Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 466-472

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__466_0>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

1915 (**1901**, 335). — Étudier les polynomes à deux variables

$$P_{2m,2n} = \frac{\partial^{m+n}[x^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y^n}.$$

On pourra en particulier étudier la position de la courbe

$$P_{2m,2n} = 0$$

par rapport au cercle

$$x^2+y^2-1=0.$$

Par exemple le polynome $P_{2,0}$ est

$$\frac{\partial[x(1-x^2-y^2)]}{\partial x} = 1 - 3x^3 - y^2$$

et la courbe $P_{2,0} = 0$ est tout entière dans le cercle. Ce fait est général. APPELL.

1937 (**1902**, 479). — Étant donné un parallélogramme articulé ABCD, on fixe sur les côtés AB, BC, CD, en des points m, n, p, des tiges Mm, Nn, Pp, perpendiculaires respectivement à ces côtés, et déterminées par les relations

$$\frac{pP}{Cp} = \frac{Cn}{Nn} : \frac{Mm}{Bm} = \frac{Bn}{Nn}.$$

On a d'ailleurs

$$Bm = Cp.$$

Démontrer que le triangle MNP reste semblable à lui-même dans toutes les déformations du parallélogramme, qui peut ainsi servir de pantographe. J. RÉVEILLE.

1944 (**1902**, 480). — La recherche d'une courbe telle que le lieu du centre d'une conque qui a avec cette courbe un contact du quatrième ordre soit une parabole donnée se ramène à la résolution de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2.$$

X. STOUFF.

1956 (**1903**, 47). — On donne dans l'espace quatre droites concourantes Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, et quatre génératrices D_1, D_2, D_3, D_4 d'un même système d'une quadrique Q. Trouver le lieu d'un point M tel que les quatre plans MD_1, MD_2, MD_3, MD_4 rencontrent Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 respectivement en quatre points situés dans un même plan P, et l'enveloppe de ce plan.

R. GILBERT.

1957 (**1903**, 47). — Une parabole est bitangente à une conique donnée S en un point fixe et en un autre point. Le lieu du foyer est une podaire de parabole.

Cas particuliers : La conique donnée S est une hyperbole équilatère; 2° la conique S se décompose en un couple de points.

R. GILBERT.

1988 (**1904**, 48). — On donne une quadrique et trois droites α, β, γ. Si D est un point de la quadrique, le trièdre de sommet D dont les plans des faces passent par α, β, γ appartient à un tétraèdre DABC inscrit à la quadrique. De quelle classe est l'enveloppe du plan ABC?

Application au problème :

Inscrire à une quadrique un tétraèdre dont les plans des faces passent par quatre droites données.

G. FONTENÉ.

2003 (**1904**, 528). — On sait que les permutations différentes de m lettres dans lesquelles il y en a p égales à a, q à b, r à c, ..., t à l, sont au nombre de

$$\frac{m!}{p!\,q!\,r!\ldots t!}.$$

S'il s'agit de combinaisons n à n de m lettres distinctes, leur nombre est donné par la formule

$$\frac{m(m-1)\ldots(m+n+1)}{n!}.$$

Que devient ce nombre lorsqu'on a aussi p lettres égales à a, q à b, ..., t à l?
AUDIBERT.

2010 (**1905**, 96). — Si les trièdres abc, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ ont un centre O d'homologie, les neuf points de rencontre des droites du Tableau

$$(\text{Centre O})\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

avec leurs *associées mineures* sont en ligne droite. [L'associée de a est la droite (b_1c_2, b_2c_1)].
P. SONDAT.

2038 (**1906**. 143). — On mène les hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC. Soit $D_1E_1F_1$ l'axe d'homologie des triangles ABC et DEF. Par E_1, F_1, D_1 on mène les parallèles à AB, BC, CD qui coupent BC, CA, AB aux points I, H, K en ligne droite, et les parallèles à BC, CA, AB qui coupent AB, BC, CA aux points K_1. I_1, H_1, aussi en ligne droite. Soient Q et Q_1 les coniques circonscrites à ABC et tangentes, la première à AI, BH, CK, et la seconde à AI_1, BH_1, CK_1.

I. Si par un point O de Q on mène les perpendiculaires à BC, CA, AB, elles coupent CA, AB, BC en μ, ν, λ et l'on a la droite $\Delta(\lambda\mu\nu)$. Ces mêmes perpendiculaires menées par un point O_1 de Q_1 coupent AB, BC, CA aux points ν_1, λ_1, μ_1 et l'on a la droite $\Delta(\lambda_1\mu_1\nu_1)$

II. Les coniques Q, Q_1 et le cercle ABC ont un quatrième point commun ω auquel correspondent deux droites Δ, Δ_1 et la droite Δ_2 de Simson.

III. Si ABC est un triangle équilatéral, les coniques Q, Q_1 se superposent au cercle ABC, et à tout point O de ce cercle correspondent trois droites Δ, Δ_1, Δ_2.
P. SONDAT.

2039 (**1906**, 144). — Démontrer la relation

$$(1)\quad \sum \frac{f'''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 f''(\alpha)} + \sum \frac{f''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)} + \sum \frac{1}{f(\gamma) f'(\gamma)} = 0,$$

la première somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation algébrique

$$f(x) = 0;$$

la deuxième somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et la troisième somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f''(x) = 0.$$

Étendre la relation (1), en faisant intervenir les dérivées quatrième, cinquième, etc., du polynome $f(x)$.

NICOLAS KRYLOFF.

2045 (**1906**, 432). — Soient (A, A'), (B, B'), (C, C') trois couples de semi-droites d'un même plan, les semi-droites d'un même couple étant parallèles et de même sens. Les cycles inscrits dans les quatre triangles (A, B, C), (A, B', C'), (A', B, C'), (A', B', C) sont tangents à un même cercle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles (A', B, C), (A, B', C), (A, B, C'), (A', B', C').

Le théorème est encore vrai si les semi-droites d'un même couple sont parallèles et de sens contraire. On obtient comme cas particulier de cette dernière proposition le théorème de Feuerbach et le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle,* A', B', C' *les milieux de ses côtés. Les cercles inscrits dans les quatre triangles* A'B'C', AB'C', A'BC', A'B'C *sont tangents à un même cercle.*

La première proposition donne des théorèmes où interviennent des cercles exinscrits.

R. BRICARD.

2057 (**1906**, 575). — Si, dans le triangle arithmétique, on multiplie les nombres figurés successifs d'ordre p à partir du premier, par les coefficients successifs du développement de $(x+a)^n$ à partir de C_n^q, et si l'on ajoute les $n-q+1$ produits affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$, la somme obtenue est nulle pour $q \leqq p$; et pour $q = p+1$,

$p+2, \ldots, n$, ce qui suppose $n > p$, on obtient les coefficients du développement de $(x+a)^{n-p-1}$.

G. FONTENÉ.

2064 (**1907**, 95) ([1]). — Un point C se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre point, situé originairement au centre O du cercle, se meut avec la même vitesse que le point C sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point.

Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque M de cette courbe est égal au segment intercepté par le rayon OC sur la normale en M.

2065 (**1907**, 95). — On considère le rayon de courbure ρ de la courbe dont il s'agit dans la question précédente comme fonction de la distance p de l'origine à la tangente à cette courbe. Former l'équation différentielle qui relie ρ à p.

Dr W. KAPTEYN.

2096 (**1908**, 336). — On considère une épi-(hypo) cycloïde ayant R pour rayon du cercle fixe O (*de base*) et R' pour rayon du cercle mobile C, et telle que $R' = \dfrac{R}{m}$, m étant un nombre entier. L'aire de la podaire de la courbe par rapport à un point quelconque de la circonférence d'un cercle concentrique au cercle O et de rayon ρ est constante et a pour expression

$$U = \frac{\pi(R \pm 2R')}{4R'}[(R \pm 2R')^2 + \rho^2],$$

le signe + s'appliquant à une épicycloïde et le signe — à une hypocycloïde.

E.-N. BARISIEN.

2114 (**1908**, 576). — Dans un tétraèdre orthocentrique SABC, on désigne par a, b, c, a', b', c' les cosinus des dièdres suivants BC, CA, AB, SA, SB, SC; on connaît la relation

$$aa' = bb' = cc' = M;$$

([1]) Énoncé reproduit pour rendre compréhensible la question 2065, non résolue. Pour la solution de la question 2064, *voir* **1907**, p. 173 et 474.

démontrer la formule

$$\frac{1}{M^2 + a'b'c'} = \frac{1}{a'(a' + b'c')} + \frac{1}{b'(b' + c'a')} + \frac{1}{c'(c' + a'b')}.$$

Si l'on donne a, b, c, on a une équation du troisième degré en M, ayant ses racines réelles; le problème est possible sous la condition $abc > 0$, et il a alors trois solutions (on peut avoir $b = 0$, $c = 0$; il y a alors indétermination).

G. FONTENÉ.

2116 (**1909**, 56). — Soient A_1, A_2, ... des points fixes dans l'espace, et $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, ... un système de demi-droites qu'on déplace de toutes les manières possibles autour du point O sans le déformer. Aux points A_1, A_2, ..., on applique des vecteurs V_1, V_2, ... *de grandeurs déterminées*, parallèlement aux demi-droites $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, ... Déterminer l'ordre du complexe formé par les axes centraux des systèmes de vecteurs ainsi obtenus (1).

Si l'on impose la condition que les vecteurs aient une résultante, le complexe est remplacé par la congruence des droites qui portent les résultantes; déterminer l'ordre et la classe de cette congruence.

Même question, si l'on impose la condition que le système des vecteurs ait un moment donné par rapport à un axe parallèle à la résultante générale. G. FONTENÉ.

2141 (**1909**, 527). — Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{(axy + bz) + (fx + gy)}{(bpq + aw) + (gp + fq)} = \frac{1}{m} \qquad (px + qy = z + w);$$

la transformation de Legendre donne une équation du même type; les analogues des coefficients a, b, f, g, m étaient b, a, g, f, $\frac{1}{m}$.

(1) M. d'Ocagne a montré que *dans le plan*, la résultante des vecteurs V passe par un point fixe. Il en est de même dans l'espace pour des vecteurs parallèles.

Les équations des *caractéristiques* sont

$$\frac{z}{m} = (x - \alpha)(y - \beta) - \frac{a\alpha\beta + f\alpha + g\beta}{mb - a},$$

$$\frac{x - \alpha + \dfrac{a\alpha + g}{mb + a}}{\gamma} = \frac{y - \beta + \dfrac{a\beta - f}{mb + a}}{\delta} \quad (= t);$$

ce sont des paraboles ayant leurs axes parallèles à Oz.

Les *développables caractéristiques* ont de même pour équations tangentielles, en mettant m pour $\frac{1}{m}$,

$$\frac{w}{m'} = (p - \alpha')(q - \beta') - \frac{b\alpha'\beta' + g\alpha' + f\beta'}{m'a + b},$$

$$\frac{p - \alpha' + \dfrac{b\alpha' + f}{m'a - b}}{\gamma'} = \frac{q - \beta' + \dfrac{b\alpha' + g}{m'a + b}}{\delta} \quad (= t');$$

ce sont des cylindres paraboliques.

En supposant a et b non nuls, chaque caractéristique $\left(\alpha, \beta, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ correspond à une développable $\left(\alpha', \beta', \frac{\gamma'}{\delta'}\right)$; chaque élément ponctuel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, t')$ correspond à un élément tangentiel $(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t')$ d'après les relations

$$\frac{\gamma'}{\delta} = \frac{\delta'}{\gamma}, \qquad \frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\beta'}{\alpha} = -m, \qquad \frac{t'}{mt} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta'}.$$

Si a est nul, l'équation aux dérivées partielles donnée par la transformation de Legendre est linéaire; les cylindres paraboliques dépendent seulement de deux paramètres, leurs équations tangentielles étant

$$\frac{p - \dfrac{f}{b}}{\gamma'} = \frac{q - \dfrac{g}{b}}{\delta'} = \frac{pq - mw}{\lambda'} \quad (= t'),$$

et la correspondance entre les paraboles et les cylindres se traduit par les *deux* relations

$$\frac{\gamma'}{\delta} = \frac{\delta}{\gamma}, \qquad m(\alpha\gamma - \beta\delta') + \lambda' = 0.$$

G. Fontené.