R. GOORMAGHTIGH

Sur les centres de courbure des courbes affines d'une courbe donnée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 84-95
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__84_1>

[O'2e][P'1e]

SUR LES CENTRES DE COURBURE DES COURBES AFFINES D'UNE COURBE DONNÉE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires ou obliques, m un point variable d'une courbe (m), M le point qui divise l'ordonnée de m dans un rapport constant k; quand le point m décrit la courbe (m), le lieu du point M est une courbe (M) affine de (m). L'axe Ox est l'*axe* d'affinité, k le *rapport* d'affinité. On sait que la tangente en m à (m) et celle en M à (M) se coupent en un point Q de Ox.

Nous avons donné [1] une solution du problème qui consiste à construire le centre de courbure C de la courbe (M) au point M, connaissant le centre de courbure c de la courbe (m) en m; une autre méthode a été indiquée par M. Balitrand [2]. Nous nous propo-

(1) *Nouvelles Annales*, 1915, p. 423.

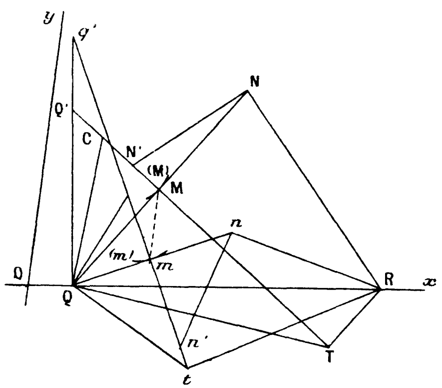
(2) *Construction du centre de courbure de l'hyperbolisme et de l'affine d'une courbe donnée* (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 74-78). Cette construction suppose des axes de coordonnées rectangulaires.

sons d'indiquer plusieurs autres solutions simples de ce problème et de signaler quelques propriétés de la courbe, lieu des centres de courbure aux points correspondants des courbes affines de (m) répondant aux diverses valeurs du rapport d'affinité k.

1. On a d'abord (*fig.* 1) la construction suivante (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 424) :

La perpendiculaire élevée en Q *sur* Ox *rencontre en* q' *la normale en* m *à* (m); *soient* n *le symétrique de* Q *par rapport à* m, n' *celui de* q' *par rapport à* c; *la perpendiculaire en* n *à* nn' *coupe* Ox *en* R.

Fig. 1.



Ce point R sert ensuite à construire les centres de courbure aux points correspondant à m dans toutes les courbes affines de (m). On obtient le centre de courbure C de (M) au point M de la manière suivante :

Soit N *le symétrique de* Q *par rapport à* M; *la normale en* M *à* (M) *rencontre en* N' *et* Q' *les perpendiculaires élevées sur* NR *en* N *et sur* Ox

en Q; le milieu de Q′N′ est le centre de courbure cherché.

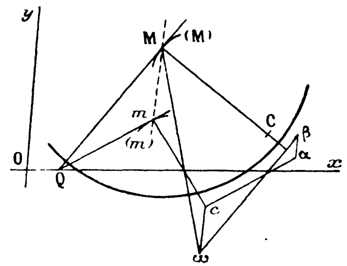
Considérons maintenant une hyperbole passant par m, ayant en ce point même centre de courbure que (m) et dont Ox est l'une des asymptotes. Si l'on applique à cette hyperbole la transformation par affinité par laquelle on déduit (M) de (m), on obtient une autre hyperbole. Celle-ci a même centre que la première, elle a Ox pour asymptote, passe par M et y a même centre de courbure que la courbe (M). Or, il est aisé de construire le centre commun à ces hyperboles, connaissant le centre de courbure de (m) en m. D'après un théorème de M. d'Ocagne ([1]), il suffit d'élever en Q sur Qc une perpendiculaire qui rencontre la normale mc en t, et de mener par t une parallèle à la tangente à (m) en m; cette parallèle coupe Ox au centre cherché. Il est intéressant d'observer que ce centre coïncide avec le point R considéré dans la solution rappelée ci-dessus. Du point R on déduira le centre de courbure cherché C par une construction inverse de celle par laquelle on a obtenu le point R connaissant c. On obtient ainsi cette construction :

La perpendiculaire élevée en Q sur cQ rencontre en t la normale en m à (m); la parallèle à la tangente en m à (m) menée par le point t coupe Ox en R. Soit T l'intersection de la normale à (M) en M avec la parallèle menée par le point R à la tangente en M à (M); la perpendiculaire élevée en Q sur QT passe par le centre de courbure cherché C.

([1]) *Nouvelles Annales*, 1902, p. 232. *Voir* aussi un article de M. Bouvaist (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 337-356) et la question 2257 de M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 432).

2. Soit encore (Γ) l'ellipse affine du cercle osculateur (γ) de la courbe (m) en m; cette conique a en M même centre de courbure que la courbe (M). Le centre ω de (Γ) est à l'intersection de la parallèle menée par c à Oy avec la droite qui joint M à l'intersection de mc avec Ox (*fig*. 2). Il est, en outre, facile de cons-

Fig. 2.



truire le demi-diamètre $\omega\beta$ conjugué à $M\omega$ dans l'ellipse (Γ); à cet effet, on élève en c une perpendiculaire $c\alpha$ égale à cm; le point β est à l'intersection des parallèles menées par α à mM et par ω à MQ. On sait, d'autre part, d'après un théorème de Chasles [1], que si, sur la normale en un point M d'une ellipse, on porte, de part et d'autre de ce point, deux segments égaux au demi-diamètre conjugué à celui qui aboutit à ce point, puis qu'on prenne sur cette normale la projection du centre ω de l'ellipse, le centre de courbure de (Γ) en M sera le conjugué harmonique de ce point par rapport aux extrémités de ces deux segments. De

---

[1] *Journal de Liouville*, t. X, p. 208.

Voir aussi A. Mannheim, *Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan* (*Journal de l'École Polytechnique*, 37e cahier, 1858).

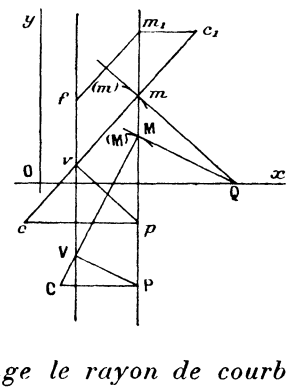
ce qui précède, on déduit donc la construction suivante :

Soit ω *le point de rencontre de la parallèle menée par* c *à* mM *avec la droite qui joint* M *à l'intersection de* cm *avec* Ox. *On élève en* c *sur* cm *une perpendiculaire* $c\alpha$ *égale à* cm; *les parallèles menées par* α *à* mM *et par* ω *à* MQ *se coupent en* β. *Le centre de courbure cherché* C *est le pôle de* $\omega\beta$ *par rapport au cercle ayant* M *pour centre et* $\omega\beta$ *pour rayon.*

Les trois constructions qui précèdent sont applicables si les axes sont rectangulaires ou obliques; dans ce qui suit, nous supposerons les axes Ox, Oy *rectangulaires.*

3. M. Balitrand a indiqué dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 78) la méthode suivante (*fig.* 3) :

Fig. 3.



On prolonge le rayon de courbure cm *de* (m) *d'une longueur* $mc_1 = \frac{1}{2} mc$ *et l'on mène par* c_1 *une parallèle à* Ox *qui coupe* mM *en* m_1. *Par le point* f, *symétrique de* m_1 *par rapport à la tangente en* m

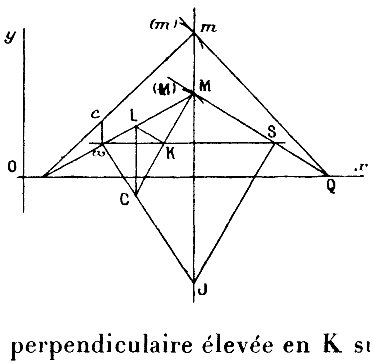
à (m), *on mène une perpendiculaire à* Ox. *Du point où elle rencontre la normale en* M *on tire la parallèle à la tangente en* M *et par* M *on tire une parallèle à* Oy. *Par le point d'intersection de ces deux parallèles, on mène la parallèle à* Ox; *elle passe au centre de courbure cherché.*

On en déduit cette autre construction :

Soient p *la projection de* c *sur* mM, v *celle de* p *sur* mc, V *l'intersection de la normale en* M *à* (M) *avec la parallèle menée par* V *à* mM; *la perpendiculaire élevée en* V *sur la normale à* (M) *en* M *coupe* mM *en* P, *la parallèle menée par* P *à* Ox *passe au centre de courbure cherché.*

4. Considérons maintenant l'ellipse (Γ) affine du cercle osculateur de (m) au point m. D'après la construction de Mannheim, si K est l'intersection du grand axe de (Γ) avec la normale en M à (M) et si L est le

Fig. 4.



point où la perpendiculaire élevée en K sur MK rencontre Mω, le centre de courbure de (Γ) en M appartient à la parallèle menée par L à Oy. On obtient ainsi la construction suivante (*fig.* 4) :

La droite qui joint M *au point d'intersection de mc avec* Ox *coupe en* ω *la parallèle menée par c à* Oy; *la parallèle à* Ox *menée par* ω *rencontre en* K *la normale en* M *à* (M); *la parallèle à* Oy *menée par le point d'intersection de* Mω *avec la perpendiculaire élevée en* K *sur* MK *contient le centre de courbure cherché.*

On peut encore construire d'une autre manière le centre de courbure de l'ellipse (Γ) au point M. Soit S le point d'intersection de la tangente MQ avec le grand axe Kω; si la perpendiculaire élevée en S sur MS rencontre mM en J, la droite Jω renferme le centre de courbure C de (Γ) au point M. On en déduit la méthode suivante pour construire le centre de courbure C de (M) en M connaissant le centre de courbure c de (m) en m :

La droite qui joint M *au point d'intersection de mc avec* Ox *coupe en* ω *la parallèle menée par c à* Oy, *la parallèle à* Ox *menée par* ω *rencontre en* S *la tangente à* (M) *en* M; *le centre de courbure* C *appartient à la droite qui joint* ω *à l'intersection de* mM *avec la perpendiculaire élevée en* S *sur* MS.

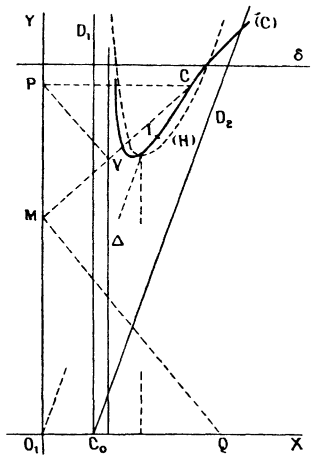
5. *Lieu des centres de courbure aux points correspondants des courbes affines d'une courbe donnée.* — Prenons maintenant comme axes de coordonnées O_1X, O_1Y l'axe d'affinité et la droite mM, la partie positive de l'axe des X étant celle qui renferme le point Q. D'après la deuxième construction indiquée au paragraphe 3, le lieu considéré peut être défini comme suit (*fig.* 5) [1] :

---

[1] La courbe (C) admet O_1X pour axe de symétrie; dans la

Étant donnés deux axes rectangulaires O_1X et O_1Y et une droite Δ parallèle à O_1Y, on mène par un point fixe Q de O_1X une droite variable qui rencontre O_1Y

Fig. 5.



en M; la perpendiculaire à QM en M coupe Δ en V, celle en V à MV rencontre O_1Y en P, lieu (C) du point d'intersection C de MV avec la parallèle menée par P à O_1X.

Si $X = d$ est l'équation de Δ, et si a désigne l'abscisse du point Q, on trouve facilement que le lieu considéré est la cubique

$$(1) \qquad Y\sqrt{d(X-d)} + (a+d)X - ad = 0.$$

Posons

$$\frac{ad}{a+d} = b.$$

---

figure 5, la branche située du côté des Y positifs est seule représentée.

La cubique (C) coupe l'axe O_1X au point $C_0(b, 0)$; en prenant pour nouvel axe des ordonnées la parallèle menée par ce dernier point à Δ, l'équation de la cubique devient

$$(2) \qquad b(b-a)\xi\eta^2 + a^3\xi^2 + b^3\eta^2 = 0,$$

ou encore

$$(3) \qquad \eta = a\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\xi}{\sqrt{(a-b)\xi - b^2}}.$$

D'après l'équation (1), *la cubique* (C) *a la droite* Δ *pour asymptote*. L'équation (3) montre que *le point* C_0 *est un point isolé ou un point double de* (C) *suivant que les points* C_0 *et* Q *sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de la droite* Δ.

Les constructions données aux paragraphes précédents donnent encore d'autres définitions simples de la cubique (C); on a, par exemple, les deux suivantes :

Étant donnés deux points R et Q et une droite O_1Y perpendiculaire à RQ, on mène par Q une droite variable coupant O_1Y en M et l'on projette R en T sur la perpendiculaire élevée en M sur QM, lieu du point d'intersection de MT avec la perpendiculaire élevée en Q sur QT.

Étant donnés deux points C_0 et Q et une droite O_1Y perpendiculaire à C_0Q, on considère un angle droit variable de sommet Q dont les côtés coupent O_1Y en M et J, lieu de l'intersection de C_0J avec la perpendiculaire élevée en M sur QM.

6. Distinguons maintenant les deux cas où C_0 et Q sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de la droite O_1Y.

Dans ce dernier cas, b est négatif; posons donc $b = - b'$ et l'équation (2) s'écrit

$$b'(b' + a)\xi\eta^2 + a^3\xi^2 - b'^3\eta^2 = 0.$$

Considérons d'abord le premier cas; soit δ la droite d'équation

$$\eta = a\sqrt{\frac{a}{b}},$$

et prenons l'*hyperbolisme* [1] de (C), le pôle étant le point C_0, l'axe la droite δ. On obtient l'équation

$$(4) \qquad (b - a)\xi\eta + a(\xi^2 + \beta^2)\sqrt{\frac{a}{b}} = 0.$$

Elle représente une hyperbole ayant C_0 pour centre et dont l'une des asymptotes D_1 est perpendiculaire à l'axe d'affinité.

Si l'on considère de même dans le second cas (*fig.* 6) la droite δ' d'équation

$$\eta = a\sqrt{\frac{a}{b'}},$$

et si l'on prend encore l'hyperbolisme de (C), le pôle étant le point C_0, l'axe la droite δ', on trouve

$$(5) \qquad (b' + a)\xi\eta + a(\xi^2 - b'^2)\sqrt{\frac{a}{b'}} = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole ayant C_0 pour centre et dont l'une des asymptotes D_1 est perpendiculaire à δ'. On a donc cette nouvelle définition de la cubique (C) :

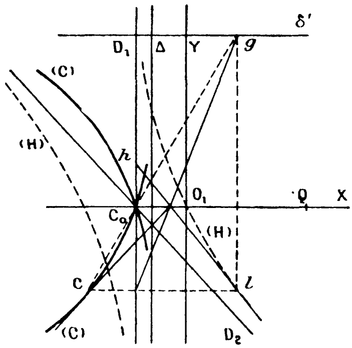
La cubique, lieu des centres de courbure aux

---

[1] Voir le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. Gomès Teixeira, t. I, p. 95, 99, 151; voir aussi *Nouvelles Annales*, 1915, p. 403, 520; 1916, p. 74 et 83.

points correspondants d'une famille de courbes affines est l'anti-hyperbolisme d'une hyperbole (H), *le pôle étant le centre de* (H) *et l'axe une perpendiculaire à l'une des asymptotes.*

Fig. 6.



Dans le premier cas considéré, la seconde asymptote D_2 de (H) est la droite qui joint C_0 à la projection de Q sur δ ou la symétrique de cette droite par rapport à O_1X, suivant que le point C_0 se trouve entre O_1 et Q ou au delà du point Q.

Dans le second cas considéré, la seconde asymptote est la symétrique, par rapport à O_1X, de la droite qui joint C_0 à la projection de Q sur δ'.

La *construction de la tangente* en un point C de la cubique (C) résulte immédiatement de ce qui précède :

La parallèle à Δ *menée par le point* g *où* C_0C *rencontre* δ *(ou* δ'*), coupe en* l *celle menée par* C *à* C_0Q. *Soit* h *le symétrique de* C_0 *par rapport au point où la parallèle menée par* l *à* D_2 *rencontre* D_1 ; *la tangente en* C *à* (C) *passe par l'intersection* *de hl avec la droite qui joint g à la projection de* C *sur* D_1.

Dans chacun des deux cas considérés, la détermination directe de (H) est d'ailleurs aisée.

D'après l'équation (4), dans le premier cas, l'un des points de (H) où la tangente est parallèle à δ a pour coordonnées

$$\xi = b, \qquad \eta = \frac{2ab}{a-b}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ce point est donc à l'intersection de la parallèle menée par O_1 à D_2 avec celle menée à Δ par le symétrique de O_1 par rapport à C_0.

Au moyen de l'équation (3), on trouve aisément que la cubique (C) a dans ce cas deux points d'inflexion I situés sur la droite

$$\xi = \frac{4b^2}{a-b};$$

la distance de C_0 à cette droite vaut quatre fois celle de C_0 à Δ.

Dans le second cas, l'hyperbole (H) est immédiatement déterminée puisqu'on connaît ses asymptotes et l'un de ses points; on voit, en effet, d'après l'équation (5), qu'elle passe par le point d'intersection O_1 de mM avec l'axe d'affinité.