de leurs indices réduits. J'appelle *arrangements correspondants* tous ceux pour lesquels λ et μ ont un même système donné de valeurs et il s'agit de dresser le Tableau de ces arrangements.

Un système de valeurs de λ et μ vérifiant les conditions indiquées pour une valeur de n, on peut toujours, d'une manière et d'une seule, trouver un entier λ_1, avec $0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda$, tel que la somme des λ_1 derniers indices réduits $\left(\text{ou qui précèdent le dernier, si } \lambda = \frac{n}{2}\right)$, augmentée de celle des $\lambda - \lambda_1 - 1$ premiers indices réduits, soit moindre que μ, mais ne le soit que de la valeur de l'un des indices intermédiaires. En supposant λ_1 ainsi déterminé, j'appelle *arrangement initial* l'unique arrangement correspondant qui commence par $\lambda - \lambda_1 - 1$ nombres -1 et se termine par λ_1 nombres -1 $\left(\text{suivis d'un nombre } 1 \text{ si } \lambda = \frac{n}{2}\right)$.

Soient maintenant d'une manière générale i et k deux numéros d'ordre, avec i inférieur à k d'au moins deux unités, et supposons que dans un arrangement correspondant, sous les numéros d'ordre i, $i+1$, $k-1$, k, se trouvent respectivement -1, 1, 1, -1; on obtient un autre arrangement correspondant en mettant aux mêmes rangs 1, -1, -1, 1, sans modifier les autres nombres, car, par cette opération que j'appellerai une *double transposition*, ni λ ni μ n'est changé.

Si deux arrangements appartiennent à un même ensemble d'arrangements correspondants, on peut passer de l'un à l'autre par une suite de doubles transpositions. En effet, ce sont d'abord deux arrangements des mêmes nombres; on peut donc passer de l'un à l'autre par une série de transpositions; mais, puisque la somme des indices réduits des nombres -1 doit être la même pour les deux, à toute transposition modifiant cette somme d'une unité, on peut en faire correspondre une autre la modifiant d'une unité en sens contraire. Il en résulte que, si l'on part de l'arrangement initial et qu'on effectue la double transposition de toutes les manières possibles dans cet arrangement lui-même et dans tous ceux que l'on en déduit par le même procédé, on obtiendra sans exception tous les arrangements correspondants, mais plusieurs d'entre eux se présenteront plus d'une fois; or, il est facile de ne faire que juste le nombre de doubles transpositions qui les donnent tous chacun une fois.

Des deux nombres — 1 qui sont échangés avec des 1 dans une double transposition, distinguons le *nombre de gauche* et le *nombre de droite*. Ces appellations sont corrélatives. Pour qu'un nombre — 1 puisse être le nombre de gauche d'une double transposition, il faut qu'il ait à sa droite un autre nombre — 1 pouvant lui servir de nombre de droite et *vice versa*. Un nombre de gauche doit d'ailleurs être immédiatement suivi d'un nombre 1 et le nombre de droite correspondant doit être immédiatement précédé d'un nombre 1 distinct du premier. Ces deux nombres 1, compris entre les nombres — 1, peuvent à leur tour comprendre ou ne pas comprendre entre eux d'autres nombres 1 ou — 1.

Ces conditions permettent de voir immédiatement sur un arrangement donné quels sont les nombres — 1 qui peuvent être nombres de droite ou nombres de gauche d'une double transposition. Je dirai, pour abréger, que ce sont respectivement les nombres de droite et les nombres de gauche de l'arrangement. Certains nombres — 1 peuvent appartenir aux deux catégories. Ainsi, soit par exemple

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
—1	—1	—1	1	—1	—1	1	1	—1	1	1	—1	—1	1	1	—1	1	—1

Dans cet arrangement, les nombres numérotés **2**, **5**, 8, **12** sont les nombres de gauche et les nombres numérotés **8**, **11**, **15**, **17** sont les nombres de droite.

Comme le nombre sous le n° **12** est le dernier nombre de gauche que l'on rencontre quand on parcourt l'arrangement à partir de la gauche, je dirai que c'est le *nombre de gauche le plus à droite*.

On voit que les doubles transpositions qui peuvent être effectuées dans cet arrangement sont au nombre de 13 et caractérisées par les couples suivants :

(2, 8), (2, 11), (2, 15), (2, 17), (5, 8), (5, 11), (5,15), (5, 17), (8, 11), (8, 15), (8, 17), (12, 15), (12, 17).

Voici maintenant comment on peut dresser le Tableau d'un ensemble d'arrangements correspondants.

Étant donné un arrangement initial quelconque, on peut de proche en proche en déduire tous les arrangements correspondants sans omission ni répétition en effectuant, à partir de chaque arrangement A, la double transposition qui est déterminée sans ambiguïté par les règles suivantes :

1° Le numéro d'ordre α du nombre de gauche de cette double transposition est celui du nombre de gauche le plus à droite dans A;

2° L'arrangement dans lequel elle doit être effectuée est A lui-même, si A n'est pas immédiatement précédé d'un arrangement dans lequel, 1°, tous les nombres à partir du premier à gauche et jusqu'à celui qui est numéroté α inclusivement sont les mêmes que dans A, et dans lequel, 2°, le nombre numéroté α peut être pris pour nombre de gauche. Si A est immédiatement précédé d'un arrangement vérifiant ces deux conditions, supposons pour la généralité qu'il y ait immédiatement au-dessus de A une suite de pareils arrangements consécutifs, on effectue alors la double transposition dans le dernier que l'on rencontre quand on remonte la série des arrangements à partir de A.

3° On prend pour nombre de droite de la double transposition celui qui, dans l'arrangement où on l'effectue, est le plus près à droite du nombre pris pour nombre de gauche.

Le dernier arrangement est celui où aucune double transposition n'est possible. Il a tous ses nombres -1 consécutifs ou disposés en deux groupes séparés par un seul nombre 1.

Voici une application de ce procédé. J'ai indiqué à côté du Tableau, sous les lettres R, G, R′, D, le rang de chaque arrangement dans ce Tableau; le numéro d'ordre du nombre de gauche de la double transposition qui donne l'arrangement suivant; le rang dans le Tableau de l'arrangement où cette double transposition doit s'effectuer; le numéro d'ordre de son nombre de droite.

$$n = 11,\quad \lambda = 5,\quad \mu = 18,\quad m = 41,\quad H = 16,\quad \Delta = 20^2.$$

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	R.	G.	R′.	D.
−1	−1	−1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	1	5	1	10
−1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	−1	1	2	6	2	9
−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	−1	1	3	2	1	5
−1	−1	1	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	4	4	4	10
−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1	−1	1	5	5	5	9
−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	1	1	6	3	5	9
−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	1	1	7	5	7	8
−1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	1	1	8	1	4	10
−1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	9	4	9	9
−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	1	10	5	10	8
−1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1	1	11	3	10	8
−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	1	12	2	12	7
−1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	13	0	9	9
1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	14	4	14	8
1	−1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	1	15	3	15	7
1	−1	−1	1	−1	−1	−1	1	1	1	1	16			

Tous ces arrangements sont distincts et il n'en manque aucun. En effet, les trois règles suivies ont pour effet immédiat de disposer les arrangements dans un ordre tel que les nombres -1 qui peuvent être déplacés vers la droite, le sont successivement et graduellement en commençant par le plus à droite et sans manquer aucun intermédiaire. Dans chaque arrangement, considérons comme *partie initiale* celle dont le dernier nombre, c'est-à-dire le plus à droite, est déterminé de la manière suivante : pour l'arrangement initial, c'est le nombre de gauche le plus à droite; pour un autre arrangement quelconque A, c'est celui dont le numéro d'ordre est le plus grand des deux entiers $\alpha + 1$ et β, en désignant par α le numéro d'ordre du nombre de gauche de la double transposition qui a fourni A et par β le numéro d'ordre du nombre de gauche le plus à droite dans A. On voit facilement que ces parties initiales sont toutes distinctes, que la marche suivie les a données toutes sans exception et enfin que, dans un ensemble d'arrangements correspondants, à chacune d'elles ne peut correspondre qu'un arrangement unique.

Dans le Tableau précédent, les parties initiales sont en *chiffres gras* (1).

Voici quelques applications de cette méthode.

Solutions infinies et imaginaires. — Les solutions infinies correspondent à $H = 0$ et les solutions imaginaires aux valeurs négatives de H. On peut se servir du procédé précédent pour déterminer leur nombre et en déduire le nombre des solutions de ce que j'ai appelé un *système suffisant*.

Voici les résultats que l'on trouve pour les premières valeurs de n :

	Ordre...	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Nombre	total des solutions........	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
	des solutions infinies........	2	0	4	2	8	10	22	36	68	112	204
	des solutions imaginaires..	0	2	2	8	14	32	64	130	260	526	1036
	des solutions d'un système suffisant.....	3	7	13	27	53	107	213	429	860	1729	3476

On peut remarquer que jusqu'à l'ordre 9 les nombres des solutions d'un système suffisant sont égaux chacun au double du précédent alternativement augmenté ou diminué d'une unité; mais cette règle ne vaut plus à partir de l'ordre 10.

Solutions rationnelles. — Pour qu'une solution soit rationnelle, il faut et il suffit que $\Delta = H(H+n-2)$ soit carré parfait. Dans ce cas, en faisant a égal à la racine carrée de ce nombre et en donnant pour valeurs aux x celles des numérateurs correspondants des x'_i ou x''_i, on obtient les solutions du système (1) en nombres entiers.

Les remarques suivantes ramènent à un nombre fini d'essais la recherche de toutes les solutions entières.

Pour que $H(H+n-2)$ soit carré parfait :

1° Si H est un carré, soit $H = h^2$, il faut que $h^2 + n - 2$ le soit aussi, ce qui exige que $n-2$ soit ou bien un nombre impair plus grand que 1, ou bien un multiple de 4 plus grand que 4, et ce qui, d'ailleurs, ne laisse à h qu'un nombre fini de déterminations.

2° Si H n'est pas carré, il ne peut être que le produit d'un carré par un facteur de $n-2$ inférieur à $n - 2$; car soit $H = h^2 n_1$, n_1 entier non carré, on a

$$H(H + n - 2) = h^2 n_1 (h^2 n_1 + n - 2);$$

si n_1 ne divise pas $n - 2$, il ne divise pas la parenthèse et il n'est qu'une fois en facteur dans l'expression, et si $n_1 = n - 2$, on a

$$H(H + n - 2) = h^2 (n - 2)^2 (h^2 + 1),$$

et le dernier facteur ne peut être un carré. Si $n - 2 = n_1 n_2$, il faut encore que $h^2 + n_2$ puisse être un carré et ici encore h n'a qu'un nombre fini de déterminations.

On peut facilement vérifier par cette méthode que les systèmes d'ordres 3, 4 et 6 n'ont pas de solutions rationnelles. Dans les trois cas, on est amené à faire $H = h^2$; or aucun des nombres

$$h^2(h^2 + 1), \quad h^2(h^2 + 2), \quad h^2(h^2 + 4)$$

ne peut être carré parfait.

On voit au contraire que tous les autres ordres ont des solutions rationnelles. En effet :

1° Si n est impair et supérieur à 3, on a

$$n - 2 = 2n_1 + 1$$

avec n_1 au moins égal à 1 et il suffit de faire $H = n_1^2$ pour que

$$\Delta = n_1^2 (n_1^2 + 2n_1 + 1)$$

soit carré parfait.

2° Si n est pairement pair et supérieur à 4, on a

$$n - 2 = 4n_1 + 2$$

avec n_1 au moins égal à 1 et il suffit de faire $H = 2n_1^2$ pour que

$$\Delta = 2^2 n_1^2 (n_1^2 + 2n_1 + 1)$$

soit carré parfait.

3° Si n est impairement pair et supérieur à 6, on a

$$n - 2 = 4n_1 + 4$$

avec n_1 au moins égal à 1 et il suffit de faire $H = n_1^2$ pour que

$$\Delta = n_1^2 (n_1^2 + 4n_1 + 4)$$

soit carré parfait.

Voici les résultats pour les premières valeurs de n. Ils sont présentés sous forme de solutions entières avec a égal à la racine de Δ ou à un de ses facteurs en cas de réduction, c'est-à-dire quand $n - 2$, H et Δ ont un facteur commun.

Je désigne par N le nombre des solutions rationnelles qui font partie d'un système suffisant. Le nombre total s'obtient en doublant. On peut remarquer que, pour une détermination de H rendant Δ carré, le nombre des solutions croît avec n; mais le nombre des déterminations de H rendant Δ carré a des fluctuations provenant du nombre et de la nature des diviseurs de $n-2$. Si $n - 2$ est un nombre premier ou le double ou le quadruple d'un nombre premier, H ne peut avoir qu'une seule détermination.

							Arrangements initiaux																			
n.	H.	Δ.	a.	x'_i.	x''_i.	m.	ε_1.	ε_2.	ε_3.	ε_4.	ε_5.	ε_6.	ε_7.	ε_8.	ε_9.	ε_{10}.	ε_{11}.	ε_{12}.	ε_{13}.	ε_{14}.	ε_{15}.	ε_{16}.	ε_{17}.			N.
5.	1	2^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	−	1	1	1	−1	−1															1
7.	4	6^2	6	$5i-4$	$-5i-9$	+	−1	1	−1	1	1	1	−1													4
8.	2	4^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	−1	1	1	1	1	1	−1	−1										5		6
						−	1	1	1	1	1	−1	−1	−1										1		
9.	9	12^2	12	$7i-9$	$-7i-16$	+	−1	1	1	1	1	1	−1	1	−1									7		8
						−	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1									1		
10.	1	3^2	3	$8i-1$	$-8i-9$	+	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1								1		19
						+	−1	−1	1	1	−1	1	1	−1	−1	1								12		
						−	−1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1	1								6		
11.	16	20^2	20	$9i-16$	$-9i-25$	+	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	−1	−1							7	23	53
						+	−1	−1	−1	1	1	−1	1	1	1	1	−1							16		
	3	6^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	−1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1							14	30	
						−	−1	1	1	1	1	−1	1	1	−1	−1	−1							16		
12.	8	12^2	6	$5i-4$	$-5i-9$	+	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	−1	−1						49		54
						−	1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1						5		
13.	25	30^2	30	$11i-25$	$-11i-36$	+	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1					4		69
						+	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1					63		
						−	1	1	1	1	1	−1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1					2		
14.	4	8^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1				1		180
						+	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1				139		
						−	−1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1				40		
15.	36	42^2	42	$13i-36$	$-13i-49$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1			1		187
						+	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1			141		
						+	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1			45		
16.	18	24^2	12	$7i-9$	$-7i-16$	+	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	−1	−1	−1		55		532
						+	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1		440		
						−	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		37		

						[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	1	1	−1	−1	−1	−1				220		
						+	−1	−1	−1	−1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1				311	534	
						−	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1				3		
	1	4^2	4	$15i-1$	$-15i-16$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1				1		
						+	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1				477	1129	
						−	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1				7		
						−	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1				644		3833
	12	18^2	6	$5i-4$	$-5i-9$	+	−1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1				193		
						+	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1				819	1060	
						−	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1				48		
	5	10^2	2	$3i-1$	$-3i-4$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1				3		
						+	−1	−1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1				560	1110	
						−	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1				3		
						−	−1	−1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1				544		
18.	9	15^2	15	$16i-9$	$-16i-25$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1					
						+	−1	−1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1					
						+	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1					
						−	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1					
						−	−1	−1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1					
	2	6^2	3	$8i-1$	$-8i-9$	+	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1					
						+	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1					
						−	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1	−1	−1					
						−	−1	−1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1					
19.	64	72^2	72	$17i-64$	$-17i-81$	+	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1				
						+	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1				
						+	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	−1				
20.	32	40^2	20	$9i-16$	$-9i-25$	+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	−1	−1	−1	−1			
						+	−1	−1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1			
						+	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	−1	−1	−1			
						−	−1	1	1	1	1	−1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1			

Pour écrire explicitement la solution relative à l'un des arrangements initiaux ou à l'un de ceux qu'on peut en déduire, il suffit d'appliquer les règles données après les formules (8) sur le choix à faire entre x'_i et x''_i suivant le signe de m et suivant celui de ε_i (i indice non réduit). Voici par exemple quelques solutions entières du système d'ordre **17** :

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	x_8.	x_9.
-79	-94	-4	11	26	41	56	71	86
14	29	44	59	74	89	104	119	134
-14	6	11	16	-34	26	31	36	41
2	5	8	11	14	17	20	23	26

x_{10}.	x_{11}.	x_{12}.	x_{13}.	x_{14}.	x_{15}.	x_{16}.	x_{17}.	a.
101	116	131	146	-274	176	-304	-319	56
149	164	-196	194	-226	-241	-256	-271	4
46	51	56	61	-79	-84	-89	-94	6
-34	32	35	38	-46	-49	-52	-55	2

Les quatre du système d'ordre 7 sont :

x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.	x_6.	x_7.	a.
-14	6	-24	16	21	26	-44	6
-14	6	11	-29	21	-39	31	6
1	-19	-24	16	21	-39	31	6
1	-19	11	-29	-34	26	31	6

[L¹19a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES CONIQUES HOMOFOCALES ;

Par M. R. BRICARD.

1. Étant données deux coniques homofocales, les deux paires de tangentes qu'on peut leur mener d'un point quelconque du plan forment, comme on sait, un faisceau *isogonal*, c'est-à-dire qu'elles forment deux angles ayant les mêmes bissectrices. Je me propose d'établir que cette propriété est caractéristique d'un système de deux coniques homofocales. Pour le démontrer, je résoudrai le problème suivant :

Trouver, dans le plan, quatre courbes C_1, G_1, C_2, G_2, *telles que, si d'un point* M *quelconque on leur mène les quatre tangentes* MU_1, MV_1, MU_2, MV_2, *le faisceau ainsi formé soit isogonal, les deux angles* $\widehat{U_1MV_1}$, $\widehat{U_2MV_2}$ *ayant les mêmes bissectrices.*

2. Prenons des axes rectangulaires et soient x, y les coordonnées du point M, u_1, v_1, u_2, v_2 les angles que font respectivement avec OX les quatre tangentes MU_1, MV_1, MU_2, MV_2. Ces angles sont des fonctions de x, y.

L'équation de la droite MU_1 par exemple est

$$\frac{X-x}{\cos u_1} = \frac{Y-y}{\sin u_1},$$

ou

$$\sin u_1 X - \cos u_1 Y = x \sin u_1 - y \cos u_1.$$

Cette droite doit avoir une enveloppe, à savoir la la courbe C_1. Il est nécessaire et suffisant pour cela que l'expression formant le second membre de l'équation précédente soit fonction de u_1. Cela s'exprime par la condition

$$\begin{vmatrix} \sin u_1 + (x\cos u_1 + y\sin u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ -\cos u_1 + (x\cos u_1 + y\sin u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

qui se réduit à

$$\cos u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sin u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

On a de même

$$\cos v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \sin v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\cos u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$\cos v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \sin v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

En outre, l'isogonalité du faisceau des quatre tangentes s'exprime par la condition

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2. \tag{5}$$

Il s'agit donc de trouver quatre solutions u_1, v_1, u_2, v_2, satisfaisant à la condition (5), de l'équation aux dérivées partielles

$$\cos u \frac{\partial u}{\partial x} + \sin u \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

3. On tire de (5)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Mais il résulte de (1) et (2) que l'on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\operatorname{tang} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \operatorname{tang} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

De même

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\operatorname{tang} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} - \operatorname{tang} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Donc

$$\operatorname{tang} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \operatorname{tang} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = \operatorname{tang} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \operatorname{tang} v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Le premier membre est, au signe près, la dérivée logarithmique par rapport à y de $\cos u_1 \cos v_1$; le second membre est, au signe près, la dérivée logarithmique de $\cos u_2 \cos v_2$. Le rapport de ces deux fonctions doit donc être fonction de x seulement. On écrira, pour la commodité des calculs ultérieurs,

$$\frac{\cos u_2 \cos v_2}{\cos u_1 \cos v_1} = \frac{1}{f(x)} + 1.$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{\sin u_2 \sin v_2}{\sin u_1 \sin v_1} = \frac{1}{g(y)} + 1.$$

On tire de là

$$\cos u_2 \cos v_2 - \sin u_2 \sin v_2$$
$$= \frac{\cos u_1 \cos v_1}{f(x)} - \frac{\sin u_1 \sin v_1}{g(y)} + \cos u_1 \cos v_1 - \sin u_1 \sin v_1,$$

ce qui, en tenant compte de (5), se réduit à

$$\frac{\sin u_1 \sin v_1}{\cos u_1 \cos v_1} = \frac{g(y)}{f(x)}. \tag{6}$$

Posons maintenant

$$\operatorname{tang} u_1 = m, \qquad \operatorname{tang} v_1 = n,$$

m étant fonction de u_1 satisfait à la même équation aux dérivées partielles que cette dernière fonction. On a donc

$$\frac{\partial m}{\partial x} + m \frac{\partial m}{\partial y} = 0; \tag{7}$$

de même

$$\frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial n}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Enfin (6) s'écrit

$$mn = \frac{g(y)}{f(x)}. \tag{9}$$

Il s'agit donc de trouver deux solutions m et n de l'équation aux dérivées partielles (7), telles que leur produit soit le quotient d'une fonction de y par une fonction de x.

Ajoutons les équations (7) et (8), multipliées respectivement par n et m. Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x}(mn) + mn \frac{\partial}{\partial y}(m+n) = 0,$$

ou

$$-\frac{gf'}{f^2} + \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y}(m+n) = 0,$$

ce qui se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial y}(m+n) = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

d'où, en intégrant,

$$m + n = \frac{f'(x)}{f(x)} y + F(x), \tag{10}$$

F étant une certaine fonction de x.

De même, ajoutons les équations (7) et (8), multipliées respectivement par $\frac{1}{m^2}$ et $\frac{1}{n^2}$. On a

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{mn} \frac{\partial}{\partial y}(mn) = 0,$$

ou

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{f}{g}\frac{g'}{f}=0,$$

ou enfin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{g'(y)}{g(y)}$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{g'(y)}{g(y)}x+G(y), \tag{11}$$

G étant une certaine fonction de y.

En tenant compte de (9) et (10), l'équation (11) s'écrit

$$\left(\frac{f'}{f}y+F\right)\frac{f}{g}=\frac{g'}{g}x+G,$$

ou

$$f'(x)y+F(x)f(x)=g'(y)x+G(y)g(y). \tag{12}$$

En dérivant par rapport à x, il vient

$$f''(x)y+[F(x)f(x)]'=g'(y). \tag{13}$$

Une nouvelle dérivation par rapport à y donne enfin

$$f''(x)=g''(y).$$

La valeur commune des deux membres doit être une constante absolue, que l'on peut supposer égale à 2, les fonctions f et g n'intervenant dans (9) que par leur rapport. Ces fonctions sont donc deux polynomes du second degré

$$f(x)=x^2+2ax+b,$$
$$g(y)=y^2+2\alpha y+\beta.$$

(13) donne alors

$$2y+[F(x)f(x)]'=2(y+\alpha),$$

d'où

$$F(x)f(x)=2(\alpha x+K)$$

et

$$F(x) = \frac{2(\alpha x + K)}{x^2 + 2ax + b},$$

K étant une nouvelle constante. On tire ensuite de (10)

$$m + n = \frac{2(x + a)}{x^2 + 2ax + b}\, y + \frac{2(\alpha x + K)}{x^2 + 2ax + b}$$
$$= \frac{2(xy + \alpha x + ay + K)}{x^2 + 2ax + b}.$$

Finalement, on voit que m et n sont racines de l'équation

$$(x^2 + 2ax + b)\, m^2$$
$$- 2(xy + \alpha x + ay + K)\, m + y^2 + 2\alpha y + \beta = 0.$$

En résumé les deux courbes C_1 et G_1 constituent une seule et même courbe algébrique de seconde classe, c'est-à-dire une conique Γ_1.

De même, les courbes C_2 et G_2 constituent une conique Γ_2.

Γ_1 et Γ_2 sont homofocales. En effet, M étant un point quelconque de Γ_2, les tangentes issues du point M à cette conique sont confondues suivant une droite qui doit être l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{U_1 M V_1}$, et par conséquent de l'angle formé par les droites joignant le point M aux foyers F et F' de Γ_1. Γ_2 a donc aussi pour foyers F et F'.

Il est donc établi que la propriété rappelée au début caractérise bien un système de deux coniques homofocales.

4. On démontrerait d'une manière analogue qu'un système de deux coniques concentriques et homothé-

tiques est caractérisé par la propriété suivante : une droite quelconque détermine dans ces deux coniques des cordes dont les milieux sont confondus.

[P¹1e]

RELATIONS ENTRE LES RAYONS DE COURBURE DE DEUX COURBES AFFINES (¹) ;

PAR M. F. BALITRAND.

Soient M et M_1 deux points correspondants de deux courbes affines par rapport à un axe XX′; C et C_1 les centres de courbure en ces points; A le point de rencontre, situé sur XX′, des tangentes en M et M_1 aux courbes (M) et (M_1). Appelons r et r_1 les portions de tangentes AM et AM_1; θ et θ_1 les angles qu'elles forment avec l'axe XX′.

On a par définition

$$r\cos\theta = r_1\cos\theta_1, \qquad r\sin\theta = \mathrm{K}\, r_1 \sin\theta_1;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \mathrm{K}\operatorname{tang}\theta_1.$$

En différentiant cette relation on obtient

$$\frac{d\theta}{d\theta_1} = \mathrm{K}\,\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta_1};$$

$d\theta$ et $d\theta_1$ sont les angles de contingence des deux

(¹) Sur ce sujet on peut consulter : P. SERRET (*Des méthodes en Géométrie*, p. 96); A. MANNHEIM (*Princ. et développ. de Géom. ciném.*, p. 498); R. GOORMAGHTIGH (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 423, et 1917, p. 84); F. BALITRAND (*Nouv. Ann.*, 1916, p. 74).

courbes en M et M_1. D'autre part, à cause de

$$r \cos\theta = r_1 \cos\theta_1$$

et de la signification géométrique des angles θ et θ_1, on a

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = \frac{r}{r_1}.$$

Par suite, en appelant ρ et ρ_1 les rayons de courbure correspondants

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\dfrac{ds}{d\theta}}{\dfrac{ds_1}{d\theta_1}} = \frac{r^3}{kr_1^3}.$$

Cette relation est due à P. Serret (*Des méthodes en Géométrie*, p. 96) qui l'a établie par une voie entièrement différente de celle qui précède et n'en a pas déduit de construction géométrique. Par une transformation facile, elle s'écrit

$$\frac{r}{\rho \sin\theta \cos\theta} = \frac{r_1}{\rho_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1};$$

d'où la détermination suivante du centre de courbure C_1 :

On projette C *en* C' *sur* MM_1 *et* C' *en* C'' *sur* AM. *La parallèle à* MM_1, *menée par* C'', *coupe* AM_1 *en* C''_1 *et la perpendiculaire en ce point à* AM_1 *coupe* MM_1 *en* C'_1. *La parallèle à* XX', *menée par* C'_1, *passe par le centre de courbure* C_1.

La relation précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{r^2}{\rho \sin\theta} = \frac{r_1^2}{\rho_1 \sin\theta_1}$$

et donne alors lieu à ce théorème :

Les projections des rayons de courbure de deux courbes affines sur l'axe d'affinité sont entre elles comme les carrés des portions de tangentes correspondantes, comprises entre leur point de concours et leurs points de contact avec les courbes.

Joignons AC′ qui coupe la normale à M en D et projetons ce point en Q sur XX′. Soit P le pied de MM_1 sur cet axe. Les triangles semblables ADQ, AC′P donnent

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AD}{AC'} = \frac{AM}{AC''} = \frac{r}{r + \rho \sin\theta \cos\theta};$$

d'où

$$AQ = \frac{r^2 \cos\theta}{r + \rho \sin\theta \cos\theta}.$$

On trouverait de même pour la courbe (M_1)

$$AQ_1 = \frac{r_1^2 \cos\theta_1}{r_1 + \rho_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1}.$$

Or, en vertu de

$$\frac{r}{\rho \sin\theta \cos\theta} = \frac{r_1}{\rho_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1}$$

$AQ = AQ_1$ et il en résulte la propriété suivante qui fournit une construction évidente du centre de courbure C_1 connaissant C :

On projette les centres de courbure C *et* C_1 *en* C′ *et* C_1' *sur* MM_1. *Les droites* AC′ *et* AC_1' *rencontrent les normales correspondantes en deux points qui sont sur une perpendiculaire à* XX′.

Soit N le point où la perpendiculaire en A à XX′ rencontre la normale à (M). Portons sur cette normale, a partir de N, une longueur NN′ égale au rayon de courbure CM et abaissons de M sur AN′ une perpendiculaire qui coupe XX′ en O. Nous formons ainsi deux triangles ANN', AMO qui sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires et qui donnent

$$\frac{AO}{AN} = \frac{AM}{NN'},$$

ou bien

$$AO = \frac{r^2}{\rho \sin \theta}.$$

De même, pour la courbe (M_1), on aurait

$$AO_1 = \frac{r_1^2}{\rho_1 \sin \theta_1}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut $AO = AO_1$ et les points O et O_1 coïncident. On a donc la propriété suivante qui peut servir à déterminer C_1 connaissant C :

Soient N *et* N_1 *les points où la perpendiculaire élevée en* A *à* XX' *rencontre les normales à* (M) *et* (M_1). *Portons sur ces normales, à partir de ces points, des longueurs* NN', $N_1N'_1$ *égales respectivement aux rayons de courbure correspondants. Les perpendiculaires abaissées de* M *et* M_1 *sur* AN' *et* AN'_1 *se coupent sur* XX'.

CORRESPONDANCE.

M. **H. Brocard.** — *Au sujet d'un article de* E.-N. Barisien, 1917, p. 401-408. — *Sur les paraboles qui passent par les pieds des normales issues d'un point donné* (α, β) *à une ellipse.*

Page 403, l'auteur observe que les axes des deux paraboles ont des directions fixes, les diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

Ce théorème se trouve énoncé dans son article de *Mathesis*, 1909, p. 145, n° 21.

Cas où le point (α, β) est sur l'ellipse (1917, p. 106).

Chaque parabole enveloppe une quartique. Voir en effet (*loc. cit.*) n° 21.

M. **d'Ocagne**. — *Remarques au sujet de diverses questions résolues dans les N. A.* (1918).

Question 2264 (p. 216). — Je rappelle que, dans cette question, si M est le milieu du segment de la tangente en P à la courbe (P), compris entre les axes rectangulaires Ox et Oy, il s'agit de la relation qui lie le point P à la tangente en M à la courbe (M). La relation que j'avais en vue dans la dernière partie de l'énoncé est la suivante (que l'on pourra s'exercer à déduire de celles remarquées par les auteurs des solutions insérées, mais qui peut, de façon très aisée, s'établir directement) :

Les normales en M *et en* P *aux courbes* (M) *et* (P) *se coupent sur la perpendiculaire élevée à* OM *par le point symétrique de* O *par rapport à* M.

Par la même occasion, je signalerai quelques couples intéressants de courbes (M) et (P) dont l'existence peut s'établir géométriquement (sujets d'exercices pour les lecteurs des *N. A.*) :

Courbe (M).	*Courbe* (P).
Une droite D quelconque.	La parabole tangente à Ox, à Oy et à D au milieu du segment de cette droite compris entre Ox et Oy.

Courbe (M).	*Courbe* (P).
Un cercle de centre O.	L'hypocycloïde à quatre rebroussements circonscrite à ce cercle et qui admet Ox et Oy pour ses axes de rebroussement.
Un cercle tangent en O à Oy.	L'hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite à ce cercle et qui le touche en O.
Une parabole de sommet O tangente à Oy.	La symétrique par rapport à Oy de la parabole obtenue en dilatant au double, à partir de Ox, les ordonnées de la parabole donnée.
Une hyperbole équilatère ayant Ox et Oy pour asymptotes.	Cette hyperbole équilatère elle-même.
Une hyperbole équilatère de sommet O, ayant ses asymptotes parallèles à Ox et Oy.	Le point diamétralement opposé à O dans cette hyperbole.
Une hyperbole équilatère de foyer O, ayant ses asymptotes parallèles à Ox et Oy.	Le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre, cercle qui est d'ailleurs tangent à Ox et Oy.
Une hyperbole équilatère d'axes Ox et Oy.	La développée de cette hyperbole.

Question 2266 (p. 226). — D'après un théorème que j'ai eu occasion de rappeler dernièrement dans les *N. A* (1918, p. 33), précisément à propos d'une construction de centre de courbure de conchoïde, si (en utilisant les notations de la solution ici visée) A est l'extrémité de la sous-normale polaire de la courbe (M) pour le pôle O, et ω le milieu de la normale polaire de la courbe (A) pour le même pôle, le centre de courbure C de la conchoïde (M′) de (M) s'obtient par la rencontre de la normale M′A à cette conchoïde et de la droite qui joint le point ω au point de rencontre H de OM′ et de la perpendiculaire en A à M′A. *Le lieu de* C *est donc engendré par la rencontre de deux rayons correspondants* A′M *et* ωH *de deux faisceaux, de centres respectifs* A *et* ω, *évidemment homographiques*, puisque de chacun de ces rayons l'autre se déduit de façon unique. Ce lieu est donc une conique passant par A et ω.

Le point H à l'infini sur OM donne un point C en coïncidence avec le milieu A′ de OA; le point H confondu avec O, le point C_1 à la rencontre de Oω et de la parallèle à OM menée par A. Enfin, lorsque le rayon AM′ vient à se confondre avec Aω, le point C tend vers A suivant la perpendiculaire élevée en A à Aω qui est, par suite, tangente en A à la conique lieu de ce point.

De cette façon sont établis plus directement (sans avoir à passer par l'intermédiaire des antipodaires des conchoïdes relativement au point O) les résultats obtenus, pour la première partie, par l'auteur de la solution insérée.

Question 2275 (p. 234). — Outre que, comme l'a justement observé l'auteur de la solution insérée, la distance tangentielle de chaque point M de l'hyperbole au cercle correspondant est égale au demi-axe transverse de cette hyperbole, il n'est pas sans intérêt de remarquer que la corde des contacts du cercle et des asymptotes passe par le point M, ou, ce qui revient au même, que la polaire du point M par rapport à ce cercle passe par le centre de l'hyperpole.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

333.

(1856, p. 243; 1916, p. 192.)

Étant donnée une ligne d'intersection de deux surfaces de degrés m et p, quels sont les degrés respectifs des surfaces formées par les normales principales, les tangentes de la courbe et les axes des plans osculateurs?

SOLUTION
Par M. L. POLI.

Cette question est résolue (p. 362) du volume où elle a été posée, dans un article *du Rédacteur* intitulé *Considérations sur les courbes à double courbure* (1856, p. 359-365).

Mais cet article ne fait par mention de l'énoncé.

1008.

(1870, p. 480; 1917, p. 360.)

Tout cube parfait, différent de zéro, augmenté de 1, 2 *ou* 8 *unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait.* MORET-BLANC.

SOLUTION
Par M. L. VARCHON.

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante que nous allons établir :

La différence entre deux cubes parfaits non nuls admet nécessairement d'autres facteurs premiers que 2 *et* 5,

Ce qui revient à dire que l'égalité

$$X^3 - Y^3 - 2^a \times 5^b \tag{1}$$

est impossible pour des nombres entiers. Remarquons d'abord que, si un nombre est multiple de 5, son cube est évidemment terminé par le même chiffre que ce nombre lui-même. Si maintenant le nombre N n'est pas multiple de 5, on a

$$N = 5n \pm 1 \qquad \text{ou} \qquad N = 5n \pm 2$$

et, suivant le cas,

$$N^3 = 5 \times (25n^3 \pm 15n^2 + 3n) \pm 1$$

ou

$$N^3 = 5 \times (25n^3 \pm 30n^2 + 12n \pm 2) \mp 2,$$

les signes supérieurs se correspondant dans les deux cas.

Les parenthèses sont de même parité que n; donc les chiffres des unités de N et N^3 sont les mêmes si $N = 5n \pm 1$; ils ont pour somme 10; si $N = 5n \pm 2$, il en résulte donc que, dans tous les cas, si deux nombres sont terminés par le même chiffre (ou, ce qui revient au même, si leur différence est un multiple de 10), il en est de même de leurs cubes et réciproquement.

Ceci étant, supposons que la relation (1) puisse être vérifiée par deux nombres entiers X et Y; soit $D = 2^{a'} \times 5^{b'}$ le plus grand commun diviseur des nombres X et Y, on peut écrire

$$\left(\frac{X}{D}\right)^3 - \left(\frac{Y}{D}\right)^3 = 2^{a-3a'} \times 5^{b-3b'}$$

ou, en posant

$$\frac{X}{D} = x, \quad \frac{Y}{D} = y, \qquad a - 3a' = \alpha, \qquad b - 3b' = \beta,$$

$$(2) \qquad x^3 - y^3 = 2^\alpha \times 5^\beta;$$

ce qui montre que, si la relation (1) existe entre deux nombres quelconques, X et Y, il existe une relation de même forme entre deux nombres x et y premiers entre eux. Il suffit donc de prouver que la relation considérée ne peut pas avoir lieu entre deux nombres premiers entre eux.

La relation (2) peut s'écrire sous les deux formes

$$(3) \qquad (x^2 + xy + y^2)(x - y) = 2^\alpha \times 5^\beta,$$

$$(4) \qquad [(x-y)^2 + 3xy](x - y) = 2^\alpha \times 5^\beta.$$

α et β ne peuvent être nuls tous les deux, car alors on devrait avoir

$$x - y = 1,$$
$$(x - y)^2 + 3xy = 1,$$

ce qui entraîne $x = 1$, $y = 0$, cas que nous avons écarté.

x et y étant premiers entre eux sont tous deux impairs ou l'un pair et l'autre impair; dans les deux cas le facteur

$$x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$$

est nécessairement impair; s'il n'a d'autres facteurs premiers que 2 et 5, c'est une puissance de 5.

Considérons maintenant le facteur $x - y$; il ne peut être divisible par 5, car alors 5, divisant $x - y$ et $(x - y)^2 + 3xy$, diviserait l'un des nombres x ou y, et comme il divise déjà $x - y$ il diviserait l'autre, ce qui est impossible.

De même, $x - y$ ne peut être divisible par 2, car le facteur $x^2 + xy + y^2$ étant divisible par 5, $x^3 - y^3$ serait divisible par 10, et il en serait de même de $x - y$ qui serait alors divisible par 5 et nous venons de voir que c'est impossible.

On ne peut donc avoir que $x - y = 1$.

Dans ce cas l'équation (4) peut s'écrire

$$(5) \qquad 1 + 3y(y + 1) = 5^\beta;$$

y et $y + 1$ ne doivent être ni l'un ni l'autre divisibles par 5.

On devra donc avoir

$$y = 5n + 1 \quad \text{ou} \quad y = 5n + 2 \quad \text{ou enfin} \quad y = 5n + 3,$$

ce qui donnera, pour le premier membre de (5),

$$y = 5n + 1, \quad 3y(y + 1) + 1 = 5n \times (15n + 9) + 7;$$
$$y = 5n + 2, \quad 3y(y + 1) + 1 = 5n \times (15n + 15) + 19;$$
$$y = 5n + 3, \quad 3y(y + 1) + 1 = 5n \times (15n + 21) + 37.$$

On voit immédiatement qu'aucun des seconds nombres n'est divisible par 5 et par suite ne peut vérifier la relation (5).

La relation (1) est donc bien impossible.

Note de M. H. Brocard, signalant l'analogie des questions 1008 et 902.

1035.

(1871, p. 336; 1917, p. 227.)

Il y a les mêmes relations entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde qu'entre les distances d'un point variable dans le plan à trois points de ce plan. G. DARBOUX.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient trois sphères

$$\begin{aligned} S_i &\equiv x^2+y^2+z^2-2\alpha_i x-2\beta_i y-2\gamma_i z+\delta_i \\ &\equiv x^2+y^2+z^2-P_i=0 \qquad (i=1,2,3); \end{aligned}$$

cherchons le lieu des points de l'espace, tels que les puissances de l'un d'entre eux, par rapport à ces trois sphères, soient reliées entre elles par la relation

$$\begin{aligned} &a^2(d_1^2-d_2^2)(d_1^2-d_3^2)+b^2(d_2^2-d_1^2)(d_2^2-d_3^2) \\ &\quad+c^2(d_3^2-d_1^2)(d_3^2-d_2^2)-a^2(b^2+c^2-a^2)\,d_1^2 \\ &\quad-b^2(c^2+a^2-b^2)\,d_2^2-c^2(a^2+b^2-c^2)\,d_3^2+a^2b^2c^2=0, \end{aligned}$$

qui relie les distances d'un point variable à trois points fixes du plan. Ce sera évidemment la quadrique (E) :

$$\begin{aligned} &a^2(P_2-P_1)(P_3-P_1)+b^2(P_3-P_2)(P_1-P_2) \\ &\quad+c^2(P_1-P_3)P_2-P_3)-a^2(b^2+c^2-a^2)S_1 \\ &\quad-b^2(c^2+a^2-b^2)S_2-c^2(a^2+b^2-c^2)S_3+a^2b^2c^2=0, \end{aligned}$$

équation qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &b^2(P_1-P_2-c^2)^2 \\ &\quad+(b^2+c^2-a^2)(P_1-P_2-c^2)(P_1-P_3-b^2) \\ &\quad+c^2(P_1-P_3-b^2) \\ &\quad-S_1[\quad a^2(b^2+c^2-a^2) \\ &\qquad\qquad+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]=0. \end{aligned}$$

(E) est donc bitangente à chacune des sphères S_1, S_2, S_3; les sections de (E) par chacune de ces sphères sont du reste *imaginaires*, ainsi que le montre l'équation précédente et les trois cordes de bicontact sont parallèles.

La proposition à démontrer est d'ailleurs une conséquence de la suivante :

Soit S_1 *une sphère bitangente à une ellipsoïde* (E) *en* A *et* B, *les plans d'intersection des deux surfaces étant imaginaires, par un point quelconque* M *de* (E) *on mène un plan parallèle à une section circulaire réelle de* (E), *qui coupe* AB *en* μ, π_1 *étant la puissance de* M *par rapport à la sphère* S_1, *on a* $\dfrac{\pi_1}{\overline{M\mu_1}^2} = \text{const.}$

Soit en effet

$$S_1 \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}(x-\alpha)^2+\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}(y-\beta)^2=0$$

$$(a>b>c);$$

nous aurons

$$\overline{M\mu}^2 = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2\frac{(a^2-b^2)}{(b^2-c^2)}\frac{c^2}{a^2},$$

$$\frac{(b^2-c^2)}{b^2c^2}\overline{M\mu_1}^2 = (x-\alpha)^2\frac{a^2-c^2}{a^2c^2}+(y-\beta)^2\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}.$$

Or

$$\pi_1 = \left[\frac{(a^2-c^2)}{a^2c^2}(x-\alpha)^2+\frac{(b^2-c^2)}{b^2c^2}(y-\beta)^2\right]c^2,$$

d'où

$$\frac{\pi_1}{\overline{M\mu_1}^2} = \text{const.}$$

Soient maintenant trois sphères S_1, S_2 et S_3; nous aurons

$$\frac{\pi_1}{\overline{M\mu_1}^2} = \frac{\pi_2}{\overline{M\mu_2}^2} = \frac{\pi_3}{\overline{M\mu_3}^2};$$

or, lorsque M varie sur (E), le triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$ reste de forme invariable, $\sqrt{\pi_1}$, $\sqrt{\pi_2}$, $\sqrt{\pi_3}$ sont donc bien reliés par la relation qui relie les distances d'un point variable d'un plan à trois points fixes de ce plan.

[19]

SUR LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS ABSOLUS;

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur honoraire au Lycée Saint-Louis.

1. La suite des nombres premiers absolus

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n \qquad (a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \ldots),$$

rangés par ordre de grandeurs croissantes, étant supposée connue il existe un nombre premier absolu a_{n+1} bien déterminé qui suit immédiatement a_n, on peut donc dire qu'il est fonction des nombres de cette suite. On ne connaît pas de relation algébrique ou transcendante entre a_{n+1} et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ donnant explicitement ou même implicitement a_{n+1}, il n'est même pas certain qu'une pareille relation existe; mais, en arithmétique, la loi de dépendance peut prendre une autre forme, celle d'une règle de calculs permettant de déduire le nombre inconnu d'un nombre donné ou de plusieurs nombres donnés. Telles sont, par exemple, celles qui donnent la racine carrée à une unité près d'un nombre connu, ou le quotient à une unité près de deux nombres connus. C'est une pareille règle que je me suis proposé d'établir pour le calcul de a_{n+1}, sans tâtonnements, en supposant connus $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La méthode repose sur le théorème suivant :

Le plus petit nombre entier, autre que l'unité, premier avec le produit $N = a_1 . a_2 \ldots . a_n$, *de tous* *les nombres premiers absolus jusqu'à* a_n, *est le nombre premier absolu qui suit immédiatement* a_n.

Il n'y a pas de nombre entier, autre que l'unité, moindre que a_n et premier avec N, car tout nombre moindre que a_n et autre que l'unité est, ou l'un des nombres premiers absolus qui précèdent a_n, ou divisible par l'un au moins d'entre eux et, par conséquent, il n'est pas premier avec N. Mais il y a une infinité de nombres entiers supérieurs à a_n et premiers avec N : ce sont tous les nombres premiers absolus supérieurs à a_n dont la suite est illimitée, ou tous les nombres non premiers décomposables en facteurs premiers supérieurs à a_n et dont la suite est aussi illimitée. Il y en a un, a_{n+1}, inférieur à tous les autres et différent de l'unité; je dis qu'il est le nombre premier absolu qui suit immédiatement a_n.

En effet, d'abord a_{n+1} est premier absolu, car sinon il admettrait un diviseur premier absolu b moindre que lui mais supérieur à a_n, sans quoi a_{n+1} ne serait pas premier avec N. Ce nombre b, premier absolu, serait aussi premier avec N et, par suite, a_{n+1} ne serait pas le plus petit nombre entier, autre que l'unité, premier avec N, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'autre part, pour les mêmes raisons, il n'y a pas de nombre premier absolu supérieur à a_n et moindre que a_{n+1}, donc a_{n+1} est bien le nombre premier absolu qui suit immédiatement a_n.

2. *Le nombre* a_{n+1}, *précédemment défini, est moindre que* N. — En effet, il y a au moins un nombre premier avec N autre que l'unité et moindre que N, à savoir N — 1. Il y a exception pour

$$n = 1, \qquad \text{d'où} \qquad N - 1 = 1,$$

ce cas est sans intérêt et nous supposerons par la suite

$$n \geqq 2, \qquad \text{d'où} \qquad N \geqq 6.$$

Il peut arriver qu'il n'y en ait pas d'autre, mais, en général, il y en a plusieurs ; la méthode développée plus loin permet de le reconnaître et, dans tous les cas, de calculer le plus petit d'entre eux qui est le nombre cherché a_{n+1}.

3. Soit $\operatorname{tang} \alpha = \beta$, β étant un nombre donné à volonté ; l'équation algébrique et entière de degré N qui donne les N valeurs de $\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ est

$$(1) \quad \beta\left[1 - C_N^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N}\right) + C_N^4 \operatorname{tang}^4\left(\frac{\alpha}{N}\right) - \ldots\right]$$
$$- \left[N \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N}\right) - C_N^3 \operatorname{tang}^3\left(\frac{\alpha}{N}\right) + \ldots\right] = 0,$$

C_N^q désignant, suivant l'usage, le nombre des combinaisons simples de N objets distincts de q à q. Si l'on appelle α' le plus petit, en valeur absolue, des arcs dont la tangente est β, on a

$$\alpha = K\pi + \alpha',$$

et les N solutions de (1) sont données par la formule

$$\operatorname{tang}\left(\frac{K\pi}{N} + \frac{\alpha'}{N}\right),$$

où l'entier K prend successivement toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Si l'on fait $\beta = 0$, il s'ensuit $\alpha' = 0$ et les N racines de (1) sont de la forme $\operatorname{tang}\left(\frac{K\pi}{N}\right)$. L'équation (1) se réduit alors à

$$(2)\quad N\tan g\left(\frac{\alpha}{N}\right) - C_N^3 \tan g^3\left(\frac{\alpha}{N}\right) + C_N^5 \tan g^5\left(\frac{\alpha}{N}\right) + \ldots + (-1)^{\frac{N-2}{2}} C_N^{N-1} \tan g^{N-1}\left(\frac{\alpha}{N}\right) = 0;$$

elle est seulement de degré $N - 1$, parce que N étant pair, la racine de (1) correspondant à $K = \frac{N}{2}$ est infinie; elle s'abaisse encore au degré $N - 2$ par la suppression du facteur commun $\tan g\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ qui répond à la racine simple nulle donnée par $K = 0$. Les autres racines finies et non nulles sont deux à deux opposées, pour $\beta = 0$, car, aux valeurs p et $N - p$ de l'indice K, répondent deux racines dont les arguments ont une somme égale à π, quel que soit p (sauf $p = 0$ et $p = N$). Donc, après suppression du facteur $\tan g\left(\frac{\alpha}{N}\right)$, le premier membre de (2) ne contient plus que des puissances paires de $\tan g\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ et si l'on pose $x = \tan g^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ on est conduit à l'équation

$$(3)\qquad N - C_N^3 x + C_N^5 x^2 - \ldots + (-1)^{\frac{N-2}{2}} C_N^{N-1} x^{\frac{N-2}{2}} = 0$$

ou $f(x) = 0$, rationnelle et entière en x. Les racines de cette équation (3) sont toutes réelles, positives, distinctes, de la forme $\tan g^2\left(\frac{p\pi}{N}\right)$ où p prend toutes les valeurs entières $1, 2, 3, \ldots, \frac{N-2}{2}$. Leurs valeurs sont rangées dans le même ordre que leurs indices, puisque tous les arguments sont moindres que $\frac{\pi}{2}$.

4. Posons

$$N_1 = \frac{N}{a_1}, \qquad N_2 = \frac{N}{a_2}, \qquad \ldots, \qquad N_n = \frac{N}{a_n},$$

tous ces nombres sont entiers, le premier impair, tous les autres pairs. Si l'on fait toujours $\operatorname{tang}(\alpha) = \beta$, puis $\beta = 0$, les équations qui donnent les valeurs de

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_1}\right), \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_2}\right), \quad \ldots, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_n}\right)$$

se déduisent de (2) par les changements respectifs de N en $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

Pour N_1, qui est impair, si l'on pose

$$x = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_1}\right),$$

après suppression du facteur $\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_1}\right)$, on a

$$(4) \quad f_1(x) \equiv N_1 - C_{N_1}^3 x + C_{N_1}^5 x^2 + \ldots + (-1)^{\frac{N_1-1}{2}} C_{N_1}^{N_1} x^{\frac{N_1-1}{2}} = 0.$$

Pour $N_2, N_3, \ldots, N_n$ qui sont pairs, si l'on pose

$$x = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_2}\right) \text{ ou } \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_3}\right) \cdots \text{ ou } \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_n}\right),$$

on a les équations

$$(5) \quad f_2(x) = 0, \qquad f_3(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n(x) = 0$$

qui se déduisent de (3) par les changements respectifs de N en $N_2, N_3, \ldots N_n$. Toutes ces équations (3), (4), (5) sont rationnelles et entières en x et ont des coefficients numériques entiers qu'on sait calculer quand on connaît la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. J'appelle *racine première* de (3) toute racine

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{p\pi}{N}\right) \qquad \left(p = 1, 2, \ldots, \frac{N-2}{2}\right),$$

où l'indice p est premier avec N. Il est aisé de voir que toute racine première de (3) n'appartient à aucune des équations (4) et (5) et que toute racine non première de (3) appartient à l'une au moins de ces équations. Donc, par de simples divisions algébriques, on sait former une nouvelle équation algébrique et entière en x, à coefficients numériques entiers admettant pour racines toutes les racines premières de (3) et rien que celles-là. Soit

$$(6) \qquad \varphi(x) = 0,$$

cette équation.

Elle a pour plus petite racine en valeur absolue $\tang^2\left(\frac{\pi}{N}\right)$ qui répond à $p = 1$ et que je désignerai par h $\left(\text{pour } n \geqq 2,\ h \leqq \frac{1}{3}\right)$. La plus grande racine répond à une valeur de K, moindre que $\frac{N-2}{2}$, qui est entier pair et par conséquent non premier avec N. Trois cas peuvent se présenter.

Premier cas. — *L'équation* (6) *est du premier degré en* x. — Cela veut dire que la seule racine première de (3) est h, ou que le seul nombre premier avec N et moindre que $\frac{N-2}{2}$ est l'unité. Mais, à l'unique racine h de (6), c'est-à-dire à l'unique racine première de (2), correspondent deux valeurs de K, à savoir 1 et $N - 1$; il en résulte que le plus petit nombre premier avec N et autre que l'unité est $N - 1$, c'est le nombre a_{n+1} cherché.

Ce cas se présente, par exemple, pour $n = 2$ ou $N = 6$; le nombre premier absolu a_3, qui suit immédiatement a_2 ou 3, est bien $N - 1$ ou 5.

Deuxième cas. — *L'équation* (6) *est du second* *degré en x.* — Elle admet toujours pour plus petite racine le nombre h qui répond à $p=1$; l'autre racine x_1 correspond à l'unique indice p_1 autre que l'unité, premier avec N et moindre que $\frac{N-2}{2}$; c'est le nombre cherché a_{n+1}. On sait calculer x_1 et, au besoin, $\frac{1}{x_1}$ avec telle approximation que l'on veut. Or, on a

$$x_1 = \operatorname{tang}^2\left(\frac{a_{n+1}\pi}{N}\right);$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{N}{\pi}\,\overline{\text{arc}}\operatorname{tang}\sqrt{x_1}, \tag{7}$$

cet arc étant le plus petit positif répondant à la tangente $\sqrt{x_1}$. Il est facile à calculer avec telle approximation que l'on veut, quand x_1 est connu avec une approximation suffisante. (Je n'insiste pas sur ces questions classiques.)

Si $x_1 < 1$, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\text{arc}}\operatorname{tang}\sqrt{x_1} = \sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t\frac{x_1^{\frac{2t+1}{2}}}{2t+1} = \sqrt{x_1}\sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t\frac{x_1^t}{2t+1} \\ &\qquad (t \text{ entier positif}); \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Si $x_1 > 1$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\text{arc}}\operatorname{tang}\sqrt{x_1} &= \frac{\pi}{2} - \sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\frac{2t+1}{2}}}{2t+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^t}{2t+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ces deux séries sont convergentes.

Le cas de $x_1 = 1$ est impossible, car il s'ensuivrait

$$a_{n+1} = \frac{N}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{N}{4},$$

qui est fractionnaire. On peut donc calculer a_{n+1} avec telle approximation que l'on veut. Il suffit de le calculer à l'unité près. En effet, soient E la partie entière et f la fraction complémentaire positive données par le calcul ; le nombre entier cherché a_{n+1} est E ou E + 1, mais, sur ces deux entiers consécutifs, l'un est pair et, par suite, à rejeter, l'autre est la valeur de a_{n+1}.

Troisième cas (cas général). — *L'équation* (6) *est d'un degré $i+1$ supérieur ou égal à* 3. — Il y a alors plus d'un indice p, autre que l'unité, premier avec N et moindre que $\frac{N-2}{2}$; soit p_1 le plus petit qui est le nombre cherché a_{n+1}. Il correspond à la racine x_1 de (6) qui suit immédiatement la racine $\tang^2\left(\frac{\pi}{N}\right)$ ou h, qui est connu et qu'on peut calculer directement avec telle approximation que l'on veut.

Cela posé, les racines de (6) étant, dans l'ordre de grandeurs croissantes $h, x_1, x_2, \ldots, x_i$, toutes réelles, positives, distinctes et inférieures à $\tang^2\left(\frac{N-2}{2}\frac{\pi}{N}\right)$ ou $\frac{1}{h}$, proposons-nous de calculer x_1 ou $\frac{1}{x_1}$ et, au besoin, tous les deux, avec telle approximation que l'on voudra. Soit $\varphi'(x)$ la dérivée première de $\varphi(x)$ par rapport à x; on a

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_i}.$$

Il est permis, dans cette identité, de supposer

$$\bmod x < h;$$

alors le second membre est développable en série convergente procédant suivant les puissances croissantes de x, à exposants entiers et positifs, dont le terme général est

$$-x^m\left[\frac{1}{h^{m+1}}+\frac{1}{x_1^{m+1}}+\frac{1}{x_2^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{x_i^{m+1}}\right].$$

D'autre part, si l'on effectue la division indiquée dans le premier membre en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, on a

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\mathrm{A}_m x^m,$$

A_m est une fraction numérique rationnelle donnée par le calcul de la division. Il s'ensuit

$$-\mathrm{A}_m=\frac{1}{h^{m+1}}+\frac{1}{x_1^{m+1}}+\frac{1}{x_2^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{x_i^{m+1}},$$

d'où l'on tire aisément

$$(10)\quad h\,\frac{\mathrm{A}_{m-1}h^m+1}{\mathrm{A}_m h^{m+1}+1}=x_1\,\frac{1+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m+\ldots+\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^m}{1+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{m+1}+\ldots+\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{m+1}}.$$

Chacune des fractions $\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_1}{x_i}$ étant moindre que l'unité, il en résulte que, lorsque m croît indéfiniment par valeurs positives, on a

$$h\lim\frac{\mathrm{A}_{m-1}h^m+1}{\mathrm{A}_m h^{m+1}+1}=x_1.$$

Si l'on pose

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m+\ldots+\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^m=\varepsilon_m,$$

comme toutes les fractions sont positives, on a

$$\varepsilon_{m+1} < \varepsilon_m;$$

donc, quel que soit $m > 0$,

$$h\,\frac{A_{m-1}h^m + 1}{A_m h^{m+1} + 1} > x_1.$$

Il s'agit de déduire de (10) le calcul de x_1, ou de $\frac{1}{x_1}$, ou de tous les deux, avec telle approximation que l'on voudra; l'examen attentif de la question montre que, pour le succès de cette recherche, il convient de commencer par $\frac{1}{x_1}$. De (10) on tire

$$\frac{1}{h}\,\frac{A_m h^{m+1} + 1}{A_{m-1}h^m + 1} = \frac{1}{x_1}\,\frac{1 + \varepsilon_{m+1}}{1 + \varepsilon_m},$$

d'où

$$(10') \qquad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{h}\,\frac{A_m h^{m+1} + 1}{A_{m-1}h^m + 1} = \frac{1}{x_1}\,\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}}{1 + \varepsilon^m} > 0.$$

Il est nécessaire, tout d'abord, de savoir assigner l'entier m', le plus petit de préférence, tel que sous la seule condition $m \geqq m'$, le premier membre de (10′) reste moindre qu'un nombre donné positif ε, aussi petit que l'on voudra.

Soit Δ ce premier membre, on a visiblement

$$\Delta < \frac{1}{x_1}\,\frac{\varepsilon_m}{1 + \varepsilon_m} < \frac{1}{h}\,\frac{\varepsilon_m}{1 + \varepsilon_m};$$

donc, pour que $\Delta < \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{1}{h}\,\frac{\varepsilon_m}{1 + \varepsilon_m} < \varepsilon,$$

d'où

$$\varepsilon_m < \frac{h\varepsilon}{1 - h\varepsilon} \text{ ou } \varepsilon',$$

nombre positif si $\varepsilon < 3$, ce qu'on peut supposer.

Mais les indices $p_2, p_3, \ldots, p_i$ tous premiers avec N des racines $x_2, x_3, \ldots, x_i$ de l'équation (6) sont tous supérieurs à $p_1 + 1$ qui est pair et, par conséquent, non premier avec N; il en résulte que toutes ces racines sont supérieures à $\tang^2\left[\frac{(p_1+1)\pi}{N}\right]$ et, par conséquent, que

$$\varepsilon_m < (i-1)\left\{\frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)}{\tang\left[\frac{(p_1+1)\pi}{N}\right]}\right\}^{2m};$$

d'autre part,

$$\frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)}{\tang\left[\frac{(p_1+1)\pi}{N}\right]} = \frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)\left[1-\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)\tang\left(\frac{\pi}{N}\right)\right]}{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)+\tang\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

$$< \frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)}{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)+\tang\frac{\pi}{N}}$$

$$< \frac{\tang\left[\frac{(N-2)}{2}\frac{\pi}{N}\right]}{\tang\left(\frac{N-2}{2}\frac{\pi}{N}\right)+\tang\frac{\pi}{N}}$$

ou enfin

$$< \frac{1}{1+h};$$

on a donc

$$\varepsilon_m < (i-1)\frac{1}{(1+h)^{2m}};$$

par suite, pour que $\Delta < \varepsilon$, il suffit que

$$(1+h)^{2m} \geqq \frac{i-1}{\varepsilon'},$$

d'où il est facile de déduire m'.

Cela posé, si l'on veut avoir $\frac{1}{x_1}$ à θ près $(6 > \theta > 0)$, il suffira de faire $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$, puis, ayant déterminé m', on calculera h avec une approximation suffisante pour que, h' étant sa valeur approchée, la différence

$$\frac{1}{h}\,\frac{A_{m'}h^{m'+1}+1}{A_{m'-1}h^{m'}+1} - \frac{1}{h'}\,\frac{A_{m'}h'^{m'+1}+1}{A_{m'-1}h'^{m'}+1}$$

soit, en valeur absolue, moindre que $\frac{\theta}{2}$, ce qu'on sait faire. Le second terme de cette différence sera alors, quels que soient les sens des erreurs commises, la valeur approchée de $\frac{1}{x_1}$ à θ près.

Le calcul de p_1 ou a_{n+1} s'achève comme dans le deuxième cas. Soit l la valeur approchée de $\frac{1}{x_1}$ précédemment calculée.

Si $l < 1$, on emploiera la formule (9) en y remplaçant $\frac{1}{x_1}$ par l, et il sera inutile de calculer x_1.

Si $l > 1$, il faudra employer la formule (8) en y remplaçant x_1 par $\frac{1}{l}$.

Dans ces deux cas, il est clair qu'on peut supposer θ assez petit pour que a_{n+1}, donné par la formule (7), soit connu à l'unité près, ce qui suffit pour le déterminer complètement.

Le cas de $l = 1$ est à rejeter, car puisqu'on ne peut pas avoir rigoureusement $x_1 = 1$ (*voir* deuxième cas), on pourra toujours prendre θ assez petit pour qu'on ait $l \neq 1$.

En résumé, dans tous les cas possibles, on peut, par des opérations *régulières*, algébriques ou numériques en partant des nombres donnés $a_1, a_2, \ldots, a_n$, calculer a_{n+1} directement tout aussi bien que si nous connaissions une équation entre cette inconnue et ces données. C'est ce que nous nous proposions d'établir.

[L¹16][L²14]

PROPRIÉTÉ DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES A CENTRES;

Par M. Mathieu WEILL.

I. Cherchons l'enveloppe d'une droite, définie par la condition que la somme des carrés des distances de n points donnés du plan, à cette droite, soit égale à une constante K^2.

Prenons comme axes des coordonnées les axes principaux d'inertie du système des n points; nous aurons

$$\Sigma x_1 = 0, \qquad \Sigma y_1 = 0, \qquad \Sigma x_1 y_1 = 0.$$

Si la droite mobile a pour équation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

on aura

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0,$$
$$A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + np^2 - K^2 = 0,$$

en posant

$$\Sigma x_1^2 = A, \qquad \Sigma y_1^2 = B.$$

Prenons le déterminant fonctionnel, et égalons-le à zéro; nous aurons la relation

$$\begin{vmatrix} x & y & -1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & np \end{vmatrix} = 0.$$

Joignons à cette relation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

et éliminons x; il vient

$$y = \cos\beta \, \frac{K^2 - B}{np},$$

ou

$$\frac{y}{\frac{K^2 - B}{n}} = \frac{\cos\beta}{p};$$

de même on trouve

$$\frac{x}{\frac{K^2 - A}{n}} = \frac{\cos\alpha}{p},$$

d'où l'équation de l'enveloppe

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{n}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{n}} = 1.$$

Quant au point de contact de la droite avec son enveloppe, on l'obtient en projetant sur la droite le centre des distances proportionnelles des points donnés, affectés de coefficients égaux à leurs distances respectives à la droite (*voir* ma Note sur une propriété de certaines courbes et surfaces enveloppes).

Étudions le cas où la courbe est une ellipse : le cas de l'hyperbole donnerait des résultats analogues.

Supposons, d'abord, $n = 2$, et donnons-nous une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

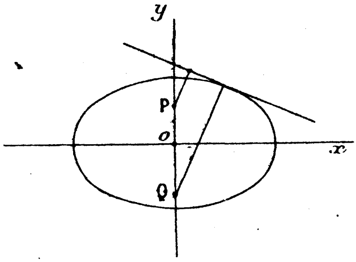
On trouve facilement, en identifiant cette équation avec celle de l'enveloppe, qui est, ici,

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{2}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{2}} = 1,$$

qu'il existe, sur le petit axe, deux points fixes P et R, dont la distance au centre est $\sqrt{a^2 - b^2}$, et répondant au problème; d'où résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe, sur le petit axe d'une ellipse, et à une distance du centre égale à* C, *deux points* P *et* Q, *tels que la somme des carrés de leurs*

Fig. 1.



distances à une tangente quelconque à l'ellipse est constante et égale à $2a^2$.

Supposons $n = 3$; nous aurons

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{3}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{3}} = 1$$

et

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$B = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Éliminant x_2, y_2, x_3, y_3, il vient pour lieu du point $x_1 y_1$ et, par suite, des deux autres points, l'ellipse

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\frac{2A}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2B}{3}} = 1$$

avec

$$A = K^2 - 3a^2,$$
$$B = K^2 - 3b^2.$$

Les trois points forment un triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse (2); d'où résulte le théorème suivant :

THÉORÈME.— *Étant données une ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

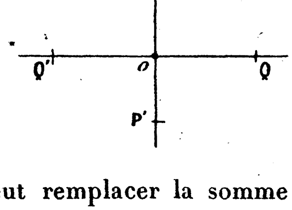
et une constante K^2, *il existe trois points fixes* P, Q, R, *tels que la somme des carrés des distances de ces trois points à une tangente quelconque à l'ellipse est égale à* K^2. *Ces trois points sont les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse*

$$\frac{x^2}{\frac{2(K^2 - 3a^2)}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2(K^2 - 3b^2)}{3}} = 1.$$

On peut remplacer P, Q, R, par trois autres points fixes P', Q', R', quelconques, formant un triangle semi-régulier inscrit dans cette même ellipse.

Il est inutile de supposer n supérieur à 3, car on

Fig. 2.



sait qu'on peut remplacer la somme des carrés des distances de n points fixes à une droite quelconque, par la somme des carrés des distances de trois points fixes à cette droite, ces trois points étant les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans une ellipse ayant pour axes les axes principaux d'inertie du système des n points ; ces trois points peuvent, d'ailleurs, être remplacés par trois autres, ayant les mêmes propriétés.

Nous envisagerons, cependant, le cas de $n = 4$, en considérant quatre points P, Q, P', Q', situés sur les axes de l'ellipse donnée, et symétriques deux à deux par rapport au centre.

En posant

$$\text{OQ} = d, \qquad \text{OP} = d',$$

on trouve

$$d^2 + 2a^2 = d'^2 + 2b^2 = \frac{K^2}{2}.$$

Donc, si K^2 est donné, les points sont déterminés ; on a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Sur les axes d'une ellipse donnée, il existe quatre points fixes, symétriques par rapport au centre et tels que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque à l'ellipse est égale à une constante donnée.*

Il faut qu'on ait $K^2 > 4a^2$, pour que les points soient réels.

En particulier, si l'on a $K^2 = 4a^2$, les quatre points se réduisent à trois, dont le centre, qui compte pour deux, d'où un énoncé intéressant.

Il est facile de généraliser les résultats précédents. Cherchons l'enveloppe d'une droite telle que la somme des carrés des distances de n points fixes à cette droite, multipliés respectivement par des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, soit égale à une constante K^2.

En prenant pour axes de coordonnées les axes principaux d'inertie du système des n points, affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on aura

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n &= 0,\\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n &= 0,\\ \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots &= 0. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} A &= \Sigma \alpha_1 x_1^2,\\ B &= \Sigma \alpha_1 y_1^2,\\ C &= \Sigma \alpha_1, \end{aligned}$$

on trouve pour équation de l'enveloppe

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{C}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{C}} = 1.$$

Réciproquement, une conique à centre étant donnée, on peut envisager des points fixes attachés à cette ellipse et répondant au problème posé; d'où un grand nombre de propriétés nouvelles des coniques à centre. On a, par exemple, le résultat suivant : prenant, sur l'axe focal de l'ellipse, deux points conjugués harmoniques par rapport aux foyers, et K^2 étant une constante quelconque, on pourra toujours trouver deux valeurs α_1, α_2, telles qu'on ait

$$\alpha_1 \delta_1^2 + \alpha_2 \delta_2^2 = K^2,$$

δ_1 et δ_2 étant les distances des deux points fixes à une tangente quelconque à l'ellipse. Les valeurs α_1 et α_2 ne sont pas, nécessairement, positives toutes les deux.

II. Cherchons l'enveloppe d'un plan tel que la somme des carrés des distances de n points donnés à ce plan soit égale à une quantité donnée K^2.

En prenant pour axes de coordonnées les axes principaux d'inertie du système des n points, nous aurons

$$\Sigma x_1 = 0, \qquad \Sigma y_1 = 0, \qquad \Sigma z_1 = 0,$$
$$\Sigma x_1 y_1 = 0, \qquad \Sigma y_1 z_1 = 0, \qquad \Sigma z_1 x_1 = 0.$$

Posons

$$\Sigma x_1^2 = A, \qquad \Sigma y_1^2 = B, \qquad \Sigma z_1^2 = C,$$

le plan mobile ayant pour équation

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0;$$

on aura

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma + np^2 = K^2.$$

Nous en déduirons

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & C\cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & -1 \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & np \\ \cos\alpha & \cos\beta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les colonnes du premier déterminant par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et si l'on ajoute ensuite les colonnes, on déduit

$$\begin{vmatrix} x & y & p \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & K^2 - np^2 \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{K^2 - A}{n} \frac{\cos\alpha}{p},$$
$$y = \frac{K^2 - B}{n} \frac{\cos\beta}{p},$$
$$z = \frac{K^2 - C}{n} \frac{\cos\gamma}{p}.$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$\frac{x^2}{\frac{K^2-A}{n}}+\frac{y^2}{\frac{K^2-B}{n}}+\frac{z^2}{\frac{K^2-C}{n}}-1=0;$$

c'est une quadrique à centre.

Réciproquement, considérons un ellipsoïde rapporté à ses axes et un plan tangent

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}.$$

Exprimons que la somme des carrés des distances de deux points fixes à un plan tangent quelconque est constante, nous aurons

$$\begin{aligned} x'+x''&=0, & x'y'+x''y''&=0,\\ y'+y''&=0, & x'z'+x''z''&=0,\\ z'+z''&=0, & y'z'+y''z''&=0. \end{aligned}$$

On en déduit que deux des quantités x', y', z' sont nulles; soit, par exemple,

$$x'=0,\qquad y'=0;$$

d'où

$$x''=0,\qquad y''=0,$$

$$a^2=b^2=z'^2+c^2=\frac{K^2}{2}.$$

Donc, l'ellipsoïde est de révolution autour du plus petit de ses axes, et sur l'axe de révolution il existe deux points P, Q, symétriques par rapport au centre de l'ellipsoïde, et tels que la somme des carrés des distances de ces deux points à un plan tangent quelconque est égale à $2a^2$.

Un ellipsoïde étant donné, cherchons trois points fixes tels que la somme des carrés de leurs distances à un plan tangent quelconque à l'ellipsoïde soit égale à une constante K^2; on trouve, facilement, les conditions

$$\begin{aligned} x'+x''+x''' &= 0, & \Sigma x'y' &= 0,\\ y'+y''+y''' &= 0, & \Sigma x'z' &= 0,\\ z'+z''+z''' &= 0, & \Sigma y'z' &= 0,\end{aligned}$$

et, en posant

$$\Sigma x'^2 = A, \qquad \Sigma y'^2 = B, \qquad \Sigma z'^2 = C,$$

on trouve

$$A + 3a^2 = B + 3b^2 = C + 3c^2 = K^2.$$

D'autre part, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

est, évidemment, nul; donc son carré est nul; or, ce carré n'est autre que A, B, C.

On a donc

$$A, \quad B, \quad C = 0.$$

Par suite, les trois points, s'ils existent, sont dans l'un des plans principaux de l'ellipsoïde.

Soit, par exemple, $A = 0$, d'où $x' = x'' = x''' = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} y'+y''+y''' &= 0,\\ z'+z''+z''' &= 0,\\ y'z'+y''z''+y'''z''' &= 0,\\ y'^2+y''^2+y'''^2 &= B,\\ z'^2+z''^2+z'''^2 &= C.\end{aligned}$$

L'élimination de y'', y''', z'', z''' donne pour le lieu du point $x'y'$ et, par symétrie, des deux autres points, la conique

$$\frac{y^2}{\frac{2B}{3}} + \frac{z^2}{\frac{2C}{3}} = 1,$$

et l'on a

$$B = K^2 - 3b^2 = 3a^2 - 3b^2,$$
$$C = K^2 - 3c^2 = 3a^2 - 3c^2,$$
$$K^2 = 3a^2.$$

On peut donc dire qu'il existe, dans le plan des yz, trois points fixes P, Q, R tels que la somme des carrés de leurs distances à un plan tangent quelconque est constante. On peut remplacer le système de ces trois points par une infinité d'autres systèmes; chacun d'eux est constitué par les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans la conique

$$\frac{y^2}{2(a^2 - b^2)} + \frac{z^2}{2(a^2 - c^2)} = 1.$$

Résultats analogues pour les deux autres plans principaux de l'ellipsoïde.

Des considérations du même genre conduisent encore au résultat suivant : *Sur les axes d'un ellipsoïde on peut trouver six points, deux à deux symétriques par rapport au centre, et tels que la somme des carrés de leurs distances à un plan tangent quelconque est constante.*

Appelons d^2, d'^2, d''^2, les carrés des distances de ces points au centre, et K^2 la constante, on trouve

$$d^2 + 2a^2 = d'^2 + 2b^2 = d''^2 + 2c^2 = \frac{K^2}{2}.$$

Donc, pour une valeur donnée K^2, le problème a une solution; si K^2 n'est pas donné, le problème a une simple infinité de solutions. On peut évidemment chercher, de même que nous l'avons fait en Géométrie plane, des points fixes tels que les distances de ces points à un plan tangent quelconque soient liées par la relation

$$\alpha_2\delta_1^2 + \alpha_2\delta_2^2 + \ldots + \alpha_n\delta_n^2 = K^2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, K^2 étant des constantes.

[F8fβ]

SUR LES CERCLES DE PAPPUS : FORMULE DE PAPPUS, FORMULE DE SCHUBERT GÉNÉRALISÉE;

Par M. G. FONTENÉ.

1. *Préliminaires.* — Étant donnés deux cercles *quelconques* (O) et (O′), dont nous supposerons, par exemple, que l'un est intérieur à l'autre, si l'on considère une suite de cercles (ω) tangents à chacun des cercles donnés et tels que deux cercles consécutifs sont tangents entre eux, il existe entre deux cercles consécutifs de cette série une relation doublement quadratique. Si ρ est le rayon de l'un de ces cercles, y l'ordonnée du centre relative à la droite OO′, la relation entre ρ et y est de la forme

$$y^2 = a\rho^2 + b\rho + c,$$

comme on le voit, en observant que le lieu du point ω est une conique de foyers O et O′; on détermine les constantes en faisant $y = 0$, puis $\rho = 0$. Si l'on pose

$$p, q = \frac{1}{2}(r - r' \pm d) \qquad (r > r'),$$

on trouve

$$y^2 = -\frac{(r + r')^2 - d^2}{d^2}(\rho - p)(\rho - q);$$

on peut écrire, en introduisant $\frac{y}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho}$,

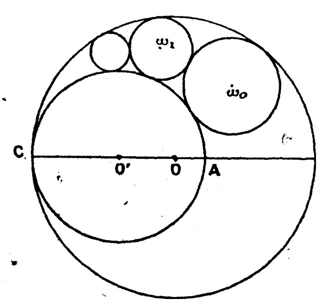
$$\frac{\left[\frac{(r-r')^2-d^2}{\rho}-2(r-r')\right]^2}{4d^2}+\frac{(r-r')^2-d^2}{(r+r')^2-d^2}\frac{y^2}{\rho^2}=1.$$

Le système des cercles (ω) peut se fermer avec p cercles, sous une condition entre d, R, R′.

2. *Cercles de Pappus. — Lorsque les deux cercles* (O) *et* (O′) *sont quelconques, les quantités* ρ_n *et* y_n *relatives au cercle* (ω_n) *ne s'expriment pas en fonction algébrique de* n; *mais cela se produit lorsque les deux cercles* (O) *et* (O′) *sont tangents : on a alors les cercles de Pappus, qui offrent ainsi un cas de dégénérescence des formules.*

Théorème. — *Considérons* (*fig.* 1) *deux cercles* (O) *et* (O′), *tangents intérieurement au point* C, *et une*

Fig. 1.



suite de cercles ..., (ω_{-2}), (ω_{-1}), (ω_0), (ω_1), (ω_2), ..., *dont chacun touche les deux cercles* (O) *et* (O′), *dont chacun est, en outre, tangent au précédent; le sens des indices croissants étant celui de la figure,* *le rayon ρ_n du cercle d'indice n, et l'ordonnée y_n de son centre par rapport à la droite* CB, *comptée positivement au-dessus de* CB, *sont donnés par les formules*

$$(1) \qquad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_0}{2\rho_0} = n,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{d}{rr'} n \left(\frac{y_0}{\rho_0} + n\right);$$

cette dernière formule est de la forme

$$\frac{1}{\rho_n} = A + Bn + Cn^2.$$

3. *La formule* (1). — En inversant la figure par rapport au pôle C, on transforme les cercles (O) et (O′) en deux droites, qui sont par exemple les tangentes en B et en A aux cercles donnés; on a alors, les cercles transformés (ω') étant égaux, et les indices croissant comme il a été dit,

$$y'_n - y'_{n-1} = 2\rho'$$

ou

$$\frac{y'_n}{2\rho'} - \frac{y'_{n-1}}{2\rho'} = 1;$$

comme le rapport $\frac{y}{\rho}$ se conserve par homothétie, on a aussi

$$(\alpha) \qquad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_{n-1}}{2\rho_{n-1}} = 1;$$

on en déduit la formule (1). Pappus (*Collections mathématiques*, Livre IV, th. XV) donne la relation (α) sous la forme

$$\frac{y_n}{2\rho_n} = \frac{y_{n-1} + 2\rho_{n-1}}{2\rho_{n-1}};$$

il n'écrit pas la formule générale (1). Mais il en donne deux cas particuliers : d'une part, le cas où le cercle (ω_0)

est décrit sur AB comme diamètre, et l'on a alors

$$(1') \qquad y_n = 2\rho_n \times n;$$

d'autre part, le cas où le cercle (ω_0) est tangent à la droite AB, et l'on a alors

$$(1'') \qquad y_n = 2\rho_n \times \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

La relation (α) peut être regardée comme résultant de la décomposition d'une relation doublement quadratique

$$\left(\frac{y'}{2\rho'} - \frac{y}{2\rho}\right)^2 = 1.$$

4. *La formule* (2). — Le lieu des points ω, avec

$$\omega O + \omega O' = r + r',$$

est une ellipse de foyers O et O', passant en C, et l'on a

$$2a = r + r', \qquad 2c = d = r - r', \qquad b^2 = rr'.$$

Si on la rapporte à ses axes, et si l'on observe que ρ s'exprime linéairement en fonction du rayon vecteur $O'\omega$, par suite en fonction de l'abscisse x du centre ω, que, d'ailleurs, y est nul pour $\rho = 0$ ou $\rho = d$, on peut écrire sans calcul

$$y^2 = \frac{4rr'}{d^2}\rho(d-\rho) \qquad \left[\frac{4rr'}{d^2} = \frac{b^2}{a^2} : \frac{c^2}{a^2}\right],$$

$$\frac{y^2}{4\rho^2} = \frac{rr'}{d}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{d}\right),$$

ou, avec l'indice n,

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'}\left(\frac{y_n}{2\rho_n}\right)^2;$$

en retranchant de cette formule la formule analogue pour l'indice o, et en tenant compte de la formule (1), on obtient la formule (2). Les constantes y_0 et ρ_0 des formules (1) et (2) sont liées par la relation (β); on peut se donner $\frac{y_0}{2\rho_0}$ et calculer ρ_0.

Dans les *Nova Acta* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. X, 1793, p. 74, un géomètre, nommé F.-T. Schubert, en vue de démontrer les formules (1') et (1'') de Pappus, a obtenu, *de proche en proche*, le résultat auquel conduit la formule (β) dans les deux cas particuliers auxquels correspondent ces formules (1') et (1'') :

$$(2') \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} n^2,$$

$$(2'') \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2;$$

il donne seulement ces formules résolues par rapport à ρ_n au lieu de $\frac{1}{\rho_n}$.

5. *Cas où les cercles* (O) *et* (O') *sont tangents extérieurement.* — Il faut alors, au second membre de la formule (β), remplacer $\frac{1}{d}$ par $-\frac{1}{d}$, ce qui ne modifie d'ailleurs pas la formule (2) :

$$[\beta] \qquad \frac{1}{\rho_n} = -\frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(\frac{y_n}{2\rho_n}\right)^2.$$

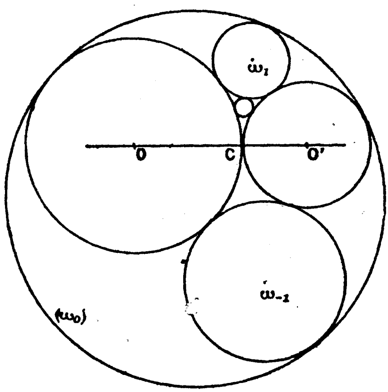
Parmi les cercles (ω), il en existe ici un et un seul qui enveloppe les cercles (O) et (O'); le rayon de ce cercle doit être considéré comme négatif dans les formules. Si, comme dans la figure 2, ce cercle est le cercle (ω_0), il faut faire $\rho_0 < 0$; c'est ainsi que, pour $y_0 = 0$, la formule [β] donne $\rho_0 = -d$.

6. *Formule pour un cas particulier.* — Les deux cercles (O) et (O′) étant tangents extérieurement (*fig.* 2), *si l'on prend comme cercle* (ω_0) *la conique formée d'une tangente commune extérieure et de la droite à l'infini*, ρ_0 et y_0 sont infinis, avec

$$\frac{y_0}{2\rho_0} = \frac{+\sqrt{rr'}}{d},$$

la tangente commune extérieure étant celle dont les

Fig. 2.



points de contact avec les cercles (O) et O′) sont au-dessus de OO′; on a ainsi

$$\frac{y_n}{2\rho_n} = \frac{\sqrt{rr'}}{d} + n, \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{d}{rr'} n\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{d} + n\right);$$

pour $n = 1$ et $n = -1$, on a bien

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\rho_{-1}}} = \left|\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r'}}\right|.$$

La distance z *du centre* ω *à la tangente commune* *est donnée par la formule*

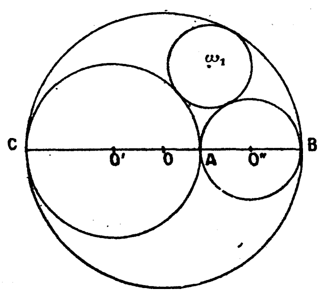
$$(3) \qquad \frac{z_n}{\rho_n} = 2n^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{z_n + \rho_n}{2\rho_n} = n^2,$$

qu'on peut établir sous la seconde forme en inversant la figure par rapport au point de contact de la tangente commune avec l'un des cercles (O), (O′); quand on change n en $-n$, la valeur du rapport ne change pas. Pour $n = 2$, le cercle ω_2 est tangent à trois cercles (O), (O′), (ω_1), tangents entre eux deux à deux et qui ont une tangente commune extérieure; on a alors

$$\frac{z}{\rho} = 7.$$

7. *La figure* 3. — Le cercle (ω_1) de la figure 3 est tangent à trois cercles (O), (O′), (O″), tangents deux à deux, et qui ont leurs centres en ligne droite. On a alors, en considérant par exemple cette figure comme

Fig. 3.



un cas particulier de la figure 2, et en appliquant la formule [β],

$$y_1 = 2\rho_1,$$

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{r} + \frac{r}{r'r''} = \frac{r^2 + r'^2 + r''^2}{2rr'r''}.$$

J'ai donné, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 11[e] année, p. 68, une démonstration par le calcul de la formule $y_1 = 2\rho_1$.

Chacun des trois triangles curvilignes situés au-dessus de CB donne lieu à une série de cercles (ω); pour trois de ces cercles qui ont même indice, l'axe de similitude directe est la droite CB.

[L¹5b]

SUR LA CONDITION POUR QUE LES TANGENTES AUX PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT A UNE ELLIPSE TOUCHENT UN CERCLE;

PAR M. F. BALITRAND.

Étant donnée l'ellipse qui a pour équation tangentielle

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

ainsi qu'un point $P(\alpha, \beta)$ de son plan, on peut se proposer de chercher à quelle condition les tangentes aux pieds des normales à l'ellipse issues de P enveloppent un cercle.

On sait que ces tangentes touchent une parabole, dite « parabole de Chasles », ayant pour équation tangentielle

$$c^2uv - \beta u + \alpha v = 0.$$

L'ellipse et la parabole déterminent un faisceau tangentiel représenté par

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 - 1) + c^2uv - \beta u + \alpha v = 0.$$

Pour qu'il renferme le cercle

$$R^2(u^2+v^2)-(ux_0+vy_0+1)^2=0,$$

de centre (x_0, y_0) et de rayon R, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\lambda a^2}{R^2-x_0^2}=\frac{\lambda b^2}{R^2-y_0^2}=\frac{\lambda}{1}=\frac{c^2}{-2x_0y_0}=\frac{\beta}{2x_0}=\frac{\alpha}{-y_0};$$

d'où, en éliminant λ,

$$R^2-x_0^2=a^2,\qquad R^2-y_0^2=b^2,\qquad x_0=\frac{c^2}{\alpha},\qquad y_0=-\frac{c^2}{\beta}.$$

On déduit de là les deux équations

$$x_0^2-y_0^2+c^2=0,\qquad \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{c^2}=0.$$

La première représente l'hyperbole équilatère qui a pour sommets réels les foyers imaginaires de l'ellipse donnée et la seconde la kreuzcurve hyperbolique correspondante; et l'on peut observer que ces deux courbes ne changent pas quand on remplace l'ellipse donnée par une ellipse homofocale.

Les points de contact de la parabole de Chasles avec les axes ont pour équations

$$c^2u+\alpha=0,\qquad c^2v-\beta=0;$$

ce sont donc les projections du centre C du cercle sur les axes. Quant aux relations

$$R^2-x_0^2=a^2,\qquad R^2-y_0^2=b^2,$$

elles sont faciles à interpréter géométriquement. Elles prouvent que les cercles tels que C détachent sur les axes de l'ellipse, quel que soit le point P, des segments égaux aux axes $2b$ et $2a$ de cette ellipse.

En résumé on a les propositions suivantes :

1° *Le lieu des points* P *tel que les tangentes aux pieds des normales à l'ellipse, issues de ces points, enveloppent un cercle est la kreuzcurve hyperbolique correspondant à l'hyperbole équilatère*

$$x^2 - y^2 + c^2 = 0.$$

2° *Lorsque le point* P *décrit la kreuzcurve, le lieu des centres des cercles correspondants est l'hyperbole équilatère ci-dessus.*

3° *Tous ces cercles détachent sur les axes des segments égaux aux axes* $2b$ *et* $2a$ *de l'ellipse.*

4° *L'ellipse donnée et un cercle déterminent un faisceau tangentiel de coniques qui renferme une et une seule parabole. On l'obtient en projetant le centre du cercle sur les axes et construisant la parabole qui leur est tangente en ces points.*

5° *Le point* P *restant fixe, tous les cercles qu'on obtient en remplaçant l'ellipse donnée par une ellipse homofocale quelconque sont concentriques.*

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES SUR LA QUESTION DE CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1918;

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

1° On envisage, dans cette question, les points communs M et M' à un cercle fixe (ω), ayant son centre à l'origine O, et à un cercle variable (γ) passant par deux points fixes A et B de Ox [1].

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

Si la corde commune au cercle (ω) et au cercle décrit sur AB comme diamètre coupe Ox au point N, ce point N est le centre radical du système formé par ces deux cercles et l'un quelconque des cercles (γ). Il en résulte que *toutes les cordes* MM′ *passent par ce point* N.

Si le cercle de diamètre AB passe par les points où le cercle (ω) est rencontré par Oy, le point N se confond avec O et *les points* M *et* M′ *sont diamétralement opposés sur le cercle* (ω).

Le centre C′ du cercle (γ') passant par M et M′ et orthogonal au cercle (γ), de centre C, n'est autre que le pôle de MM′ par rapport à ce cercle (γ).

Si le point N se confond avec O, ainsi qu'il vient d'être dit, on a

$$OC.OC' = -\overline{OM}^2.$$

Le lieu du point C′ est donc inverse de celui du point C par rapport à O, et, comme celui-ci est la droite élevée à AB en son milieu, *celui de* C′ *est un cercle passant par* O *et ayant son centre sur* Ox.

2° Si V et V′ sont les vitesses des points M et M′, ces vitesses sont proportionnelles à NM et NM′, puisque le point N est fixe ; on voit de plus qu'elles sont de même sens ou non, suivant que N est intérieur ou non au segment NN′. On a donc, en grandeur et signe,

$$\frac{V}{V'} = -\frac{NM}{NM'}.$$

Si donc on prend sur MM′ le point P, tel que

$$\frac{V}{V'} = \frac{PM}{PM'},$$

le point P est le conjugué harmonique de N par rapport à M et M'. *Ce point* P *décrit donc la polaire du point* N *par rapport au cercle* (ω), droite perpendiculaire à Ox.

CORRESPONDANCE.

M. **M. d'Ocagne.** — *Sur les centres de courbure des cissoïdes et conchoïdes.* — M. Bouvaist vient d'indiquer, pour la détermination des centres de courbure des courbes dont le rayon vecteur est une fonction linéaire de ceux d'autres courbes, comptés sur la même droite (*N. A.*, 1918, p. 172), une méthode qui est identique à celle que j'ai fait connaître, en 1896, dans mon *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* (p. 287). Cette méthode repose sur la relation entre le centre de courbure d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires et la normale au lieu décrit par l'extrémité de sa sous-normale polaire. C'est cette relation que M. Bouvaist a cherché à établir en résolvant le ***Problème II*** de sa Note. La solution qu'il a trouvée n'est peut-être pas aussi simple que celle donnée à l'endroit cité (p. 286), que j'ai d'ailleurs eu l'occasion de rappeler récemment dans les *Nouvelles Annales* (1918, p. 33).

Je reproduis le résultat de M. Bouvaist en me servant de ses propres notations : si la normale au lieu décrit par l'extrémité N de la sous-normale polaire rencontre OM en P, et que H soit le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur la normale MN, et K le conjugué harmonique de N par rapport à M et H, le centre de courbure γ est le milieu de NK.

Voici maintenant le résultat dont je rappelle plus haut l'origine : si la perpendiculaire élevée en N à MN coupe OM en Q, le centre de courbure γ est sur la droite qui joint le point Q au milieu de NP.

Ramener l'une à l'autre ces deux constructions peut faire l'objet d'un exercice de Géométrie élémentaire à proposer à vos lecteurs.

M. **L. Poli.** — *Au sujet de la question* **1854** (1900, p. 288; 1917, p. 398). — On y demande de tracer au moyen de la règle seulement l'hyperbole de Kiepert d'un triangle, étant placés les sommets du triangle, les centres de ses cercles de Neuberg et les centres de ses cercles de *Mackay*.

J'ignore ce que sont les cercles de Mackay. Peut-être faut-il lire : les cercles de *M'Cay*. En tout cas, proposée de cette seconde manière la question est assez facilement résoluble et peut être de nature à intéresser quelque lecteur des *Nouvelles Annales :*

Étant placés les 3 *sommets d'un triangle, les* 3 *centres de ses cercles de Neuberg et les* 3 *centres de ses cercles de M'Cay, tracer par points et au moyen de la règle seulement l'hyperbole de Kiepert du triangle.*

Pour mémoire : les cercles de M'Cay sont déterminés par le centre de gravité du triangle et par deux sommets de son second triangle de Brocard. (*Cf.* par exemple F.G.M., *Exercices de Mécanique*, p. 704.)

BIBLIOGRAPHIE.

MAURICE D'OCAGNE. — *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. II. 1 volume in-8 (25-16) de 364 pages, avec 299 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1918. Prix : 18fr.

Dans le compte rendu du Tome I du *Cours* de M. M. d'Ocagne ([1]), j'ai indiqué les idées directrices de l'enseignement actuel de la Géométrie à l'École Polytechnique. Le Tome II, consacré à des applications diverses, est particulièrement propre à illustrer le caractère de cet enseignement, dont le but essentiel est, je le rappelle, de montrer, par la variété des sujets abordés, les ressources qu'offre la Géométrie pure dans l'étude des questions les plus dissemblables. En voici l'analyse sommaire :

Cinématique appliquée. — On étudie les mécanismes entrant le plus couramment dans la composition des machines ou présentant un intérêt particulier : engrenages, courbes roulantes, cames, excentriques, systèmes articulés plans et gauches. Le Chapitre se termine par l'exposition des méthodes récemment inventées de la *Cinématique graphique*, qui permettent de déterminer, par des constructions simples, les vitesses et les accélérations de divers points d'un mécanisme plan.

([1]) *Nouvelles Annales*, novembre 1917, p. 428.

Stéréotomie. — La Stéréotomie, qui fournit d'assez jolies applications de la Géométrie descriptive, mérite à ce titre de ne pas être complètement exclue de l'enseignement. On étudie quelques-unes des voûtes les plus intéressantes sous le rapport de l'appareillage : arche elliptique, descentes, arche biaise, berceau coudé, trompe cylindrique en tour ronde, arrière-voussure de Marseille, voûte sphérique, voûte d'arêtes en tour ronde.

Statique graphique. — Après l'exposition des tracés fondamentaux reposant sur la considération du polygone funiculaire, viennent les applications aux systèmes réticulaires (méthode des sections, méthode des nœuds) et à la détermination des forces élastiques dans les pièces chargées.

Calcul graphique. — Ce Chapitre et les suivants sont consacrés à des sujets qui seront nouveaux pour beaucoup de lecteurs. Il est traité, dans celui-ci, de la résolution graphique des équations (équations linéaires, méthode des *orthogones* pour les équations algébriques de degré quelconque) ; des courbes intégrales et de leur tracé approximatif par la méthode de Massau. Une application importante est faite à la construction des lignes d'efforts et de moments fléchissants en Statique graphique. Le Chapitre se termine par l'intégration graphique approximative des équations différentielles.

Calcul grapho-mécanique. — Description et théorie de divers appareils d'intégration mécanique : planimètres, intégromètres, analyseur harmonique, intégraphes.

Nomographie. — L'auteur a résumé ici les faits les plus importants de la science dont il est, comme on sait, le fondateur. Il passe en revue les nomogrammes à entre-croisements (abaques cartésiens, hexagonaux); les nomogrammes à alignements, où la considération des coordonnées parallèles rend de grands services; pour les équations à plus de trois variables, les nomogrammes à double alignement, les systèmes cotés mobiles. A titre d'application, il étudie en détail la résolution nomographique des triangles sphériques.

Un *Appendice* renferme des notes complémentaires : sur les systèmes articulés (théorème de Kempe, en vertu duquel toute courbe algébrique peut être décrite au moyen d'un système articulé) ; sur la statique graphique de l'espace ; sur l'intégration grapho-mécanique de l'équation de Riccati ; sur l'application de la Nomographie à l'intégration graphique.

On voit quelle est la richesse de cet Ouvrage, où l'on trouve pour la première fois l'exposition didactique de méthodes récentes (cinématique graphique, calcul graphique, intégration mécanique des équations différentielles) que l'on ne pouvait guère étudier jusqu'ici que dans des Mémoires souvent ardus. Il convient d'ajouter que la plupart des démonstrations sont originales, en sorte que le livre porte presque à chaque page la marque de son auteur.

Il serait trop long de signaler l'excellence des détails. Je veux seulement attirer l'attention sur l'heureuse notion des *modules*, dont l'emploi systématique supprime bien des incertitudes dans la construction et l'interprétation des diagrammes par lesquels on traduit les relations numériques. R. B.

QUESTIONS.

2368. Parmi les cubiques qui se transforment en elles-mêmes par la transformation par points réciproques par rapport à un triangle donné, on considère celles qui sont les lieux des points tels que les droites qui les joignent à leurs réciproques passent par un point fixe P; on sait que la cubique correspondant au point P touche au centre de gravité G la droite GP. Les perpendiculaires élevées sur la droite GP aux points où elle coupe les côtés rencontrent celles élevées en G sur les médianes correspondantes en trois points en ligne droite; démontrer que cette droite passe par le centre de courbure de la cubique au point G.

En déduire que le lieu des centres de courbure de toutes les cubiques considérées au point G est une cubique qui devient une trisectrice de de Longchamps quand le triangle est équilatéral. R. GOORMAGHTIGH.

2369. Démontrer que le faisceau des ellipses inscrites dans un losange constitue la projection commune, sur le plan de la figure, des lignes de courbure d'un système d'ellipsoïdes admettant chacun pour section principale moyenne une de ces ellipses, et, se donnant le point de contact de l'une d'elles avec un côté du losange circonscrit, construire géométriquement les longueurs des axes de l'ellipsoïde correspondant.

M. D'OCAGNE.

2370. Lorsqu'un cercle roule sur une droite, le symétrique du centre de courbure de la roulette décrite par un point M, invariablement lié au cercle, par rapport au centre instantané de rotation, se trouve à chaque instant sur la polaire du point M par rapport au cercle roulant. A. PELLET.

2371. Soient, à un instant I, le centre instantané et I_1 le point diamétralement opposé à I sur le cercle des centres, dans le mouvement d'une figure plane; C le centre de courbure de la roulette décrite par un point M de cette figure; la polaire du point M, par rapport au cercle ayant C pour centre et CI pour rayon, passe par le point I_1. A. PELLET.

2372. $\theta(x)$ étant la fonction de Jacobi, $\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}x^n = \theta(x)$, convergente pour toutes les valeurs de x, module de q étant inférieur à 1, $\theta'(x)$ la dérivée de cette fonction, on a :

$$\theta'(-q^{2n+1}) = (-1)^n q^{-(n^2+3n)}\,\theta'(-q).$$

A. PELLET.

ERRATA.

Page 25, ligne 8, *au lieu de* O**29**, *lire* O^1**2**q.

Page 155, ligne 13, *au lieu de* 1915, *lire* 1912; ligne 19, *au lieu de* quadrique, *lire* quartique.

Page 193, ajouter après la ligne 4 :

Posons

$$\frac{f}{-u-iv} = \frac{-u+iv}{f} = \lambda;$$

il vient après simplification

$$\frac{a_i}{f} = \sqrt[3]{\lambda} + \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda}}$$

et

$$\frac{m_i}{f} = \sqrt[3]{\lambda i} + \sqrt{\frac{1}{\lambda i}}.$$

Telles sont les deux formules que nous voulions établir.

Page 236, la solution de M. Ph. du Plessis s'applique à la question 2271, et non pas à 2278. Elle aurait dû prendre place page 230.

Page 309, *supprimer* les quatre premières lignes.

[M¹3g] [M³2]

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE PLANE OU GAUCHE

(Extrait d'une lettre à M. Laisant);

PAR M. P. APPELL.

... Dans une leçon sur les foyers des coniques faite à l'École de Sèvres, une élève de troisième année, Mlle Sebald, a proposé d'appeler *foyer* d'une courbe algébrique un point F, tel que la distance d'un point quelconque M de la courbe à ce point F soit exprimable par une *fonction rationnelle* des coordonnées de M. Cette définition a été discutée par l'ensemble des élèves de mathématiques de troisième année. Elle est apparue comme féconde et comme pouvant donner lieu à d'intéressantes applications : elle s'étend aux lignes dans l'espace et aux surfaces. Citons notamment :

1° L'application aux ovales de Descartes (foyers dans le plan et dans l'espace; relations métriques correspondantes);

2° L'application aux courbes unicursales planes ou gauches;

3° L'application à certaines courbes, planes ou gauches, définies par des relations algébriques entre les distances d'un quelconque de leurs points à des points fixes;

Etc.

Mais avant de rédiger ces applications, nous voudrions savoir si l'idée est nouvelle. Un de vos lecteurs nous renseignera certainement.

Pour les courbes planes, la définition des foyers, d'après Plücker, est bien connue ([1]); un point F est *foyer pluckérien* quand, parmi les tangentes menées de ce point à la courbe, il en est deux qui ont pour coefficients angulaires $\pm i$ (axes rectangulaires). Si maintenant (α, β) est un *foyer rationnel*, on a, pour tous les points (x, y) de la courbe,

$$\text{(C)} \qquad [(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]\,Q^2(x,y)=P^2(x,y),$$

P et Q désignant deux polynomes en x et y. Le point (α, β) est donc un *foyer pluckérien*, mais c'est un *foyer pluckérien* spécial, car les deux tangentes

$$y-\beta=\pm i(x-\alpha)$$

issues de ce point sont *multiples*.

Ainsi tout foyer rationnel d'une courbe plane est un foyer pluckérien, mais la réciproque n'est évidemment pas exacte. Les courbes qui admettent des foyers rationnels sont des courbes spéciales.

Ajoutons que les points de rencontre des courbes

$$P(x,y)=0, \qquad Q(x,y)=0$$

sont des points singuliers pour la courbe (C).

([1]) Niewenglowski, *Géométrie analytique*, t. I, p. 448.

[M[1]]

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose de donner des démonstrations simples d'un certain nombre de théorèmes très généraux sur les courbes algébriques planes, dus à Laguerre (*Comptes rendus*, 1865; *Œuvres*, p. 19), théorèmes que cet éminent géomètre s'est borné à énoncer très brièvement, sans donner aucun éclaircissemont sur la façon d'y parvenir.

Je définirai tout d'abord une transformation corrélative, qui me sera très utile.

Transformation corrélative. — Soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy; à tout point x, y du plan je fais correspondre une droite u, v, w, telle que l'on ait

$$\frac{x}{u+iv} = \frac{y}{v+iu} = \frac{z}{2w}$$

et réciproquement

$$\frac{x-iy}{u} = \frac{y-ix}{v} = \frac{z}{w}.$$

On voit immédiatement qu'aux points cycliques correspondent les axes de coordonnées et qu'à deux droites du plan faisant entre elles un angle V, correspondent deux points tels que les coefficients angulaires des droites qui les joignent à l'origine O, soient liés par la relation $\frac{m_1}{m_2} = e^{2iV}$.

Distance de deux points. — Soient, $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ deux points; $u_1\, v_1\, w_1$, $u_2\, v_2\, w_2$ les droites correspondantes; la distance δ des deux points considérés est

$$\delta = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

elle se transformera en la relation

$$\delta = \left[i\left(\frac{u_1}{w_1} - \frac{u_2}{w_2}\right)\left(\frac{v_1}{w_1} - \frac{v_2}{w_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

ou, en désignant par A et B, C et D les intersections de $u_1\, v_1\, w_1$, $u_2\, v_2\, w_2$ avec Ox et Oy,

$$\delta = \left[i\left(\frac{1}{\mathrm{OA}} - \frac{1}{\mathrm{OC}}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{OB}} - \frac{1}{\mathrm{OD}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, à un point situé à une distance ρ de l'origine correspondra une droite coupant Ox et Oy en A et B tels que

$$\rho = \left[i\,\frac{1}{\mathrm{OA}}\,\frac{1}{\mathrm{OB}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Distance d'un point à une droite. — Soient $(a) = (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}) = 0$ une droite, $\mathrm{B}(x_1\, y_1)$ un point; la distance de B à (a) a pour expression

$$\delta = \frac{\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}};$$

à (a) correspond un point A $(x_2\, y_2)$, à B une droite (b), $u_1\, v_1\, w_1$, et l'on voit que

$$\delta = \frac{ux_2 + vy_2 + w}{w\sqrt{-4ix_2y_2}} = \frac{\delta_1}{\delta_0}\,\frac{1}{\sqrt{-4i\,\mathrm{O}\alpha\,\mathrm{O}\beta}},$$

δ_1 étant la distance de A à (b), δ_0 la distance de O à (b) et α et β les projections de A sur les axes.

En particulier, la distance δ de l'origine à la droite (a)

$\delta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ devient $\delta = \frac{1}{\sqrt{-4ixy}}$, x, y étant les coordonnées de A.

Puissance d'un point par rapport à une courbe. — Soit

$$f(x,y) = \varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_0 = 0$$

une courbe de degré m, $\varphi_i(x,y)$ étant un polynome homogène de degré i en x et y; nous définirons *puissance du point* $x_0 y_0$ par rapport à cette courbe l'expression

$$\Pi = \frac{2^m f(x_0 y_0)}{[\varphi_m(1,i)\,\varphi_m(1,-i)]^{\frac{1}{2}}};$$

au cas où la courbe considérée est circulaire, la puissance

$$\Pi = \frac{2^{m-2p} f(x_0 y_0)}{[\varphi_{m-2p}(1,i)\,\varphi_{m-2p}(1,-i)]^{\frac{1}{2}}} - \varphi_m(x,y)$$
$$= (x^2+y^2)^p\,\varphi_{m-2p}(x,y).$$

A la courbe $f(x,y)=0$ correspondra dans la transformation indiquée une courbe dont l'équation tangentielle sera, si l'on pose $\lambda = \frac{u}{w}$, $\mu = \frac{v}{w}$,

$$F(\lambda,\mu) = \varphi_m(\lambda+\iota\mu, \mu+\iota\lambda) + 2\varphi_{m-1}(\lambda+\iota\mu, \mu+\iota\lambda) + \ldots + 2^m\varphi_0,$$
$$F(\lambda,\mu) = \Phi_m(\lambda,\mu) + 2\Phi_{m-1}(\lambda,\mu) + \ldots + 2^m\varphi_0;$$

nous définirons *puissance de la droite* $\lambda_0 x + \mu_0 y + 1 = 0$ par rapport à cette courbe, l'expression

$$\Pi' = \frac{F(\lambda_0,\mu_0)}{|\Phi_m(1,0)\,\Phi_m(0,1)|^{\frac{1}{2}}},$$

et l'on voit facilement que la puissance Π d'un point $x_0 y_0$ par rapport à $f(x,y)=0$ et la puissance Π' de la droite correspondante $\lambda_0 x + \mu_0 y + 1 = 0$ par rapport à la courbe transformée sont liées par la relation

$$\Pi^2 = \Pi'^2 (i)^m.$$

Remarquons enfin que la puissance de la droite de l'infini par rapport à la courbe $F(\lambda, \mu) = 0$ est égale à $\frac{\Phi_0}{(A_0 A_m)^{\frac{1}{2}}}$, Φ_0 étant le terme constant de l'équation, A_0 et A_m les coefficients λ^m et μ^m.

Nous démontrerons maintenant la *proposition suivante :*

Soient $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ *deux équations homogènes et de degrés m et n*; *désignons par*

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{z=0}(f, \varphi), \\ R_{x=0}(f, \varphi), \\ R_{y=0}(f, \varphi) \end{array} \right.$$

les résultats des trois systèmes d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, 0) = 0, \\ \varphi(x, y, 0) = 0; \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(0, y, z) = 0, \\ \varphi(0, y, z) = 0; \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, 0, z) = 0, \\ \varphi(x, 0, z) = 0; \end{array} \right.$$

si x et y représentent des coordonnées cartésiennes, les équations $f = 0$, $\varphi = 0$ *représentent deux courbes planes, les produits des abscisses et des ordonnées des points communs à ces deux courbes sont donnés par les expressions*

$$x_1 x_2 \ldots x_{mn} = (-1)^{mn} \frac{R_{x=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}(f, \varphi)},$$

$$y_1 y_2 \ldots y_{mn} = (-1)^{mn} \frac{R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}(f, \varphi)}.$$

En effet, les deux équations $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ représentent, dans un système de coordonnées trilinéaires ayant pour triangle de référence un triangle

ABC, $BC = x = 0$, $CA = y = 0$, $AB = z = 0$, deux courbes planes; éliminons x entre ces deux équations; leur résultant sera

$$\mathcal{R}(y,z) = A_0 y^{mn} + A_1 y^{mn-1} z + \ldots + A_{mn} z^{mn},$$

égalé à zéro; il représentera l'ensemble des droites joignant le point A, aux points communs aux deux courbes considérées; si $A_0 = 0$, les deux courbes ont un point commun sur $AB = z = 0$; il en résulte que les deux équations $f(x, y, 0) = 0$, $\varphi(x, y, 0) = 0$ qui représentent respectivement les droites joignant le point C aux points d'intersection de $f = 0$, $\varphi = 0$ avec $z = 0$ auront une racine commune, par suite $A_0 = K\,R_{z=0}(f, \varphi)$; les propriétés classiques (degré et poids) des résultants montrent d'ailleurs que $K = 1$. Nous aurons de même $A_{mn} = R_{y=0}(f, \varphi)$; or, dans le système cartésien primitivement considéré, le résultant $\mathcal{R}(y,z) = 0$, où l'on fait $z = 1$, n'est autre que l'équation aux y des points d'intersection de $f = 0$, et de $\varphi = 0$; par suite

$$y_1 y_2 \ldots y_{mn} = (-1)^{mn} \frac{R_{y=0}(f,\varphi)}{R_{z=0}(f,\varphi)}.$$

Nous en arrivons maintenant aux propositions à démontrer.

Théorème I. — *Soient une parabole touchant deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy *en* A *et* B, *et une courbe algébrique plane de classe* n, *les tangentes communes à ces deux courbes rencontrent les axes en*

$$A_1 A_2 \ldots A_{2n}, \qquad B_1 B_2 \ldots B_{2n};$$

le produit

$$\frac{\overline{OA}^n \cdot \overline{OB}^n}{OA_1\, OA_2 \ldots OA_{2n}\; OB_1\, OB_2 \ldots OB_{2n}}$$

est égal au carré de la puissance de la droite de l'infini par rapport à la courbe considérée.

Soient en effet

$$F(\lambda, \mu) = \Phi_m(\lambda, \mu) + \Phi_{m-1}(\lambda, \mu) + \ldots + \Phi_0 = 0$$

et

$$\alpha\beta\lambda\mu + \alpha\lambda + \beta\mu = 0$$

la courbe et la parabole considérée; si A_0 et A_m sont les coefficients de λ^m et μ^m dans $\Phi_m(\lambda, \mu)$, nous avons, d'après la proposition précédente,

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{2m}\, \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{2m} = \frac{\Phi_0^2}{A_0 A_n \alpha^n \beta^n}.$$

Le théorème est démontré.

Si nous remarquons maintenant que la transformation corrélative définie plus haut fait correspondre à la parabole considérée un cercle passant par l'origine et ayant pour rayon $\left(\frac{i}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I de Laguerre. — *Si par un point* M *pris dans le plan d'une courbe algébrique plane, on mène un cercle quelconque, le produit des distances de ce point aux* $2n$ *points d'intersections du cercle et de la courbe est égal à la puissance du point* M *par rapport à la courbe multiplié par la* $n^{\text{ième}}$ *puissance du rayon.*

Théorème II. — *Le produit des coefficients angulaires des tangentes communes à une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de coordonnées* Ox *et* Oy *et à une courbe algébrique plane quelconque est égal au carré du produit des coefficients angulaires des tangentes menées du point* O *à la courbe.*

Soient

$$(1)\qquad K^2 uv - w^2 = 0,$$

$$(2)\quad f(u,v,w) = \varphi_m(u,v) + w\varphi_{m-1}(u,v) + \ldots + w^m = 0$$

les équations tangentielles de l'hyperbole et de la courbe considérée ; posons

$$\varphi_m(u,v) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} v + \ldots + A_m v^n,$$

l'élimination de w entre les équations (1) et (2) nous donnera, en posant $-\frac{u}{v} = \mu$, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes, équation qui sera de la forme

$$A_0^2 \mu^{2m} + \alpha_1 \mu^{2m-1} + \ldots + \alpha_k \mu + A_m^2,$$

d'où

$$\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{2m} = \left(\frac{A_m}{A_0}\right)^2,$$

les coefficients angulaires $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_m$ des tangentes à la courbe issues de l'origine étant racines de l'équation

$$A_0 \mu^m - A_1 \mu^{m-1} + \ldots + (-1)^m A_m = 0,$$

on a

$$(\alpha)\qquad |\mu'_1 \mu'_2 \ldots \mu'_m|^2 = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{2m} = \left(\frac{A_m}{A_0}\right)^2,$$

et le théorème est démontré.

Or le rapport $\frac{\mu}{M}$ des coefficients angulaires de deux droites, qui n'est autre que le rapport anharmonique de la division déterminée sur la droite de l'infini par les axes de coordonnées et ces deux droites, est tel que si V est l'angle des deux droites correspondant dans la transformation aux points à l'infini des deux droites primitives, on a $\frac{\mu}{M} = e^{2iV}$.

Si nous remarquons maintenant qu'à l'hyperbole équilatère correspond un cercle de centre O, qu'aux points de contact des tangentes à la courbe primitive correspondent les asymptotes de la transformée, la relation (α) qui peut s'écrire

$$\left|\frac{\mu'_1\,\mu'_2\ldots\mu'_m}{\mathrm{M}^m}\right|^2 = \frac{\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_{2m}}{\mathrm{M}^{2m}}$$

nous conduit à énoncer le théorème suivant :

Théorème II de Laguerre. — *Si un cercle est tracé dans le plan d'une courbe plane, la demi-somme des angles que font avec une direction arbitraire les* $2n$ *rayons du cercle aboutissant aux points d'intersection est égale à un multiple de* Π *près à la somme des angles que font les* n *asymptotes avec cette même direction.*

Théorème III. — *Si* $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_{m^2}$ *désignent les* m^2 *points d'une courbe algébrique plane, tels que la tangente au point* M_i *rencontrant les axes* $\mathrm{O}x$ *et* $\mathrm{O}y$ *en* A_i *et* B_i, *on ait* $\dfrac{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}{\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i} = n$, *on a, en désignant par* $a_1\,a_2\ldots a_m, b_1\,b_2\ldots b_m$ *les points de rencontre de la courbe avec* $\mathrm{O}x$ *et* $\mathrm{O}y$, *par* Π_0 *la puissance tangentielle de la droite de l'infini par rapport à la courbe, la relation*

$$\frac{\mathrm{O}a_1\,\mathrm{O}a_2\ldots\mathrm{O}a_m\,\mathrm{O}b_1\,\mathrm{O}b_2\ldots\mathrm{O}b_m}{\mathrm{OA}_1\,\mathrm{OA}_2\ldots\mathrm{OA}_{m^2}\,\mathrm{OB}_1\,\mathrm{OB}_2\ldots\mathrm{OB}_{m^2}} = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{m(m-1)}\Pi_0^2.$$

Les points M_i sont en effet à l'intersection de la courbe donnée

$$f(x,y,z) = \Phi_m(x,y) + z\,\Phi_{m-1}(x,y) + \ldots + z^m\,\Phi_0 = 0$$

avec la courbe

$$\varphi(x,y,z) = y(n-1)f'_y - x f'_x = 0.$$

Si $x_i y_i$ sont les coordonnées de M_i,

$$OA_i OB_i = \frac{n^2}{n-1} x_i y_i.$$

Or nous savons que

$$x_1 x_2 \ldots x_{m^2} y_1 y_2 \ldots y_{m^2} = \frac{R_{x=0}(f, \varphi)\, R_{y=0}(f, \varphi)}{R^2_{z=0}(f, \varphi)}.$$

$R_{z=0}(f, \varphi)$ est le résultant des deux équations

$$\Phi_m(x, y) = 0, \qquad y(n-1)\Phi'_m y - x\Phi'_m x = 0,$$

ou, ce qui revient au même, des deux équations

$$\Phi_m(x, y) = 0, \qquad ny\,\Phi'_m y = 0;$$

si donc $\Phi_m(x, y) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} y + \ldots + \alpha_m y^m$,

$$R_{z=0}(f, \varphi) = n^m \alpha_0 \alpha_m \Delta xy,$$

Δxy étant le discriminant de la forme $\Phi_m(x, y) = 0$; nous aurons de même, en désignant par Δxz, Δyz les discriminants des formes $f(x, 0, z) = 0$, $f(0, y, z) = 0$,

$$R_{y=0}(f, \varphi) = \alpha_0 \Phi_0 \Delta xz, \qquad R_{x=0}(f, \varphi) = \alpha_m \Phi_0 \Delta yz (n-1)^m;$$

d'où

$$x_1 x_2 \ldots x_{m^2} y_1 y_2 \ldots y_{m^2} = \frac{\Phi_0^2}{\alpha_0 \alpha_m} \frac{\Delta xz \cdot \Delta yz}{\Delta^2 xy} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^m,$$

d'où, si l'on remarque que Δxy, Δxz, Δyz sont les coefficients des puissances de w^{m^2}, v^{m^2}, u^{m^2} dans l'équation tangentielle de la courbe $f(x, y) = 0$, on a la relation cherchée

$$\frac{Oa_1 \ldots Oa_m\, Ob_1 \ldots Ob_m}{OA_1 \ldots OA_{m^2}\, OB_1 \ldots OB_{m^2}} = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{m(m-1)} \Pi_0^2.$$

Il suffit maintenant de remarquer que, dans notre transformation, à la tangente $A_i B_i$ correspond un point P_i, tel que la droite OP_i coupe la tangente à la courbe transformée en P_i sous un angle V, tel que $e^{2iV} = -\frac{1}{n-1}$, d'où l'on déduit $\frac{n^2}{n-1} = (2 \sin V)^2$, que de plus à la droite $a_i b_i$ joignant deux points d'intersection de la courbe primitive avec les axes correspond un foyer réel de la transformée, pour pouvoir énoncer les théorèmes suivants :

Théorème III de Laguerre. — *Si par un point O, pris dans le plan d'une courbe algébrique plane de degré n, on mène les $\mu + n$ droites qui la coupent sous un angle donné V, le produit de toutes les longueurs comprises entre le point O et les pieds de ces droites est égal au produit des distances du point O aux μ foyers réels de la courbe, multiplié par la puissance du point O, le tout divisé par* $(2 \sin V)^n$.

Théorème IV de Laguerre. — *Si par un point O, pris dans le plan d'une courbe algébrique plane de degré n, on mène les $\mu + n$ normales à la courbe, le produit des longueurs comprises entre le point O et les pieds des normales est égal au produit des distances du point O aux μ foyers réels, multiplié par la puissance du point O, le tout divisé par* 2^n.

Théorème IV. — *Si les asymptotes d'une courbe algébrique plane de degré m coupent les axes Ox et Oy en $A_1 A_2 \ldots A_m$, $B_1 B_2 \ldots B_m$; si*

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad \ldots, \quad x_{m(m-1)} y_{m(m-1)}$$

sont les coordonnées des points de contact de la courbe avec les tangentes issues du point O; si la courbe coupe Ox et Oy en $a_1 a_2 \ldots a_m$, $b_1 b_2 \ldots b_m$ on a, en désignant par Π_0^2 le carré de la puissance tangentielle de la droite de l'infini par rapport à la *courbe*,

$$\frac{Oa_1\ldots Oa_m\,Ob_1\ldots Ob_m}{OA_1\,OA_2\ldots OA_m\,OB_1\,OB_2\ldots OB_m}$$
$$= \Pi_0^2\, x_1 x_2 \ldots x_{m(m-1)}\, y_1 y_2 \ldots y_{m(m-1)}.$$

En effet, les points de contact des tangentes à la courbe

$$f(x, y, z) = \Phi_m(x, y) + z\,\Phi_{m-1}(x, y) + \ldots + z^m \Phi_0 = 0,$$

issues de l'origine, sont à l'intersection de cette courbe avec la première polaire de l'origine

$$\varphi(x,y,z) = f'_z = \Phi_{m-1}(x,y) + 2z\Phi_{m-2}(x,y) + \ldots + m\Phi_0 z^{m-1};$$

posons

$$\Phi_m(x,y) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} y + \ldots + \alpha_m y^m,$$

nous avons

$$x_1 x_2 \ldots x_{m(m-1)}\, y_1 y_2 \ldots y_{m(m-1)} = \frac{R_{x=0}(f, \varphi),\ R_{y=0}(f, \varphi)}{R^2_{z=0}(f, \varphi)},$$
$$R_{z=0}(f, \varphi) = \mathcal{R}(\Phi_m, \Phi_{m-1}).$$

$\mathcal{R}(\Phi_m, \Phi_{m-1})$ étant le résultat de $\Phi_m = 0$, $\Phi_{m-1} = 0$. $R_{x=0}(f, \varphi)$ est le résultant de $f(0, y, z) = 0$ et de $f'_z(0, y, z) = 0$; par suite

$$R_{x=0}(f, \varphi) = \Phi_0 \Delta yz,$$

Δyz étant le discriminant de la forme $f(0, y, z) = 0$; de même

$$R_{y=0}(f, \varphi) = \Phi_0 \Delta xz,$$

Δxz étant le discriminant de la forme $f(x, 0, z) = 0$, d'où

$$x_1 x_2 \ldots x_{m(m-1)}\, y_1 y_2 \ldots y_{m(m-1)} = \frac{\Phi_0^2\, \Delta xz\, \Delta yz}{\mathcal{R}^2(\Phi_m, \Phi_{m-1})}.$$

L'équation aux coefficients angulaires des asymptotes de $f(x, y, z) = 0$ est $\Phi_m(1, \mu)$ et l'asymptote correspondant à la racine μ_1 de cette équation est

$y = \mu_1 x - \dfrac{\Phi_{m-1}(1, \mu_1)}{\Phi'_m \mu(1, \mu_1)}$; nous avons par suite

$$\begin{aligned} &OA_1 OA_2 \ldots OA_m OB_1 OB_1 \ldots OB_m \\ &= \frac{(-1)_m}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m} \left[\frac{\Phi_{m-1}(1, \mu_1) \ldots \Phi_{m-1}(1, \mu_m)}{\Phi'_m \mu(1, \mu_1) \ldots \Phi'_m \mu(1, \mu_m)} \right]^2 ; \end{aligned}$$

or

$$\Phi_{m-1}(1, \mu_1) \ldots \Phi_{m-1}(1, \mu_m) = \mathcal{R}(\Phi_m, \Phi_{m-1}),$$
$$\Phi'_m \mu(1, \mu_1) \ldots \Phi'_m \mu(1, \mu_m) = \alpha_m \Delta xy,$$

Δxy étant le discriminant de la forme $\Phi_m(x, y)$, d'où

$$OA_1 \ldots OA_m OB_1 \ldots OB_m = \frac{\mathcal{R}^2(\Phi_m, \Phi_{m-1})}{\alpha_0 \alpha_m \Delta^2 xy},$$

d'où enfin

$$\frac{O a_1 \ldots O a_m O b_1 \ldots O b_m}{OA_1 \ldots OB_m OB_1 \ldots OB_m} = x_1 \ldots x_{m(m-1)} y_1 \ldots y_{m(m-1)} \Pi_0^2.$$

Cette formule, soumise à la transformation corrélative indiquée, nous conduit au théorème suivant :

Théorème V de Laguerre. — *Si par un point O pris dans le plan d'une courbe algébrique plane de degré n, on mène des tangentes à cette courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point O et les points de contact est égal au produit des distances du point O aux μ foyers réels, multiplié par la puissance du point O, le tout divisé par 2^n et par le produit des distances de ce point aux asymptotes.*

De nos théorèmes III et IV nous déduirons le suivant :

Théorème V. — *Si $M_1, \ldots, M_{m^2}$ sont les m^2 points d'une courbe algébrique plane, tels que la tangente au point M_i rencontrant les axes Ox et Oy en A_i et B_i, M_i soit le milieu du segment $A_i B_i$, si les* *asymptotes de la courbe rencontrent les axes en* $\mathcal{A}_i \ldots \mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_i \ldots \mathcal{B}_m$, *si enfin* $x_1\, y_1, \ldots, x_{m(m-1)}\, y_{m(m-1)}$ *sont les coordonnées des points de contact de la courbe avec les tangentes issues de* O, *on a*

$$\begin{aligned} &\mathrm{OA}_1 \ldots \mathrm{OA}_{m^2}\mathrm{OB}_1 \ldots \mathrm{OB}_{m^2} \\ &\quad = 2^{2m(m-1)}\mathrm{O}\mathcal{A}_1 \ldots \mathrm{O}\mathcal{A}_m \mathrm{O}\mathcal{B}_1 \ldots \mathrm{O}\mathcal{B}_m x_1 \ldots x_{m(m-1)} y_1 \ldots y_{m(m-1)}. \end{aligned}$$

De ce théorème se déduit immédiatement le suivant :

Théorème VI de Laguerre. — *Si par un point* O *pris dans le plan d'une courbe algébrique plane, on mène des tangentes et des normales à la courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point* O *et les points de contact, multiplié par le produit des distances de ce point aux asymptotes, est égal au produit des longueurs comprises entre le point* O *et les pieds des normales.*

Théorème VI. — *Si* $M_1, M_2, \ldots, M_{m^2}$ *sont les* m^2 *points d'une courbe algébrique plane de degré* m, *tels que la tangente à la courbe au point* M_i *coupant les axes* Ox *et* Oy *en* A_i *et* B_i, *on ait* $\frac{A_i B_i}{A_i M_i} = n$; *si l'on désigne par* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m^2}$ *les coefficients angulaires des droites* OM_i, *par* $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_m$, *les coefficients angulaires des droites* $a_i b_i$ *joignant les points d'intersection de la courbe avec les axes; par* $\mu''_1, \mu''_2, \ldots, \mu''_{m(m-1)}$ *les coefficients angulaires des tangentes à la courbe issues de* O, *on a la relation*

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m^2}}{\mu''_1 \mu''_2 \ldots \mu''_{m(m-1)}} = \left(\frac{-1}{n-1}\right)^m \mu'_1 \mu'_2 \ldots \mu'_m,$$

. . . .

En effet, en employant les notations du théorème III,

$$\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m^2} = \frac{R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{x=0}(f, \varphi)} = \frac{\alpha_0}{\alpha_m} \frac{\Delta xz}{\Delta yz} \frac{1}{(n-1)^m};$$

or

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = (-1)^m \mu'_1 \mu'_2 \ldots \mu'_m, \qquad \frac{\Delta xz}{\Delta yz} = \mu''_1 \mu''_2 \ldots \mu''_m (m-1),$$

d'où la formule à démontrer.

Le raisonnement qui nous a servi à obtenir le théorème II de Laguerre transformera cette formule en le théorème suivant :

Théorème VII de Laguerre. — *Par un point O pris dans le plan d'une courbe plane algébrique de degré n, menons les $\mu + n$ droites qui la coupent sous un angle donné V. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mu+n}$ les angles que font ces droites avec un axe fixe arbitraire; soient $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ les angles que font avec le même axe les droites joignant le point O aux μ foyers réels et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ les angles de cet axe avec les asymptotes de la courbe. Tous ces angles sont liés entre eux par la relation suivante, qui doit être vérifiée à un multiple près de* Π :

$$\Sigma\lambda^* - \Sigma\zeta = \Sigma f + nV.$$

Théorème VII. — *Si une courbe algébrique plane coupe les axes Ox et Oy en $a_1\, a_2 \ldots a_m$, $b_1\, b_2 \ldots b_m$, le produit des coefficients angulaires des droites $a_i b_i$ est égal au produit des coefficients angulaires des asymptotes de la courbe.*

Soient

$$f(x, y, z) = \Phi_m(x, y) + z\Phi_{m-1}(x, y) + \ldots + z^m \Phi_0,$$
$$\Phi_m(x, y) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} y + \ldots + \alpha_m y^m;$$

le produit des coefficients angulaires des droites $a_i b_i$ est égal à $(-1)^m \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$; le produit des coefficients angulaires des asymptotes est de même $(-1)^m \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$; théorème qui nous conduit immédiatement au suivant :

Théorème VIII de Laguerre. — *Si par un point* O, *pris dans le plan d'une courbe plane algébrique, on mène des tangentes à la courbe, la somme des angles que font ces tangentes avec une direction fixe arbitraire est égale à la somme des angles que font avec cette même direction les droites joignant le point* O *aux foyers réels de la courbe.*

Remarque. — Nous avons supposé dans toute cette étude que la courbe étudiée n'avait point de singularité et n'était ni circulaire ni tangente à la droite de l'infini; il serait facile de voir, en employant les mêmes méthodes que ci-dessus, comment dans ces hypothèses se modifient les théorèmes indiqués.

[K¹2e]

SUR DEUX POINTS DU PLAN D'UN TRIANGLE ET SUR UNE GÉNÉRALISATION DES POINTS DE BROCARD;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

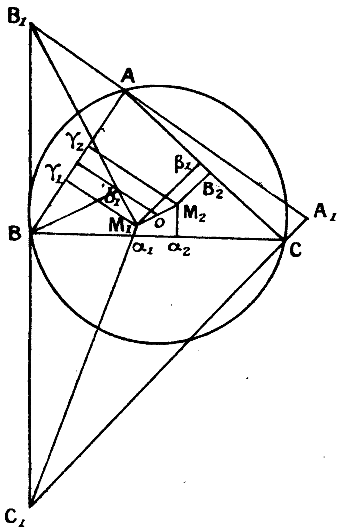
Dans le plan d'un triangle ABC il existe deux points M_1 et M_2 tels que, si α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 désignent leurs projections sur les côtés BC, CA, AB, on ait

$$B\alpha_1 = \alpha_2 C = C\beta_1 = \beta_2 A = A\gamma_1 = \gamma_2 B.$$

Nous nous proposons de signaler quelques propriétés remarquables de ces points M_1, M_2 et de certains autres couples μ_1, μ_2 qui généralisent en même temps le précédent et celui des points de Brocard ω_1, ω_2.

1. Les perpendiculaires élevées en A, B, C sur AB, BC, CA forment un triangle $A_1B_1C_1$ semblable au triangle ABC (*fig.* 1); on montre aisément que le rap-

Fig. 1.



port de similitude est égal à la cotangente de l'angle de Brocard V (*voir* à ce sujet la *Nouv. corresp. math.*, 1877, p. 187). Comme le point M_1 n'est autre que le centre du cercle inscrit au triangle $A_1B_1C_1$, on a donc cette proposition :

La valeur commune des segments $B\alpha_1$, α_2C,

$C\beta_1$, ... *est égale à* $r \cot V$ *ou*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4p},$$

r désignant le rayon du cercle inscrit au triangle ABC *et* V *l'angle de Brocard.*

Les points M_1 *et* M_2 *sont symétriques par rapport au centre* O *du cercle* ABC.

2. Les droites homologues dans les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ étant orthogonales, et le point O étant le point de Lemoine de ce dernier triangle, on a la proposition suivante :

La droite M_1M_2 *est perpendiculaire à la droite* IK *joignant le centre* I *du cerle inscrit du triangle* ABC *au point de Lemoine* K *de ce triangle.*

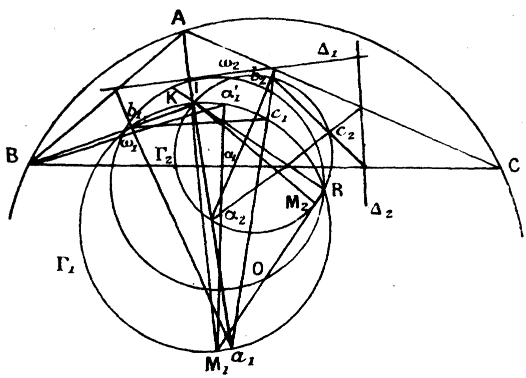
De même les bissectrices de $A_1B_1C_1$ sont perpendiculaires à celles de ABC; on en déduit aisément cette construction des points M_1 et M_2 :

Les bissectrices des angles A, B, C *rencontrent en* a_1, b_1, c_1 *les médiatrices de* CA, AB, BC; *les perpendiculaires élevées en* a_1, b_1, c_1 *sur les bissectrices* Aa_1, Bb_1, Cc_1 *concourent en* M_1. *De même les bissectrices de* A, B, C *rencontrent en* a_2, b_2, c_2 *les médiatrices de* AB, BC, CA ; *les perpendiculaires élevées en* a_2, b_2, c_2 *sur* Aa_2, Bb_2, Cc_2 *concourent en* M_2.

3. *Cercles* Γ_1 *et* Γ_2. — D'après la dernière proposition, les cercles de diamètres IM_1 et IM_2 passent respectivement par les points a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 ; nous désignerons ces cercles par Γ_1 et Γ_2 et leur second point d'intersection par R (*fig.* 2).

Projetons I en α'_1 sur $M_1\alpha_1$; la relation $B\alpha_1 = r \cot V$

Fig. 2.



montre que $B\alpha'_1$ passe par l'un des points de Brocard :

Si l'on projette I *en* $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ *sur* $M_1\alpha_1$, $M_1\beta_1$, $M_1\gamma_1$ *et en* $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ *sur* $M_2\alpha_2$, $M_2\beta_2$, $M_2\gamma_2$, *les droites* $B\alpha'_1$, $C\beta'_1$, $A\gamma'_1$ *concourent en l'un des points de Brocard* ω_1, *les droites* $C\alpha'_2$, $A\beta'_2$, $B\gamma'_2$ *concourent en l'autre point de Brocard* ω_2.

On déduit facilement de là cette propriété des cercles Γ_1 et Γ_2 :

Le cercle Γ_1 *passe par l'un des points de Brocard* ω_1, *le cercle* Γ_2 *passe par l'autre point de Brocard* ω_2.

Par suite, les angles $\omega_1 RI$ et $\omega_2 RI$ sont égaux à V :

L'un des points d'intersection des cercles Γ_1, Γ_2 *est le centre* I *du cercle inscrit, l'autre appartient au cercle de Brocard.*

4. Les triangles $a_1b_1c_1$ et $a_2b_2c_2$ sont semblables; leurs angles valent

$$\frac{1}{2}(B+C), \qquad \frac{1}{2}(C+A), \qquad \frac{1}{2}(A+B).$$

Si φ désigne l'angle que font entre eux les côtés homologues de ces deux triangles, on a

$$\cot\varphi = \frac{\Sigma a^4 - \Sigma bc(b^2+c^2) + abc\Sigma a}{4S(\Sigma a^2 - \Sigma bc)}.$$

Les triangles $a_1b_1c_1$ et $a_2b_2c_2$ sont homologiques avec le triangle ABC; au moyen d'une considération d'angles, on démontre facilement ce théorème :

Les axes d'homologie Δ_1 *et* Δ_2 *des triangles* $a_1b_1c_1$, ABC *et* $a_2b_2c_2$, ABC *sont les symétriques des côtés de* ABC *par rapport aux côtés correspondants des triangles* $a_1b_1c_1$ *et* $a_2b_2c_2$.

L'angle des axes Δ_1 *et* Δ_2 *vaut* 2φ.

De ces propositions résulte encore la propriété suivante :

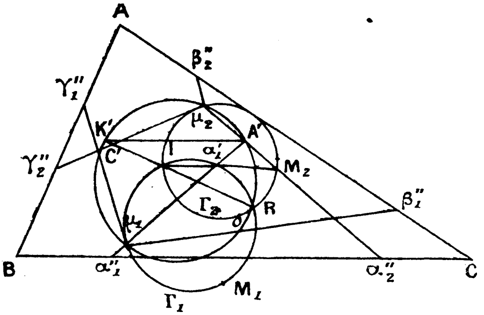
La droite de Simson de M_1 *par rapport au triangle* $a_1b_1c_1$ *est perpendiculaire à* Δ_1, *la droite de Simson de* M_2 *par rapport à* $a_2b_2c_2$ *est perpendiculaire à* Δ_2.

Pour terminer ce qui est relatif aux points M_1, M_2, rappelons encore cette propriété de l'orthopôle de la droite M_1M_2 que nous avons déjà signalée dans les *Nouvelles Annales* (1917, p. 280) :

La droite qui joint l'orthopôle de la droite M_1M_2 *au centre de gravité du triangle passe par le point de Feuerbach.*

5. *Généralisation des points de Brocard.* — Choisissons sur le contour ABC un sens déterminé; étant donné un angle θ, on peut trouver sur les côtés six points α''_1, β''_1, γ''_1, α''_2, β''_2, γ''_2 tels que les segments $B\alpha''_1$, $\alpha''_2 C$, ... soient égaux et que, si par les trois premiers on mène des droites faisant avec les côtés correspondants des angles θ et par les trois derniers des droites

Fig. 3.



faisant avec ces côtés des angles $-\theta$, les trois premières concourent en un point μ_1 et les trois dernières en un point μ_2 (*fig.* 3).

Quand le segment $B\alpha''_1$ est nul, on retrouve les points de Brocard ω_1, ω_2, et quand l'angle θ est droit, on obtient les points M_1, M_2.

Si l'on mène par A, B, C des droites faisant avec les côtés AB, BC, CA des angles égaux à θ, on obtient un triangle semblable à ABC, le rapport de similitude étant

$$\sin\theta(\cot V - \cot\theta);$$

le point μ_1 est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

La valeur commune des segments $B\alpha''_1$, $\alpha''_2 C$, ...

s'écrit

$$r(\cot V - \cot\theta).$$

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la valeur du segment $B\alpha$; d'autre part, si $B\alpha_1''$ est nul, l'angle θ est égal à l'angle de Brocard. De l'expression du segment $B\alpha_1''$ résulte aussi la proposition suivante :

Les droites $\alpha_1''\mu_1$, $\beta_1''\mu_1$, $\gamma_1''\mu_1$ *passent par les projections* α_1', β_1', γ_1' *de* I *sur* $M_1\alpha_1$, $M_1\beta_1$, $M_1\gamma_1$; *les droites* $\alpha_2''\mu_2$, $\beta_2''\mu_2$, $\gamma_2''\mu_2$ *passent par les projections* α_2', β_2', γ_2' *de* I *sur* $M_2\alpha_2$, $M_2\beta_2$, $M_2\gamma_2$.

On en déduit que le point μ_1 appartient au cercle Γ_1 et le point μ_2 au cercle Γ_2.

Les lieux géométriques des points de Brocard généralisés μ_1 *et* μ_2 *sont les cercles* Γ_1 *et* Γ_2.

Observant que les droites $R\mu_1$ et $R\mu_2$ sont symétriques par rapport à IR, on trouve que *le lieu du milieu de* $\mu_1\mu_2$ *est une ellipse qui touche la droite* IK *en* I.

6. *Point de Lemoine généralisé* K'. — La droite $\alpha_1''\mu_1$ rencontre la médiatrice de BC en un point dont la distance à BC a pour valeur

$$\delta_1 = \left(\frac{a}{2} - r\cot V + r\cot\theta\right)\tang\theta.$$

Désignant par δ_2 et δ_3 les distances analogues à δ_1, on a

$$a\delta_1 + b\delta_2 + c\delta_3 = 2S.$$

Les droites $\alpha_1''\mu_1$ *et* $\alpha_2''\mu_2$, $\beta_1''\mu_1$ *et* $\beta_2''\mu_2$, $\gamma_1''\mu_1$ *et* $\gamma_2''\mu_2$ *se coupent en* A', B', C' *sur les médiatrices de* BC, CA, AB; *les parallèles menées par* A′, B′, C′ *aux côtés* BC, CA, AB *concourent en un point* K′.

On a en outre

$$(b-c)\delta_1+(c-a)\delta_2+(a-b)\delta_3=0.$$

Le lieu géométrique des points de Lemoine généralisés K′ *est la droite qui joint le centre du cercle inscrit* I *au point de Lemoine* K.

De l'égalité des angles $R\mu_1\alpha'_1$, $RI\alpha'_1$, $RK'A'$ on déduit une généralisation du cercle de Brocard.

Les points A′, B′, C′, μ_1, μ_2, K′, O *et le second point d'intersection* R *des cercles* Γ_1, Γ_2 *appartiennent à un cercle; les points* μ_1, μ_2 *sont symétriques par rapport au diamètre* OK′ *de ce cercle et l'angle* $\mu_1 O \mu_2$ *est égal à* 2θ.

On généraliserait de la même manière plusieurs théorèmes connus concernant d'autres éléments dont la définition peut se déduire de celle des points de Brocard, notamment les points de Steiner et de Tarry.

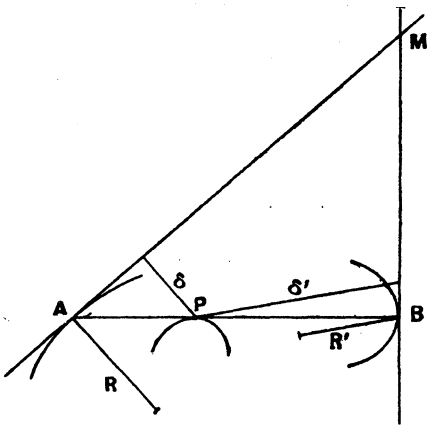
[O'2]

QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES INFINIMENT PETITS;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Les extrémités A et B d'un segment de droite de grandeur variable décrivent des courbes données et la droite AB touche son enveloppe en P. On mène en A et B les tangentes aux courbes décrites par A et B, soit M leur point de rencontre. On aura la tangente à

Fig. 1.



la courbe, décrite par M, au moyen de la relation suivante :

$$\overline{PA}^2.\overline{AM}^2\delta'.h'.R' = \overline{PB}^2.\overline{BM}^2.\delta.h.R,$$

R et R' étant les rayons de courbure en A et B, δ et δ' les distances de P à AM et à MB, h et h' les distances de A et B à la tangente en M.

Ce théorème se démontre facilement en faisant tourner une droite AB autour d'un point fixe P, A et B décrivant des cercles de rayons R et R'.

Applications. — 1° AB se déplace sur une courbe, de manière que l'arc AB soit de longueur constante. Les projections des rayons de courbure en A et B sur la tangente en M sont proportionnelles à MA et MB.

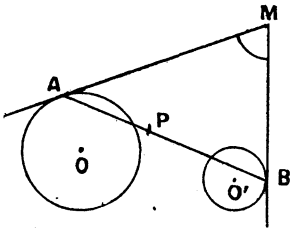
2° Le segment AB est de grandeur constante. Les projections des rayons de courbure en A et B sur la tangente en M sont proportionnelles aux carrés de MA et MB.

3° L'angle AMB est constant. Le point P divise AB en deux segments proportionnels aux projections sur AB des rayons de courbure en A et B, et l'on a

$$\frac{PA}{PB} \times \frac{MA}{MB} = \frac{R}{R'}.$$

Considérons, en particulier, un angle de grandeur constante, circonscrit à deux cercles; on sait que M décrit un limaçon de Pascal, et que AB enveloppe une

Fig. 2.



conique; on a donc un moyen simple de trouver le point P où cette droite touche la conique enveloppe. La construction de P est encore plus simple si les deux cercles sont égaux.

On peut aussi, comme cas particuliers, considérer un angle droit circonscrit à une conique à centre, ou un angle constant circonscrit à une parabole.

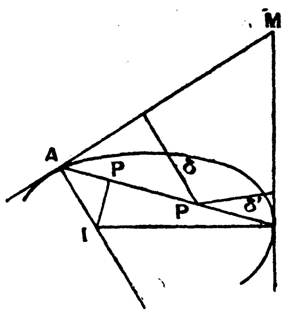
II. Un segment de droite AB, variable de grandeur et de position, se déplace de telle manière qu'un élément géométrique, dépendant de la droite, demeure constant. Soit f cet élément.

On demande la condition pour qu'un autre élément φ, dépendant de la droite, soit maximum ou minimum.

Pour obtenir cette condition, on cherchera le point où la droite AB touche son enveloppe, l'élément f étant constant, puis le point où AB touche son enveloppe, l'élément φ étant constant; puis on exprimera que ces deux points coïncident. Ce principe, évident, s'applique aussi au cas où la droite est remplacée par une courbe.

Applications. — 1° Une droite AB, de longueur

Fig. 3.



constante, se déplace de manière que A et B décrivent une courbe donnée. Condition pour que l'arc AB soit maximum ou minimum.

Le point P' où AB touche son enveloppe, si l'arc AB est constant, est donné par la relation

$$\frac{\overline{P'A}^2}{\overline{P'B}^2} = \frac{\delta}{\delta'};$$

cette relation s'obtient en considérant les surfaces des triangles infiniment petits P'AA', P'BB', A'B' étant une position de la droite, infiniment voisine de AB.

On déduit de cette relation

$$\frac{P'A}{P'B} = \frac{MB}{MA}.$$

D'autre part, le point P, où AB touche son enveloppe, AB étant de grandeur constante, est donné par la projection sur AB du point I où se rencontrent les normales en A et B.

En exprimant que P et P' se confondent, on trouve MA = MB, résultat très simple. Même résultat si AB se déplace de manière que l'arc AB reste constant, et si l'on demande le minimum ou le maximum de la corde AB.

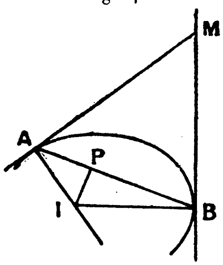
2° Une droite AB de longueur constante se déplace, trouver la condition pour qu'elle détache, dans la courbe, un segment de surface maximum ou minimum.

Il faut que la projection P sur AB du point I, centre instantané de rotation, soit au milieu de AB.

3° L'angle $\widehat{AMB}$ est constant; quelle est la condition pour que l'arc AB soit maximum ou minimum. On trouve que les rayons de courbure en A et B doivent être égaux.

4° L'angle $\widehat{AMB}$ est constant; quelle est la condition pour que le segment de la courbe détaché par AB

Fig. 4.



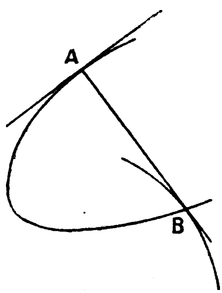
ait une surface maximum ou minimum? P doit être au milieu de AB; on a donc

$$\frac{MA}{MB} = \frac{R}{R'}.$$

5° Une droite AB de longueur constante se déplace et rencontre une circonférence donnée en A et A′, et une autre circonférence donnée en B et B′. La condition pour que la somme des arcs AA′, BB′ soit maximum ou minimum est que AB passe par un des centres de similitude des deux circonférences. Ce résultat se démontre en remarquant que les tangentes en A et B doivent être égales, ainsi que les tangentes en A′ et B′, d'après ce qui précède.

6° Normale à une courbe, de grandeur maximum ou minimum. Soit en A la normale qui rencontre la courbe en un second point B; le point où la normale touche son enveloppe doit coïncider avec la projection sur AB du centre instantané de rotation, AB étant une droite de longueur constante, se déplaçant de manière que A et B décrivent la courbe; cette projection est, ici, le point B; donc, la normale maximum ou minimum est

Fig. 5.



celle qui rencontre la courbe en un point B où cette courbe est rencontrée par sa développée; ce résultat est intéressant dans le cas des coniques.

[A1b]

NOUVELLES IDENTITÉS;

PAR M. G. FONTENÉ.

J'ai signalé en 1917 (p. 456-462), des faits de calcul relatifs aux systèmes des quantités

$$\begin{matrix} x, & y, & z, & \ldots, \\ u, & v, & w, & \ldots, \end{matrix}$$

x et u se correspondant, ainsi que y et v, etc.; ces faits peuvent être étendus aux systèmes

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1, & \ldots, \\ x_2, & y_2, & z_2, & \ldots, \\ x_3, & y_3, & z_3, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots . \end{matrix}$$

Le coefficient binomial C_m^h doit alors être remplacé par $\frac{P_m}{P_h P_k \ldots}$, avec $h + k + \ldots = m$.

Si l'on pose

$$P_x^h = x(x-1)\ldots(x-h+1),$$

l'équation

$$\sum P_{x_1}^m P_{y_1}^m \ldots + \ldots + \frac{P_m}{P_h P_k \ldots} \sum P_{x_1}^h P_{x_2}^k \ldots P_{y_1}^h P_{y_2}^k \ldots + \ldots = 0,$$

qui généralise l'équation (11) *de la page* 459, *admet les solutions*

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + \ldots = (m-1) - \alpha, \\ y_1 + y_2 + \ldots = (m-1) - \beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

α, β, ... étant des entiers positifs ou nuls qui vérifient les conditions

$$\alpha+\beta+\ldots \leqq m-1.$$

On n'oubliera pas que, dans l'équation considérée, h, k, ... sont des indices et non des exposants.

En considérant le seul système x_1, x_2, x_3, ..., on a ceci :

L'équation

$$\sum P_{x_1}^{m}+\ldots+\frac{P_m}{P_h P_k \ldots}\sum P_{x_1}^{h} P_{x_2}^{k}\ldots+\ldots=0,$$

qui généralise l'équation [11] *de la page* 462, *est résolue par les formules*

$$x_1+x_2+\ldots=m-1, \qquad m-2, \qquad \ldots, \qquad 0;$$

le premier membre de cette équation est identique au produit

$$(x_1+x_2+\ldots)(x_1+x_2+\ldots-1)\ldots[x_1+x_2+\ldots-(m-1)].$$

Exemple (avec $m=3$) :

$$\begin{aligned} & x_1(x_1-1)(x_1-2)+\ldots+3x_1(x_1-1)x_2+\ldots+6x_1x_2x_3 \\ & \qquad \equiv (x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3-1)(x_1+x_2+x_3-2). \end{aligned}$$

CORRESPONDANCE.

M. F. **Balitrand.** — *Sur la chaînette d'égale résistance.* — Aux propriétés de cette courbe signalées récemment dans ce journal (*Nouv. Ann.*, 1917, p. 361 ;

1918, p. 307), on peut en ajouter quelques autres. Nous conservons les notations déja employées.

La droite qui joint les milieux des premier et troisième rayons de courbure de la chaînette est perpendiculaire à MI_1.

Il en résulte une construction simple du troisième rayon de courbure, et par suite de la conique osculatrice, en un point de la courbe.

On a aussi la curieuse propriété suivante :

La caustique par réflexion de la chaînette pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe a pour développée une courbe qui coïncide avec la seconde développée de la caustique pour des rayons incidents parallèles à l'axe.

La chaînette d'égale résistance a pour radiale une droite. Plusieurs des courbes qui lui sont associées ont aussi des radiales simples. C'est un fait remarquable; car on sait que les courbes célèbres qui ont des radiales sont rares. Ainsi :

La développée de la chaînette a pour radiale une parabole;

La seconde développée a pour radiale une courbe affine d'un folium parabolique droit;

La caustique par réflexion pour des rayons incidents parallèles à l'axe a pour radiale deux strophoïdes droites;

La développée de cette caustique a pour radiale une parabole;

La caustique par réflexion pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe a pour radiale une conchoïde focale de parabole;

La courbe (P′) *a pour radiale une trisectrice de Mac-Laurin.*

Plusieurs de ces courbes ont aussi des équations intrinsèques simples.

L'équation intrinsèque de la caustique par réflexion de la chaînette, les rayons incidents étant parallèles à l'axe est $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$; *très voisine de celle de la tractrice* $\rho = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$;

L'équation intrinsèque de la développée de cette caustique est $\rho = \frac{a}{4} + \frac{s^2}{a}$; *très voisine de celle de la chaînette ordinaire* $\rho = a\frac{s^2}{a}$.

L'équation intrinsèque de la courbe (P′) *est* $\rho = \frac{a}{6}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$; *très voisine de celle de la chaînette d'égale résitance* $\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$ *et de celle de la syntractrice* $\rho = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$.

M. **L. Poli.** — *Au sujet d'un article de M. V. Thébault.* — M. Thébault démontre (*Nouv. Ann.*, 1918, p. 297) que l'orthopôle φ d'une droite Δ a même puissance par rapport aux cercles ω_a, ω_b, ω_c qui ont pour diamètres respectifs les droites joignant les sommets d'un triangle aux intersection de Δ avec les côtés opposés.

Il en conclut que φ est le centre radical des trois cercles. Or ceux-ci, ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet formé par les trois cotés du triangle et la droite Δ, ont, comme il est bien connu, même axe radical. Il faut donc dire, non pas que φ est leur centre radical, point indéterminé, mais bien que φ est sur l'axe radical commun des trois cercles considérés.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1730.

(1896, p. 248).

Si

$$x_1 = \sqrt{a-b}, \qquad x_2 = -\sqrt{b-c},$$
$$x_3 = \sqrt{c-d}, \qquad x_4 = -\sqrt{d-a},$$

et si

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n,$$

montrer que

$$\frac{S_5}{5} + \frac{S_1^5}{1.2.2.4.5} + \frac{S_1^2 S_3}{1.2.3} = \frac{S_1 S_4}{4}.$$

H.-J. Gerrans.

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Soit

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

l'équation ayant pour racines les quantités ci-dessus désignées.

On a les relations classiques d'Albert Girard et de Newton

$$\begin{aligned} S_1 - A \quad &= 0,\\ S_2 - AS_1 + 2B \quad &= 0,\\ S_3 - AS_2 + BS_1 - 3C \quad &= 0,\\ S_4 - AS_3 + BS_2 - CS_1 + 4D \quad &= 0,\\ S_5 - AS_4 + BS_3 - CS_2 + DS_1 &= 0. \end{aligned}$$

En y faisant $S_2 = 0$, puis éliminant A, B, C, D entre ces cinq équations, on parvient aisément à la formule indiquée ou encore à

$$24 S_5 + 20 S_1^2 S_3 + S_1^5 = 30 S_1 S_4.$$

Note. — Après lecture de cette solution très simple, on pourra s'étonner qu'elle se soit fait attendre plus de vingt ans. Le motif en est peut-être, d'après une suggestion de M. Laisant, un vain semblant de précision donné dans l'énoncé aux quantités x_1, x_2, x_3, x_4, affectées de signes distincts, parfaitement inutiles, et qui ont été spécifiés pour arrêter, embrouiller et faire hésiter le lecteur.

D'autre part, il est bien singulier aussi d'introduire une somme de carrés identiquement égale à zéro. Quelles que soient les racines x_1, x_2, x_3, x_4 supposées numériques, leurs carrés doivent être positifs, et pour que la somme desdits carrés soit nulle, il faut que l'un d'eux au moins soit négatif, d'où une contradiction ou une impossibilité apparente.

Soient a, b, c, d quatre quantités quelconques réelles, rangées dans leur ordre de grandeur

$$a > b > c > d.$$

On aura

$$x_1 = \pm\sqrt{a-b}, \qquad x_2 = \pm\sqrt{b-c}, \qquad x_3 = \pm\sqrt{c-d},$$

quantités réelles, mais

$$x_4 = \pm\sqrt{d-a}$$

est imaginaire (et sans conjuguée).

Si au contraire

$$a < b < c < d,$$

une seule des quantités x_i sera réelle et les trois autres seront imaginaires.

Dans l'un et l'autre cas, il y aura un nombre impair d'imaginaires, ce qui s'oppose à l'existence d'imaginaires conjuguées pour représenter les racines imaginaires d'une équation à coefficients réels. Il faudra donc alors que l'équation considérée ait des coefficients imaginaires, ce qui est une nouvelle contradiction.

La condition $\Sigma x^2 = 0$ est artificielle, car si l'on a, en quantités littérales,

$$(\pm\sqrt{a-b})^2 + (\pm\sqrt{b-c})^2 + (\pm\sqrt{c-d})^2 + (\pm\sqrt{d-a})^2 = 0,$$

cette identité algébrique ne se vérifie pas et même est impossible en nombres réels.

Il n'y a donc pas, à vrai dire, d'équation algébrique réelle, du quatrième degré, dont les quatre racines aient zéro pour somme de leurs carrés.

L'exercice **1730** a probablement été forgé de toutes pièces comme curiosité algébrique ne correspondant à aucune réalité.

1847.

(1900, p. 191; 1917, p. 359).

Un fil homogène de longueur l, dont le poids par unité de longueur est ϖ, est attaché par une de ses extrémités à un point fixe, tandis que l'extrémité libre porte un poids p. Ce fil est soumis à l'action du vent soufflant horizontalement avec une intensité et dans une direction constantes. On admet que la pression du vent sur chaque élément infiniment petit du fil est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse, et l'on demande de déterminer la forme d'équilibre du fil. Examiner ce que devient cette forme d'équilibre dans le cas où $p = 0$.

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. Philbert du Plessis.

Si α est l'angle de la normale au fil sur l'horizon, m une constante, T la tension du fil, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\frac{dT}{ds} = \varpi \cos\alpha, \tag{1}$$

$$T\frac{d\alpha}{ds} = m\cos^2\alpha - \varpi\sin\alpha, \tag{2}$$

d'où, si l'on pose $\dfrac{\varpi}{m} = 2k$,

$$\frac{dT}{T} = \frac{2k\cos\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha - 2k\sin\alpha}; \tag{3}$$

équation dont l'intégrale est

$$T = C\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+k+\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2}-k-\sin\alpha}\right)^{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}, \tag{4}$$

où C est une constante arbitraire.

Si l'on suppose l'origine des arcs prise à l'extrémité libre A, la tangente en ce point étant verticale et la tension égale à p, on détermine la constante C en écrivant que, pour $\alpha = 0$, on doit avoir $T = p$, ce qui donne

$$(5)\qquad \frac{T}{p} = \left[\frac{1 + (\sqrt{1+k^2} - k)\sin\alpha}{1 - (\sqrt{1+k^2} + k)\sin\alpha}\right]^{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

On aura ensuite l'arc s et les coordonnées x et y (rapportées à l'horizontale et à la verticale de l'extrémité libre) au moyen des équations

$$(6)\qquad ds = \frac{dT}{\varpi \sin\alpha},\qquad dx = \frac{dT}{\varpi},\qquad dy = \frac{dT}{\varpi}\tan g\alpha,$$

eu égard à ce que, pour $\alpha = 0$, on doit avoir $s = x = y = 0$.

Soit α_0 l'angle aigu défini par l'équation

$$(7)\qquad \sin\alpha_0 = \sqrt{1+k^2} - k.$$

L'angle α reste toujours inférieur à α_0, sans quoi, d'après (4), T deviendrait infinie, résultat impossible puisque T, en vertu de (1), est toujours inférieure à $p + \varpi s$.

On voit ainsi que la courbe n'a pas de point d'inflexion, car, T restant finie, $\frac{d\alpha}{ds}$, en vertu de (2), ne peut s'annuler que pour $m\cos^2\alpha - \varpi\sin\alpha = 0$, ou $\cos^2\alpha - 2k\sin\alpha = 0$, équation qui donne précisément $\sin\alpha = \sin\alpha_0$.

Remarquons enfin que le rayon de courbure à l'extrémité libre A, valeur de $\frac{ds}{d\alpha}$ pour $\alpha = 0$, est égal à $\frac{p}{m}$.

Supposons maintenant que p devienne infiniment petit. Le rayon de courbure en A tend également vers zéro; c'est-à-dire qu'au voisinage de ce point la tangente peut tourner d'un angle fini pour un déplacement infiniment petit le long du fil. D'autre part, la formule (4) montre que (la constante C devenant infiniment petite avec p) la tension T est infiniment petite à moins que le dénominateur $\sqrt{1+k^2} - k - \sin\alpha$ ne soit lui-même infiniment petit. Or, en vertu de (1), la tension est finie dès que s est finie. Il en résulte que, pour tous les points à distance finie de A, l'angle α diffère infiniment peu de la constante α_0. A la limite, en faisant $p = 0$, on trouve que la forme d'équilibre ne peut différer d'une ligne droite faisant l'angle α_0 avec la verticale. Effectivement, cet angle constant donne pour $\frac{d\alpha}{ds}$ et pour $m\cos^2\alpha - \varpi\sin\alpha$ des valeurs nulles qui vérifient l'équation (2). Quant à l'équation (1) elle fait connaître la tension qui est $T = \varpi s \cos\alpha_0$.

L'angle α_0 est nul pour $k = \infty$ (absence de vent) et égal à $\frac{\pi}{2}$ pour $k = 0$ (vent infini).

QUESTIONS.

2373. Une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite une épicycloïde admet des plans de symétrie passant par une même droite; soient O la projection des sommets de l'hélice sur cette droite; A un point de l'hélice, B le centre de la sphère osculatrice en ce point, il y a une relation du premier degré entre $\overline{OA}^2$ et $\overline{OB}^2$: $m\overline{OA}^2 + n\overline{OB}^2 = d^2$; m, n et d^2 constants. A. PELLET.

2374. Soient, sur un cercle de centre O, un point fixe A et un point variable M. Le centre de gravité G de l'arc AM décrit une courbe (G) dont (en vertu d'une propriété connue des courbes quelconques; voir *N. A.*, 1886, p. 65) la tangente passe par le point M. Cela posé, démontrer que, si la perpendiculaire élevée en M à MG coupe en H la parallèle à OM menée par G, et si les perpendiculaires menées à MG par O et à OG en son milieu se rencontrent en I, la droite qui joint le point H au centre de courbure de la courbe (G) est parallèle à celle qui joint le point O au milieu de MI.

M. D'OCAGNE.

2375. Si le cercle Γ_1 roule par sa concavité sur le cercle Γ de rayon moitié moindre, toute droite entraînée dans le mouvement de Γ_1 a pour enveloppe un cercle dont le centre se trouve sur Γ [1], et tout point lié à Γ_1 décrit un limaçon de Pascal. M. d'Ocagne.

2376. La caustique par réflexion d'une cycloïde pour des rayons incidents perpendiculaires à la base est une autre cycloïde (J. Bernoulli). Démontrer que lorsque les rayons incidents sont parallèles à la base la caustique est une courbe parallèle à une cycloïde. F. Balitrand.

2377. M. G. Humbert a démontré que la caustique par réflexion d'une hypocycloïde à trois rebroussements H_3, pour des rayons incidents perpendiculaires à une tangente de rebroussement, est une hypocycloïde à quatre rebroussements H_4. Prouver que le théorème subsiste quand les rayons incidents sont parallèles à une tangente de rebroussement.

F. Balitrand.

2378. L'équation

$$x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 4x - 1 = 0$$

est entièrement résoluble sans employer d'autres symboles que des radicaux carrés. Former l'expression algébrique des racines, toutes réelles. H. de Montille.

2379. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_{m-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, m étant pair, démontrer que l'on a

$$\sum_{p=0}^{p=m-1} \begin{vmatrix} x^m & x_p & x_p x & \ldots & x_p x^{m-2} & x_p x^{m-1} \\ x^{m-1} & 1 & x_p & \ldots & x_p x^{m-3} & x_p x^{m-2} \\ x^{m-2} & 0 & 1 & \ldots & x_p x^{m-4} & x_p x^{m-3} \\ \ldots & . & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_p \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = m(x^m + 1).$$

J. Bouchary.

2380. Appelons « droite de déviation d'une courbe (M) en

---

[1] Cette première partie de l'énoncé peut être regardée comme réciproque de l'exercice n° 7 des *Problèmes de Mécanique rationnelle* de M. E. Fabry. (M. O.)

un point M », la droite qui joint ce point au centre C_1 de courbure de la développée (C) correspondant; le point de contact O de MC_1 avec son enveloppe se trouve sur la droite de déviation de (C). Lorsque O est fixe, la courbe (M) est une épicycloïde à base réelle ou imaginaire, ou une dégénérescence. Dans le cas général, O est le centre d'une épicycloïde ayant un contact du quatrième ordre avec la courbe (M). Soit P la projection de C, centre de courbure de (M) en M sur la droite de déviation MC_1O; le carré du rayon de la base de cette épicycloïde, B^2, est égal à $\overline{OM}.\overline{OP}$. Lorsque B^2 est constant, O n'étant pas fixe, on a $B^2 = -\overline{OM}^2$ et par suite $OP = -OM$. Construire la courbe.

A. PELLET.

2381. Les hélices, pour lesquelles la droite joignant un point de la courbe au centre de la sphère osculatrice correspondante s'appuie sur une droite fixe, appartiennent à des cylindres dont les sections droites sont des épicycloïdes.

A. PELLET.

2382. Considérons deux lignes asymptotiques de la surface réglée formée par les normales principales d'une courbe (M). Soient r et r_1 les distances au point M de cette courbe des points de rencontre de ces asymptotiques avec la génératrice passant par M, T le rayon de torsion en M de la courbe (M); on a

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{C}{\sqrt{T}},$$

C étant une constante.

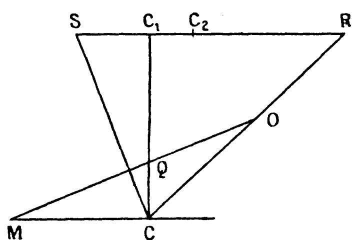
A. PELLET.

[M[1] 3 i]

SUR LES TROISIÈME ET QUATRIÈME CENTRES DE COURBURE DES COURBES DE CESÀRO;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Soient M un point d'une courbe de Cesàro Γ d'indice n, dont le cercle directeur a pour centre O et pour rayon r, et C, C_1, C_2, C_3 les quatre premiers centres de courbure successifs de Γ correspondant au point M. La connaissance des éléments n, O, r entraîne celle des deux premiers centres de courbures C et C_1.



En effet, si P désigne le point où la polaire de M par rapport au cercle directeur rencontre MC, on a

$$\overline{CP} = n\overline{MC};$$

d'autre part, si l'on appelle Q le point d'intersection du rayon vecteur OM avec CC_1 on a

$$\overline{CC_1} : \overline{CQ} = (1 - n) : (1 + n).$$

Proposons-nous de déterminer le troisième centre de courbure C_2 correspondant au point M de Γ. Prenons comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale au point C de la développée Γ' et Γ, la direction positive de l'axe des x ayant le sens de la semi-droite MC, celle de l'axe des y ayant le sens de la semi-droite CC_1. Soient ρ et s le rayon de courbure et l'arc de Γ' en C, l'origine des arcs comptés sur Γ' étant choisie de manière que les coordonnées de M soient $(-s, O)$; désignons encore par α et β les coordonnées variables du pôle fixe O et posons $\lambda = (1-n):(1+n)$. Les équations de OM et C_1C_2 s'écrivent alors

$$\beta x - (\alpha + s)y + \beta s = 0,$$

$$(1) \qquad f(x, y, s) \equiv (\alpha + s)y - \lambda\beta s = 0.$$

Les coordonnées du point C_2 où C_1C_2 touche son enveloppe s'obtiennent en résolvant le système formé par (1) et l'équation

$$(2) \qquad (y-\rho)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

ou

$$(3) \qquad -(\alpha + s)x + \rho\left(\frac{d\alpha}{ds} + 1\right)y - \lambda\rho s\frac{d\beta}{ds} - \lambda\beta\rho = 0.$$

Or, le point O étant fixe, on a, d'après les formules de Cesàro,

$$(4) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho} - 1, \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$(\alpha + s)x - \beta y + \lambda\beta\rho - \lambda\alpha s = 0.$$

En y faisant $y = \rho$, on trouve l'abscisse de C_2 et l'on en déduit facilement la construction suivante :

Si OC *et la perpendiculaire abaissée de* C *sur* OM *coupent* C_1C_2 *en* R *et* S, *le segment* $\overline{RC_2}$ *vaut* $\frac{2n}{n+1}\overline{SC_1}$.

Le cas des cycloïdales correspond à $n = 0$; on retrouve que le premier et le troisième centres de courbure sont collinéaires avec le pôle.

Pour $n = -2$, on obtient cette *construction du troisième centre de courbure en un point* M *d'une conique* de centre O, si l'on suppose construits les deux premiers centres de courbure C et C_1 :

La droite OC *et la perpendiculaire abaissée de* C *sur* OM *coupent* C_1C_2 *en* R *et* S; C_2 *est le point obtenu en portant sur* $\overline{RC_1}$ *le segment* $\overline{RC_2}$ *égal à* $4\overline{SC_1}$.

Remarquons que les considérations qui précèdent sont également applicables au cas limite de la chaînette d'égale résistance; le point O est alors à l'infini et l'on a $\lambda = -1$.

2. La construction générale obtenue plus haut s'applique en particulier aux spirales sinusoïdes et aux courbes de Ribaucour; rappelons, au sujet de ces courbes, que Cesàro a donné [1] une construction du troisième centre de courbure pour une autre classe générale de courbes qui les comprend également comme cas particuliers; ce sont les courbes définies par l'équation intrinsèque

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{l}{m}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m} - 1\right]}}. \tag{5}$$

Pour ces courbes, le troisième centre de courbure C_2 s'obtient de la manière suivante :

Soient L *le point qui divise* CM *dans le rapport*

---

[1] *Natürliche Geometrie*, p. 77.

de l *à* $1-l$ *et* K *le point qui divise* CC_1 *dans le rapport de* $(m+1)l$ *à* $1-(m+1)l$; *la perpendiculaire élevée en* L *sur* LK *passe par le troisième centre de courbure cherché.*

3. *Courbes de Cesàro osculatrices.* — Une courbe de Cesàro Γ d'indice donné n oscule une courbe quelconque γ en un point M quand elle a avec celle-ci un contact quintiponctuel en M; alors les trois premiers centres de courbure de Γ et γ en M coïncident. On a donc cette construction pour le pôle O de la courbe de Cesàro, d'indice donné n, qui oscule une courbe γ en un point M, connaissant les trois premiers centres de courbure de γ en M :

Soient Q *le point qui divise* CC_1 *dans le rapport de* $1+n$ *à* $2n$, S *le point où la perpendiculaire abaissée de* C *sur* MQ *coupe* C_1C_2, R *le point obtenu en prenant* $\overline{C_2R}$ *égal à* $\frac{2n}{n+1}C_1S$; *la droite* CR *coupe* MQ *au pôle cherché.*

En particulier, quand on construit le *centre de la conique qui oscule une courbe donnée* en M, le segment $\overline{C_2R}$ vaut $\overline{4C_1S}$.

4. En dérivant sous la forme (2) l'équation

$$(\alpha+s)x+\mu\beta\rho-\lambda\alpha s=0 \qquad (\mu=\lambda-1)$$

de la parallèle à CC_1 menée par C_2, et en tenant compte des relations (4), on trouve

$$(\alpha+s)(y-\rho)+\beta x-\mu\alpha\rho \\ +\mu\beta\rho\frac{d\rho}{ds}-\lambda\alpha\rho-\lambda\beta s+\lambda\rho s=0.$$

En remarquant que C_3 a pour abscisse $-\rho\frac{d\rho}{ds}$, on voit que ce point appartient à la droite

$$(\alpha+s)y-(\lambda-2)\beta x-\rho[(2\lambda+1)\alpha-(\lambda-2)s]=0.$$

On déduit de là cette construction du point C_3 :

Soient a et a' les projections de O *sur* MC *et* C_1C_2, *g, h, k les points qui divisent* Oa *dans le rapport de* $2(1+2n)$ *à* $1+3n$, aa' *dans le rapport de* $1+3n$ *à* $2n$, Ma *dans le rapport de* $3-n$ *à* $1+3n$. *La parallèle à* Mg *menée par l'intersection de* CC_1 *et* kh *passe par* C_3.

3. *Quatrième centre d'une classe de courbes remarquables.* — La construction précédente s'applique en particulier aux spirales sinusoïdes et aux courbes de Ribaucour. On obtient une construction plus simple pour le quatrième centre de courbure de ces courbes en les considérant comme cas spéciaux des courbes (5). En dérivant l'équation (5) trois fois par rapport à s, on obtient une relation dont on déduit aisément cette construction du quatrième centre de courbure d'une courbe (5) :

Le centre de courbure cherché appartient à la droite qui joint le point qui divise le premier rayon de courbure dans le rapport de $2(l+m)$ *à* $2l-1$ *à celui qui divise le deuxième rayon de courbure dans le rapport de* $(2l-1)$ *à* $2l$.

[L[1] 11 a]

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT DES GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient A_1, B_1, C_1, D_1 quatre points d'une hyperbole équilatère (H) d'équation $xy=1$; les orthocentres A_2,

B_2, C_2, D_2 des triangles $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ sont quatre nouveaux points de (H); soient de même A_3, B_3, C_3, D_3 les orthocentres des triangles $B_2C_2D_2$, $C_2D_2A_2$, $D_2A_2B_2$, $A_2B_2C_2$, ... et ainsi de suite. M. Appell a donné le problème de chercher (*Nouv. Ann.*, 1918, p. 41) s'il est possible que le groupe $A_nB_nC_nD_n$ coïncide en tout ou en partie avec le groupe initial $A_1B_1C_1D_1$.

Désignons par a_i, b_i, c_i, d_i les abscisses des points A_i, B_i, C_i, D_i. On sait que, lorsque quatre points de (H) forment un groupe orthocentrique, le produit de leurs abscisses est égal à -1; on aura donc

$$a_2 = -\frac{a_1}{a_1b_1c_1d_1}, \qquad b_2 = -\frac{b_1}{a_1b_1c_1d_1}, \qquad \ldots,$$
$$a_3 = a_1^2b_1^2c_1^2d_1^2 \times a_1, \qquad b_3 = a_1^2b_1^2c_1^2d_1^2 \times b_1, \qquad \ldots,$$
$$a_4 = -\frac{a_1}{a_1^7b_1^7c_1^7d_1^7}, \qquad b_4 = -\frac{b_1}{a_1^7b_1^7c_1^7d_1^7}, \qquad \ldots,$$

et, d'une manière générale,

$$(1) \qquad a_n = a_1 \times (-1)^{n-1} \times (a_1b_1c_1d_1)^{k_n},$$

la loi de récurrence entre les k s'écrivant

$$k_n = -3k_{n-1} - 1;$$

on a, par conséquent,

$$(2) \qquad k_n = \frac{(-3)^{n-1} - 1}{4}.$$

Les relations (1) et (2) permettent d'étudier complètement la question.

Observons d'abord qu'en raison de la proportionnalité de a_n, b_n, c_n, d_n et a_1, b_1, c_1, d_1, les côtés correspondants de deux quadrilatères $A_nB_nC_nD_n$ et $A_1B_1C_1D_1$ sont parallèles, de sorte que, si A_n coïncide avec A_1, les autres points B_n, C_n, D_n coïncident respectivement avec B_1, C_1, D_1. En tenant compte de cette remarque, on voit que les manières essentiellement distinctes de réaliser la coïncidence complète des deux groupes $A_1B_1C_1D_1$ et $A_nB_nC_nD_n$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
(3) & A_n \equiv A_1, & B_n \equiv B_1, & C_n \equiv C_1, & D_n \equiv D_1, \\
(4) & A_n \equiv C_1, & B_n \equiv D_1, & C_n \equiv A_1, & D_n \equiv B_1, \\
 & A_n \equiv B_1, & B_n \equiv C_1, & C_n \equiv D_1, & D_n \equiv A_1,
\end{array}$$

cette dernière solution n'étant d'ailleurs possible que si les points donnés A_1, B_1, C_1, D_1 sont confondus.

En considérant le cas (3), on a ce premier résultat :

Lorsque le produit ξ *des abscisses des points* A_1, B_1, C_1, D_1 *sera racine de l'équation*

$$\xi^{\frac{(-3)^{n-1}-1}{4}} = (-1)^{n-1},$$

il y aura coïncidence entre les groupes $A_nB_nC_nD_n$ *et* $A_1B_1C_1D_1$.

Comme solutions réelles on retrouve d'abord, pour $n = 2$, le cas des groupes orthocentriques. Pour $n = 3$, on a pour le produit $a_1b_1c_1d_1$ les valeurs -1 et $+1$; la première correspond encore au cas des groupes orthocentriques; la seconde donne lieu à la solution dans laquelle chaque groupe $A_iB_iC_iD_i$ est le symétrique du groupe précédent $A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}D_{i-1}$ par rapport au centre de (H).

On voit ensuite que *la coïncidence* (4) *sera réalisée si l'on a*

$$(a_1b_1)^{\frac{(-3)^{n-1}-1}{2}} = (-1)^n$$

et si l'on prend en outre $c_1 = -a_1$, $d_1 = -b_1$.

Enfin on étudiera de la même façon, au moyen des relations (1), (2), la coïncidence partielle de deux groupes $A_1B_1C_1D_1$ et $A_nB_nC_nD_n$ en considérant les équations qui expriment l'égalité de certaines abscisses a_1, b_1, c_1, d_1 et a_n, b_n, c_n, d_n; rappelons seulement que, d'après une remarque faite plus haut, il sera impossible de réaliser une coïncidence partielle dans laquelle deux points correspondants, A_1 et A_n par exemple, seraient confondus, car alors les autres points correspondants B_1 et B_n, C_1 et C_n, D_1 et D_n coïncident nécessairement.

REMARQUE. — On peut remarquer que la condition $a_1\,b_1\,c_1\,d_1 = +1$ signifie que les quatre points correspondants sont sur un cercle.

---

[15]

SUR LES NOMBRES COMPLEXES DE DEUXIÈME ET DE TROISIÈME ESPÈCE;

PAR M. L.-G. DU PASQUIER,
Professeur à l'Université de Neuchâtel
(Suisse).

I. — LES NOMBRES COMPLEXES DE SECONDE ESPÈCE.

1. Appelons *nombres complexes de seconde espèce* des complexes de la forme $a \equiv a_0 + a_1 j$, où a_0 et a_1 représentent des nombres réels d'ailleurs quelconques dits *coordonnées* du complexe a, et j un symbole défini par l'équation

$$j^2 = 1. \tag{1}$$

Le signe $\equiv$ (doublement égal) se prononcera « égal par définition » ou « identiquement égal » suivant que l'égalité résultera d'une définition ou d'opérations algébriques. a_0 sera dit *la première* et a_1 *la deuxième coordonnée* du complexe a. Nous définissons l'égalité de deux nombres complexes de seconde espèce par l'égalité des coordonnées correspondantes. Si

$$b \equiv b_0 + b_1 j$$

est un tel nombre, l'égalité $a = b$ entraînera les deux égalités simultanées entre nombres réels $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$.

Soumettons ces complexes de seconde espèce au calcul selon « les règles de l'algèbre ordinaire », en tenant compte de (1). On voit que l'addition, la soustraction et la multiplication, résumées par les formules

$$(2) \qquad a \pm b = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) j,$$

$$(3) \qquad ab = (a_0 b_0 + a_1 b_1) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) j$$

sont toujours possibles et univoques.

Les nombres complexes de seconde espèce, de même que les nombres complexes ordinaires de la forme $a + bi$, où $i^2 \equiv -1$, renferment comme sous-groupe le système des nombres réels, ce qui conduit à poser la définition : un complexe de seconde espèce r est dit *réel* quand sa deuxième coordonnée est nulle.

A tout complexe de seconde espèce $x \equiv x_0 + x_1 j$ correspond un complexe $x' \equiv x_0 - x_1 j$ dit le *conjugué* de x. Le produit d'un complexe y et de son conjugué y' est réel et s'appelle *la norme de* y, en formule :

$$(4) \quad N(y) \equiv y \cdot y' \equiv (y_0 + y_1 j)(y_0 - y_1 j) = y_0^2 - y_1^2.$$

La norme d'un produit de plusieurs facteurs est égale au produit des normes des divers facteurs.

Ici apparaît la première différence profonde d'avec le système des nombres complexes ordinaires : un produit peut s'annuler sans qu'aucun de ses facteurs ne soit nul. Exemple : $(1+j)(1-j)=0$, en vertu de (1), tandis que $(1+i)(1-i)=2$, puisque $\equiv i^2-1$.

Définition. — Un complexe x est dit un *diviseur de zéro*, s'il existe un nombre complexe y non nul et tel que $xy=0$.

Avec M. Berloty, nous représenterons les diviseurs de zéro par le signe θ (un zéro divisé par un trait horizontal). On démontre que tout diviseur de zéro est de la forme $z_0(1\pm j)$.

Définition. — Un complexe de seconde espèce

$$x\equiv x_0+x_1 j$$

est dit « quotient de a par b », et l'on écrit $x=\frac{a}{b}$, si, a et b étant des complexes donnés d'ailleurs quelconques, x satisfait à l'égalité $bx=a$. En vertu des définitions posées, cette condition est satisfaite si l'on a simultanément

$$(5)\qquad a_0=b_0x_0+b_1x_1,\qquad a_1=b_0x_1+b_1x_0.$$

Si $b\neq\theta$, on trouve

$$x_0=\frac{a_0b_0-a_1b_1}{b_0^2-b_1^2},\qquad x_1=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2-b_1^2}.$$

Dans ce cas, le quotient est univoquement déterminé. Si, au contraire, b est un diviseur de zéro, le quotient $\frac{a}{b}$ est ou bien indéterminé, ou bien inexistant. Exemples : le quotient

$$\frac{1+j}{1+j}=\xi_0+(1-\xi_0)j\equiv\xi$$

est indéterminé puisque, ξ_0 représentant un nombre réel arbitraire, on a toujours $(1+j)\xi = 1+j$; tandis que le quotient $x \equiv \frac{3+3j}{5-5j}$ n'existe pas, puisque les équations (5) qui en résulteraient

$$3 = 5x_0 - 5x_1, \qquad 3 = 5x_1 - 5x_0$$

sont manifestement incompatibles.

En résumé, les quatre opérations rationnelles ainsi définies sont toujours possibles et univoques, sauf la division par des diviseurs de zéro.

2. Appelons *rationnel* tout nombre complexe de seconde espèce a dont les deux coordonnées a_0 et a_1 sont des nombres rationnels ordinaires. Le complexe a sera dit *irrationnel*, si a_0 ou a_1, ou les deux, sont irrationnels. Dans la suite, nous envisagerons exclusivement des complexes rationnels et les appellerons souvent *complexes* tout court. L'ensemble de tous les complexes rationnels forme *un corps de nombres* ou *domaine de rationalité* que nous désignerons par $\{R\}$; c'est dire que les complexes rationnels se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division, pour autant que la division est possible et univoque.

Nous nous proposons de faire l'arithnomie de $\{R\}$.

Le premier pas consistera à départager le corps $\{R\}$ en deux ensembles, mettant d'un côté les complexes rationnels « entiers » encore à définir, de l'autre les complexes rationnels « non entiers ». La définition suivante que nous appelons *lipschitzienne* se présente le plus naturellement à l'esprit : un complexe a est dit *entier*, si ses coordonnées sont des nombres entiers ordinaires; a sera dit *non entier*, si l'une au moins de ses deux coordonnées n'est pas un nombre entier. Sur cette définition lipschitzienne comme base, on peut ériger une arithnomie de $\{R\}$, arithmétique généralisée analogue à la classique. Un complexe entier a est dit « *divisible* par un complexe entier b », s'il existe un complexe *entier* $c \equiv c_0 + c_1 j$ tel que $bc = a$; on dira dans ce cas que b est un diviseur de a, et a un multiple de b. Dans le cas où les complexes sont réels, cette définition de la divisibilité se confond avec celle donnée dans l'arithmétique ordinaire.

Dans toutes les questions de divisibilité et de décomposition en facteurs premiers, les diviseurs de zéro doivent être mis à part, comme dans l'arithmétique classique le zéro. On démontre alors qu'il existe dans $\{R\}$ quatre *unités :* $1, -1, j, -j$. Des complexes entiers qui ne diffèrent que par un facteur unité, tels $a, -a, aj, -aj$ sont dits *associés*. Dans des questions de divisibilité, des nombres associés peuvent se substituer l'un à l'autre.

On retrouve dans cette arithmétique généralisée : la théorie du plus grand commun diviseur, celle du plus petit commun multiple, la théorie des congruences, l'analogue du théorème de Fermat, etc., puis la théorie des « complexes entiers *irréductibles* » qui jouent ici le même rôle que les nombres premiers dans l'arithmétique classique. Nous laissons au lecteur de démontrer que tout nombre complexe entier de seconde espèce et qui n'est pas diviseur de zéro est décomposable en un produit d'un nombre fini de facteurs premiers, c'est-à-dire de complexes entiers irréductibles.

3. Cette arithnomie basée sur la définition lipschitzienne du complexe entier présente des anomalies curieuses, même abstraction faite des diviseurs de zéro. En voici quelques exemples : il n'existe aucun complexe entier de norme 2, ni de norme $2p$, quand

p représente un nombre premier impair; l'équation $x^2 - y^2 = 2$ n'a en effet pas de solutions en *nombres entiers* x, y.

Le procédé (analogue à l'algorithme d'Euclide) qui permet de déterminer, au moyen d'un nombre fini d'opérations rationnelles, le plus grand commun diviseur de deux complexes entiers donnés tombe en défaut dans certains cas. La décomposition en facteurs premiers, toujours possible, n'est pas toujours univoque. Il en résulte de suite qu'un produit de deux facteurs peut être divisible par un complexe premier sans qu'aucun des facteurs ne le soit. Exemple : le produit $(9 - 7j)(17 + 15j)$ est divisible par 2 et par $3 + j$ qui sont pourtant irréductibles, sans qu'aucun des facteurs ne le soit, comme le prouvent les égalités

$$(9 - 7j)(17 + 15j) = 2(24 + 8j) = 16(3 + j).$$

4. Il est assurément digne d'intérêt qu'on puisse faire disparaître ces anomalies comme par enchantement en définissant autrement le nombre complexe « entier ». Adoptons la définition suivante : un nombre complexe de seconde espèce est dit *entier* s'il est de la forme $a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}j$, où a et b représentent des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques ». En vertu de cette nouvelle définition, $\frac{9}{2} - \frac{7}{2}j$, $\frac{3}{2} \pm \frac{j}{2}$ sont des complexes *entiers* quoique ayant des coordonnées fractionnaires.

On peut démontrer qu'avec cette nouvelle définition du « nombre entier », l'arithnomie devient régulière, c'est-à-dire ne présente aucune des complications citées plus haut. En particulier, l'algorithme d'Euclide y est toujours applicable; il existe des complexes entiers de norme ± 2; ce sont $\frac{3}{2} \pm \frac{j}{2}$ et leurs associés ; la décomposition d'un complexe donné en facteurs premiers est toujours possible et d'une seule manière; un produit de deux facteurs ne saurait être divisible par un complexe irréductible sans que l'un au moins des facteurs le soit; etc. Reprenons l'exemple de tout à l'heure. On vérifie que

$$9 - 7j = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right)^4;$$

$$17 + 15j = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)^5\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right);$$

$$2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right);$$

$$3 + j = \left(\frac{3}{2} + \frac{j}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2} - \frac{j}{2}\right);$$

ce qui fait tomber l'anomalie susmentionnée (*voir* n° 3).

Remarque. — Observons que tous les diviseurs de zéro sont des multiples de $\frac{1}{2} + \frac{j}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$ et de leurs associés. Ce complexe est *idempotent*, c'est-à-dire qu'il jouit de la propriété remarquable d'être identique à toutes ses puissances entières, $\left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}$. Le système des nombres complexes de seconde espèce ne contient que quatre nombres idempotents : 0, 1, $\frac{1}{2} + \frac{j}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{j}{2}$.

En résumé : les diviseurs de zéro une fois mis à part, l'arithnomie du corps $\{R\}$ basée sur la définition nouvelle du complexe « entier » est semblable en tout point à l'arithmétique classique, ou à celle érigée par Gauss dans le domaine des nombres complexes ordinaires $a + bi$ en y prenant pour base la définition lipschitzienne du nombre imaginaire entier.

5. Quelle est la raison profonde de ce phénomène

curieux? Pourquoi la définition lipschitzienne est-elle « bonne » dans le cas des nombres complexes ordinaire $a + bi$ et pas dans celui des nombres complexes de seconde espèce $a + bj$? En d'autres termes : comment se fait-il que la définition lipschitzienne conduise à une arithnomie régulière dans le premier domaine et pas dans le second? Pour répondre à ces questions, nous introduirons encore quelques notions en nous laissant guider par l'analogie.

Définitions. — Nous appelons *domaine holoïde* tout ensemble [H] de nombres ou de complexes quelconques jouissant des trois propriétés suivantes :

1° Le domaine [H] contient une infinité d'éléments parmi lesquels « le nombre 1 »;

2° On peut y effectuer sans restriction l'addition, la soustraction et la multiplication, sans jamais sortir du domaine; en d'autres termes : la somme, la différence et le produit de deux éléments de [H] est toujours de nouveau un élément de [H];

3° Le domaine possède une *base finie*, autrement dit : il est possible de choisir dans [H] un nombre fini d'éléments, disons t_1, t_2, ..., t_n, tels que l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_n t_n$$

reproduise *tous* les éléments du domaine, et *uniquement* ceux-là, lorsque m_1, m_2, ..., m_n prennent, de toutes les manières possibles, des valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Les complexes t_1, t_2, ..., t_n peuvent alors engendrer, par les seules opérations de l'addition et de la soustraction répétées un nombre fini de fois, n'importe quel élément du domaine en question. On dit pour cette raison que t_1, t_2, ..., t_n « forment *une base* du domaine [H] »; nous le désignerons aussi par le symbole [t_1, t_2, ..., t_n].

Exemples. — Les nombres entiers ordinaires constituent le domaine holoïde [1], le plus simple de tous. Les nombres complexes de Gauss à coordonnées entières forment le domaine holoïde $[1, i]$.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Dans le corps de nombres* $\{R\}$ *constitué par l'ensemble des complexes rationnels* $a_0 + a_1 j$, *le domaine holoïde le plus général a pour base* $t_1 \equiv 1$, $t_2 \equiv \frac{g}{2} + \frac{g}{2} j$, *où* $g \neq 0$ *représente un nombre rationnel entier d'ailleurs quelconque.*

Il existe donc dans $\{R\}$ une infinité simple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs entières de g et dont voici les principaux:

1° Pour $g = 2$, on trouve $[1; j]$, domaine holoïde constitué par l'ensemble des complexes « entiers au sens lipschitzien », c'est-à-dire à coordonnées entières;

2° Pour $g = 1$, on trouve $\left[1; \frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right]$, domaine holoïde constitué par l'ensemble des nombres complexes « entiers au sens nouveau ».

Définition. — Le domaine holoïde [H] est dit *maximal* s'il n'existe pas, *dans le corps de nombres envisagé*, un autre domaine holoïde qui contienne tous les éléments de [H], plus d'autres non contenus dans [H].

Voici maintenant la définition nouvelle du nombre complexe « entier » : un complexe rationnel a est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde maximal du corps $\{R\}$, et *non entier*, s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal. Peu importe donc que les coordonnées de a soient entières ou fractionnaires.

6. Pour répondre aux questions posées au commen-

cement du numéro précédent, nous avons démontré les deux théorèmes suivants :

1° Dans le corps $\{R\}$ constitué par l'ensemble des nombres complexes ordinaires $a+bi$ à coordonnées rationnelles, le domaine holoïde maximal $[t_1, t_2]$ possède la base $t_1 = 1$, $t_2 = i$;

2° Dans le corps $\{R\}$ constitué par l'ensemble des nombres complexes rationnels de seconde espèce $a+bj$, avec $j^2 = 1$, le domaine holoïde maximal $[t_1, t_2]$ possède la base $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}(1+j)$.

Il s'ensuit que : 1° dans le cas des nombres complexes ordinaires, le domaine holoïde $[1, i]$ étant maximal, définition lipschitzienne et définition nouvelle du complexe « entier » se confondent en une seule et donnent le complexe à coordonnées entières; 2° dans le cas des nombres complexes de seconde espèce, le domaine holoïde $[1, j]$ n'est pas maximal, puisqu'on peut l'élargir sans sortir de $\{R\}$, en lui adjoignant $\frac{1}{2}+\frac{j}{2}$; dès lors, les deux définitions du complexe « entier », la lipschitzienne et la nouvelle, sont différentes. Or, c'est toujours la nouvelle qui convient, parce qu'elle conduit à une arithnomie régulière; mais elle exige la détermination préalable du domaine holoïde maximal dans le corps de nombres $\{R\}$.

II. — Les nombres complexes de troisième espèce.

7. Appelons *nombres complexes de troisième espèce* des complexes de la forme $a \equiv a_0 + a_1 i'$, où i' est un symbole défini par

$$i'^2 = 0. \tag{6}$$

Pour ces nombres complexes de troisième espèce, on peut poser les mêmes définitions que pour ceux de seconde espèce, en introduisant les changements que nécessite la différence des symboles j et i' définis par (1) et (6). Nous appellerons *norme* du complexe a, et nous désignerons par $N(a)$, la valeur absolue de sa première coordonnée, de sorte que $N(a) \equiv |a_0|$. Les diviseurs de zéro sont, ici, les nombres complexes de troisième espèce à première coordonnée nulle, donc de la forme ri'. Avec ces changements, on peut répéter presque textuellement ce qui est dit au n° 1, en l'appliquant aux complexes de troisième espèce.

8. On peut également, en faisant les modifications voulues dans les énoncés, appliquer aux nombres complexes de troisième espèce les propositions des n^{os} 2 et 3.

9. Profitant de l'exemple des nombres complexes de seconde espèce, nous allons chercher à déterminer dans le corps $\{R\}$ le domaine holoïde maximal (*voir* n° 5).

Théorème fondamental. — *Dans le corps* $\{R\}$ *des nombres complexes de troisième espèce, le domaine holoïde* $[t_1, t_2]$ *le plus général a pour base* $t_1 = 1$, $t_2 = \beta i'$, *où* $\beta \neq 0$ *représente un nombre rationnel entier ou fractionnaire choisi arbitrairement, mais fixe.*

Tout domaine holoïde $[1, \beta i']$ de $\{R\}$ est donc constitué par l'ensemble des complexes $m_1 + m_2 \beta i'$ qu'on obtient en faisant parcourir à m_1 et à m_2, indépendamment l'un de l'autre, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, le nombre β restant fixe. Le corps $\{R\}$ contient donc une infinité de domaines holoïdes caractérisés chacun par une valeur déterminée de β. Parmi eux, il s'agit de déterminer celui qui est maximal.

Or, il n'y en a point.

Nous laissons au lecteur de démontrer ce résultat inattendu; il suffit de mettre β sous forme de fraction irréductible et de s'appuyer sur le théorème fondamental ci-dessus. Les nombres complexes de troisième espèce fournissent l'exemple le plus simple d'un système de nombres où le corps $\{R\}$ ne possède pas de domaine holoïde maximal.

10. On peut se proposer d'ériger une arithnomie du corps $\{R\}$. Du moment où il est dépourvu de domaine holoïde maximal, la définition du nombre entier y est jusqu'à un certain point arbitraire et il faut s'attendre *a priori* à ce que l'arithnomie basée sur une telle définition présente de curieuses singularités, même en mettant à part les diviseurs de zéro.

Adoptons la définition que voici : « Un complexe de troisième espèce a est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde $[H] \equiv [1; \beta i']$, où $\beta > 0$ représente un nombre rationnel arbitrairement choisi, mais fixe; a est dit *non entier*, s'il n'est pas contenu dans $[H]$ ». C'est dire que sera réputé *entier* tout complexe $m_1 + m_2 \beta i'$ dont la première coordonnée, m_1, est un nombre entier ordinaire et la seconde, $m_2\beta$, un multiple de β. En prenant $\beta = 1$, on retrouve la définition lipschitzienne du nombre complexe entier. Celle que nous adoptons ici est beaucoup plus large, puisqu'on peut prendre pour β un nombre rationnel positif aussi petit qu'on veut. Voici quelques théorèmes fondamentaux de cette arithmétique généralisée, faciles à démontrer :

1° Le domaine $[H]$ contient une infinité d'*unités*, c'est-à-dire de complexes entrant comme diviseur dans n'importe quel complexe « entier »; ce sont les nombres $\varepsilon_n \equiv 1 + n\beta i'$; en posant par convention $\varepsilon_1^0 = 1$, on voit que $\varepsilon_n = \varepsilon^n = (1 + \beta i')^n$ pour toute valeur entière de n. A tout complexe $a \equiv m_1 + m_2 \beta i'$ sont ainsi associés une infinité d'autres, $a\varepsilon_n$, tous équivalents au point de vue de la divisibilité (*voir* n° **2**). Il est utile de choisir dans ce groupe un « représentant » univoquement déterminé, par exemple celui dont la première coordonnée m_1 est positive et où simultanément $0 \leqq m_2 < m_1$. Appelons-le *primaire*.

2° Dans le groupe des complexes entiers de troisième espèce associés à un même complexe entier donné a, il s'en trouve toujours un et un seul qui est primaire. Dans les questions de divisibilité et de décomposition en facteurs, on peut se borner aux complexes primaires.

3° Il existe p complexes entiers primaires différents ayant même norme p.

4° Les complexes entiers *irréductibles* (*voir* n° **2**) sont ici ceux qui ont la forme $p^n + m\beta i'$, où p représente un nombre premier naturel, m et n des nombres naturels, n d'ailleurs quelconque, m non divisible par p et inférieur à p^n.

5° Tout nombre complexe entier de troisième espèce est décomposable en un nombre fini de facteurs irréductibles.

6° Cette décomposition n'est plus univoque dès que la première coordonnée est divisible par le carré d'un nombre entier > 1. Par exemple, $p^4 + 4p^3 a\beta i'$ peut se mettre sous la forme d'un produit de quatre facteurs irréductibles qui sont, à volonté, tous égaux entre eux, ou tous inégaux, ou dont trois ou seulement deux sont égaux, quand on prend pour p un nombre premier suffisamment grand et pour a l'un des nombres 2, 3, 4, ..., $E\left(\frac{p}{4}\right)$.

7° Quand deux complexes entiers sont *premiers entre eux*, leurs puissances peuvent ne plus l'être. Exemple : $d_2 \equiv 7 + 2\beta i'$ et $d_3 \equiv 7 + 3\beta i'$ sont premiers entre eux, mais leurs carrés ne le sont plus, étant tous deux divisibles par 7.

8° La théorie du plus grand commun diviseur est profondément modifiée. Montrons-le par un exemple : les deux complexes entiers

$$a \equiv 49 + 35\beta i' \qquad \text{et} \qquad b \equiv 49 + 42\beta i'$$

possèdent six communs diviseurs primaires, donc essentiellement différents, savoir

$$d_0 \equiv 7,\ d_1 \equiv 7 + \beta i',\ d_2 \equiv 7 + 2b i',\ \ldots,\ d_5 \equiv 7 + 5\beta i'.$$

Malgré cela, a et b n'ont pas de « plus grand commun diviseur ». En d'autres termes, on arrive à des incompatibilités dès que l'on admet l'existence d'un complexe entier d dont les diviseurs seraient précisément d_0, d_1, d_2, ..., d_5 et qui serait en même temps diviseur commun de a et de b.

Notre présomption *a priori* que l'arithnomie des nombres complexes de troisième espèce diffère essentiellement de l'arithmétique ordinaire, même abstraction faite des diviseurs de zéro, est ainsi pleinement confirmée. L'élégante simplicité de la théorie classique ne saurait être atteinte ici, comme ce fut le cas pour les nombres complexes de seconde espèce, par un changement de définition du complexe « entier ». Il faut des méthodes plus profondes encore. L'une d'elles est donnée par la théorie des idéaux.

[O¹2f][O¹6j]

PROPRIÉTÉ DE CERTAINES COURBES ET SURFACES ENVELOPPES;

PAR M. MATHIEU WEILL.

Soit

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0 \tag{1}$$

une relation entre les distances de n points fixes à une droite mobile qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \tag{2}$$

avec la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0. \tag{3}$$

La distance δ_1 du point $x_1 y_1$ à la droite a pour expression

$$\delta_1 = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta - p.$$

Pour avoir le point où la droite mobile touche son enveloppe, prenons les différentielles totales des équations (1), (2) et (3), nous aurons

$$x\sin\alpha\, d\alpha + y\sin\beta\, d\beta + dp = 0,$$
$$\sin\alpha\, d\alpha\, \Sigma x_1 f'_{\delta_1} + \sin\beta\, d\beta\, \Sigma y_1 f'_{\delta_1} + dp\, \Sigma f'_{\delta_1} = 0,$$
$$\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha + \cos\beta\sin\beta\, d\beta = 0.$$

L'élimination des différentielles $d\alpha$, $d\beta$, dp donne

$$\frac{x - X}{\cos\alpha} = \frac{y - Y}{\cos\beta}, \tag{4}$$

en posant

$$X = \frac{\Sigma x_1 f'_{\delta_1}}{\Sigma f'_{\delta_1}}, \qquad Y = \frac{\Sigma y_1 f'_{\delta_1}}{\Sigma f'_{\delta_1}}.$$

Le point $x_1\, y_1$ où la droite mobile touche son enveloppe est donc donné par l'intersection de cette droite et de la droite représentée par l'équation (4), c'est-à-dire, de la perpendiculaire abaissée du point X, Y, sur la droite mobile; or, ce point est le centre des distances proportionnelles des points fixes affectés, respectivement, des coefficients f'_{δ_1}, f'_{δ_2}, ...

La démonstration et le résultat sont les mêmes si l'on remplace la droite mobile par un plan mobile, et si les n points fixes sont des points de l'espace. On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants, qui ne sont peut-être pas connus :

Théorème I. — *Si une droite se meut dans un plan de manière que les distances de n points fixes du plan à cette droite soient liées par la relation*

$$f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0,$$

on obtient le point où elle touche son enveloppe en projetant sur la droite le centre des distances proportionnelles des points fixes affectés des coefficients

$$f'_{\delta_1}, \quad f'_{\delta_2}, \quad \ldots, \quad f'_{\delta_n}.$$

Théorème II. — Même résultat pour un plan mobile et n points fixes de l'espace.

Les cas les plus simples sont ceux où la relation $f = 0$ est

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = K,$$

ou

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 = K^2,$$

ou

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n = K^n,$$

K désignant une constante.

Dans le premier cas, et aussi dans le cas où l'on aurait

$$a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \ldots + a_n \delta_n = K,$$

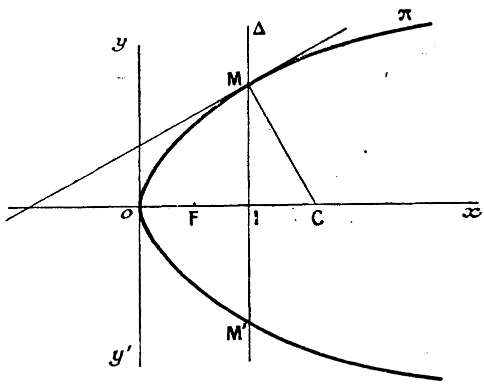
$a_1, a_2, \ldots,$ étant des constantes, le centre des distances proportionnelles est fixe, l'enveloppe est un cercle, résultat bien connu. Dans le second cas, l'enveloppe est une conique à centre, les coefficients de proportionnalité sont $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Dans le troisième cas, les coefficients sont $\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \ldots, \frac{1}{\delta_n}$, l'enveloppe est une conique à centre pour $n = 2$ et, dans les autres cas, une courbe de degré élevé.

[$L^1$10d]

SUR LES CERCLES BITANGENTS A LA PARABOLE;

Par M. J. BOUCHARY,
Élève à l'École Colbert.

Soient une parabole π, F son foyer, O le sommet, yOy' la tangente au sommet, Ox l'axe et p le paramètre et M, M' deux points symétriques par rapport à l'axe; les normales en M et M' concourent par raison de symétrie en un point C de l'axe; le cercle de centre C et de rayon CM aura, en M et M', mêmes tangentes que la parabole. On dit qu'il est bitangent à la parabole, MM' est la corde de contact.



Recherche de la position du centre. — Soient

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

l'équation de la parabole rapportée à sa tangente au sommet et à l'axe, puis

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \tag{2}$$

l'équation du cercle rapporté aux mêmes axes. Formons l'équation aux ordonnées des points de rencontre. De (1) on tire

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

puis portons dans (2), il vient

$$\left(\frac{y^2}{2p} - a\right)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$\frac{y^4}{4p^2} + a^2 - \frac{ay^2}{p} + y^2 + b^2 - 2by - R^2 = 0$$

ou encore

$$(3)\quad y^4 + 4y^2(p^2 - ap) - 8ybp^2 + 4p^2(a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

Cette équation n'a pas de terme en y^3, la somme des racines est donc nulle, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Quand un cercle rencontre une parabole en quatre points, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées de ces quatre points sur l'axe de la parabole est nulle.*

Il résulte de ce théorème que, lorsque le cercle sera bitangent à la parabole, les ordonnées des points de contact seront égales, mais de signe contraire.

L'équation (3) se présentera sous la forme

$$0 = (y - y_1)^2(y_1 + y)^2,$$

$$(y^2 + 2yy_1 + y_1^2)(y^2 + 2yy_1 + y_1^2) = 0,$$

$$(4)\quad y^4 - 2y^2y_1^2 + y_1^4 = 0.$$

L'équation n'a pas de termes en y et, si nous identifions les deux équations, il faut que $b = 0$, puis

$$(\alpha)\quad y_1^2 = 2p(a - p),$$

l'ordonnée du point de contact est donc

$$(5)\quad y_1 = \pm\sqrt{2p(a - p)};$$

identifions les termes constants des deux équations

$$(\beta)\quad y_1^4 = 4p^2(a^2 - R^2) \quad \text{ou} \quad y_1^2 = 2p\sqrt{a^2 - R^2};$$

égalons (α) et (β), il vient

$$(a - p)^2 = a^2 - R^2,$$

$$(6)\quad R^2 = 2ap - p^2 \quad \text{ou} \quad R = \sqrt{p(2a - p)};$$

donc, pour que les cercles existent, il faut

$$(2a - p) > 0 \qquad \text{ou} \qquad a \geqq \frac{p}{2};$$

si $a = \frac{p}{2}$ le rayon est nul, l'égalité (6) définit une famille de cercles comprenant un cercle de rayon nul, qui est le foyer; le rayon croît constamment quand a croît, c'est-à-dire quand C s'éloigne de F dans le sens positif de l'axe. Calculons l'abscisse du point de contact, écrivons que ce point est sur la parabole, on a :

$$2px = 2p(a - p),$$
$$x = a - p;$$

c'est l'abscisse du point I d'intersection de MM' avec l'axe; or l'abscisse de C est $x = a$; faisons la différence $IC = p$, d'où le théorème suivant :

Théorème. — *L'abscisse du centre et l'abscisse du point de contact ont une différence constante et égale au paramètre de la parabole.*

On a vu précédemment que b était nul, et que

$$R^2 = 2ap - p^2;$$

l'équation du cercle bitangent est donc

$$(x - a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0;$$

il n'y a qu'un seul paramètre variable, a.

On peut former rapidement cette équation d'après l'égalité $f + P^2 = 0$ qui est l'équation des coniques bitangentes à la conique $f = 0$; P étant l'équation de la corde de contact, il vient

$$y^2 - 2px + (x - x_0)^2 = 0;$$

x_0 abscisse de M ou

$$y^2 - 2px + x^2 + a^2 + p^2 - 2ap - 2xa + 2px = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 + p^2 - 2ap = 0$$

ou enfin

$$(7) \qquad (x-a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0.$$

On tire le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les cercles bitangents à la parabole ont leur centre sur l'axe des x; la corde de contact est perpendiculaire à l'axe de la parabole; il n'existe qu'un seul cercle de centre donné, bitangent à la parabole.*

Calculons FC et FM.

On a

$$\mathrm{FC} = \mathrm{OC} - \mathrm{OF} = a - \frac{p}{2},$$

puis

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{FM}}^2 &= \overline{\mathrm{FI}}^2 + \overline{\mathrm{IM}}^2 \\ &= \left(a - p - \frac{p}{2}\right)^2 + 2p(a-p) \\ &= a^2 + \frac{9p^2}{4} - 3ap + 2ap - 2p^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{p^2}{4} - ap\right), \end{aligned}$$

$$\overline{\mathrm{FM}}^2 = \left(a - \frac{p}{2}\right)^2;$$

donc

$$\mathrm{FM} = \mathrm{FC}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème. — *La corde de contact est l'axe radical du cercle bitangent et du cercle ayant pour centre le point* F *et pour rayon* FC.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'axe radical de deux cercles bitangents est équidistant des cordes de contact.*

L'équation d'un cercle bitangent à la parabole est

$$(x-a)^2+y^2+p^2-2ap=0,$$

a désignant l'abscisse du centre; considérons un autre cercle bitangent, son équation est

$$(x-a')^2+y^2+p^2-2a'p=0;$$

l'équation de l'axe radical de ces cercles est

$$a^2-a'^2-2x(a-a')-2p(a-a')=0,$$

en divisant par $a-a'$ qui est essentiellement différent de o,

$$a+a'-2x-2p=0,$$
$$x=\frac{a+a'}{2}-p;$$

l'équation des cordes de contact est

$$x=a-p, \qquad x=a'-p;$$

l'équation de la parallèle équidistante est

$$x=\frac{a+a'}{2}-p;$$

les deux droites coïncident bien; le théorème est démontré.

On peut transformer le théorème comme il suit :

THÉORÈME. — *Étant donnés trois cercles bitangents à la parabole, les abscisses des centres étant* a, a' *et* a'' *(avec* $a>a'>a''$*), la condition nécessaire et suffisante pour que la corde de contact du second soit axe radical des deux autres est que* $a+a''=2a'$.

On a le théorème suivant :

Théorème. — *La puissance d'un point $x_0 y_0$ de la parabole par rapport à un cercle bitangent est égale au carré de la distance du point considéré à la corde de contact.*

En effet, soit

$$(x-a)^2+y^2+p^2-2ap=0$$

l'équation du cercle bitangent; la puissance du point $(x_0 y_0)$ est

$$(x_0-a)^2+y_0^2+p^2-2ap=d^2,$$

et la distance de ce point à la corde de contact est

$$l^2=(x_0-a+p)^2 \quad \text{ou} \quad l^2=(x_0-a)^2+p^2+2p(x_0-a);$$

or

$$2px_0=y_0^2, \qquad l^2=(x_0-a)^2+y_0^2+p^2-2ap;$$

donc $d^2=l^2$; le théorème est démontré.

Théorème. — *La somme des longueurs des tangentes issues d'un point de la parabole $(x_0 y_0)$ à deux cercles bitangents à la parabole est égale à la distance des cordes de contact.*

Nous n'avons qu'à appliquer deux fois le théorème précédent.

On démontrerait sans plus de difficulté les théorèmes suivants :

I. Théorème. — *Étant donnés deux cercles bitangents à une parabole, on mène la tangente commune intérieure rencontrant la parabole en* M *et* P : 1° *Le cercle décrit sur* MP *est tangent aux cordes de contact des cercles bitangents;* 2° *Son centre est équidistant des points de contact des cercles et de la tangente commune.*

II. Théorème. — 1° *La distance des centres des cercles bitangents est égale à* MP; 2° *Le premier cercle bitangent est orthogonal aux cercles de centres* M *et* P *et ayant pour rayons les distances de* M *et* P *à la corde de contact.*

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Sur les courbes définies par une relation entre les distances de chacune de leurs tangentes à des points fixes.* — La Note récente de M. Weill (*N. A.*, 1918, p. 373), relative au cas où la somme des carrés de ces distances est constante, m'incite à rappeler que, dans une des notes (p. 82) de l'appendice de ma brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (Gauthier-Villars; 1885), j'ai fait voir comment les coordonnées parallèles se prêtent à l'étude des courbes obtenues dans le cas d'une relation *quelconque* entre de telles distances, courbes devenant des coniques lorsque cette relation consiste dans la constance d'une fonction homogène et du second degré des distances considérées, et, aussi, comment se peut déterminer, dans le cas général, le point où la droite variable touche son enveloppe et le rayon de courbure correspondant.

J'ai d'ailleurs généralisé depuis lors (*N. A.*, 1890, p. 293, et 1894, p. 502) le théorème relatif à la détermination du point de contact avec l'enveloppe :

Si l'on appelle *distance sous l'angle* θ d'une droite D à une courbe (M) le segment d'une droite, perpendiculaire à D et coupant la courbe (M) en M sous l'angle θ, compris entre cette droite et cette courbe, et que l'on considère l'enveloppe de la droite variable D, lorsque ses distances l_1, l_2, ..., l_n, sous les angles *constants* θ_1, θ_2, ..., θ_n, à n courbes de référence données (M_1), (M_2), ..., (M_n), sont liées par la relation quelconque

$$F(l_1, l_2, ..., l_n) = 0,$$

le point où la droite D *touche son enveloppe est le pied de la perpendiculaire abaissée sur cette droite du barycentre des masses* $\frac{\partial F}{dl_1}, \frac{\partial F}{dl_2}, \ldots, \frac{\partial F}{dl_n}$, *respectivement affectées aux centres de courbure des courbes de référence répondant aux points* M_1, M_2, ..., M_n.

QUESTION.

2383. Soit l'équation générale de degré m

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0.$$

Désignons par α le plus grand des modules des quantités

$$p_1, \quad \sqrt{p_2}, \quad \sqrt[3]{p_3}; \quad (p_i)^{\frac{1}{i}}, \quad \ldots, \quad (p_m)^{\frac{1}{m}};$$

2α est une limite supérieure des modules des racines de l'équation; et l'équation

$$q x^n + x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

où n est un entier supérieur à m et q une quantité quelconque, a au moins une racine de module inférieur à 2α. Lorsque $m = 1$, la proposition a été énoncée par M. Hurwitz [*Sur quelques généralisations du Théorème de M. Picard*, par M. E. Landau (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1907)].

A. PELLET.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVIII, 4e SÉRIE, 1918.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

Géométrie.

Nécrologie.

Bibliographie.

Anciennes questions non résolues.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XVIII, 4e SÉRIE, 1918.)

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

58505 Quai des Grands-Augustins, 55.