

E. CAHEN

**Remarques sur un article de M.
Mathieu Weill**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 463-465

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__463_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[I19a]

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE M. MATHIEU WEILL;

PAR M. E. CAHEN.

Dans cet article, *Sur quelques équations quadratiques* (1916, p. 351), les formules obtenues ne donnent pas toutes les solutions. Prenons, par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 = 5z^2.$$

M. Weill trouve

$$x = u^2 - v^2 + 4uv,$$

$$y = 2uv - 2(u^2 - v^2),$$

$$z = u^2 + v^2.$$

Or il y a d'autres solutions. Voici comment on peut les obtenir toutes.

Écrivons l'équation sous la forme

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 5.$$

En posant

$$(1) \quad \frac{\frac{y}{z} - 2}{\frac{x}{z} - 1} = \lambda,$$

on trouve

$$\frac{x}{z} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda - 1}{\lambda^2 - 1}, \quad \frac{y}{z} = \frac{-2\lambda^2 - 2\lambda + 2}{\lambda^2 + 1};$$

(1) montre que si x, y, z sont entiers, λ est rationnel.

On peut donc poser

$$\lambda = -\frac{u}{v},$$

u et v étant des entiers premiers entre eux, et l'on a alors

$$\frac{x}{u^2 + 4uv - v^2} = \frac{y}{-2u^2 + 2uv + 2v^2} = \frac{z}{u^2 + v^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= w \frac{u^2 + 4uv - v^2}{D}, \\ y &= w \frac{-2u^2 + 2uv + 2v^2}{D}, \\ z &= w \frac{u^2 + v^2}{D}, \end{aligned}$$

où D désigne le plus grand commun diviseur de

$$u^2 + 4uv - v^2, \quad -2u^2 + 2uv + 2v^2, \quad u^2 + v^2$$

et w un entier quelconque qui sera le plus grand commun diviseur de x, y, z . Si l'on se borne aux solutions *primitives*, c'est-à-dire dans lesquelles x, y, z sont premiers dans leur ensemble, il faut faire $w = \pm 1$.

Reste à voir ce qu'on peut dire de D . M. Weill suppose en somme que D est toujours égal à 1. Mais cela n'est pas et c'est pour cela qu'il ne trouve pas toutes les solutions.

D doit diviser les deux expressions

$$\begin{aligned} u^2 + 4uv - v^2 - 2(-2u^2 + 2uv + 2v^2) + 5(u^2 + v^2), \\ - (u^2 + 4uv - v^2) + 2(-2u^2 + 2uv + 2v^2) + 5(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Or ces deux expressions se réduisent à $10u^2$ et $10v^2$. Mais u et v sont premiers entre eux. Donc D doit diviser 10, donc $D = 1, 2, 5$ ou 10.

Reste à savoir dans quel cas $D = 10$, dans quel cas $D = 2$, etc.

Une discussion facile montrera que

$D = 1$ si u et v sont de parités différentes et $u \not\equiv -2v \pmod{5}$,

$D = 2$ si u et v sont impairs et $u \not\equiv -2v \pmod{5}$,

$D = 5$ si u et v sont de parités différentes et $u \equiv -2v \pmod{5}$,

$D = 10$ si u et v sont impairs et $u \equiv -2v \pmod{5}$.

En faisant $u = -2$, $v = 1$, $w = -1$, par exemple, c'est le troisième cas, et l'on trouve

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1,$$

solution qui n'est pas donnée par les formules de M. Weill.

La méthode peut se généraliser et s'applique à toute équation homogène algébrique unicursale

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 0\right) = 0$$

lorsque $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ s'expriment par des fonctions rationnelles à coefficients rationnels d'un paramètre, lequel s'exprime lui-même par une fonction rationnelle à coefficients rationnels de x, y, z . On peut même supposer qu'il y a plus de trois variables ou plus d'une équation.

M. Weill dit qu'il n'existe aucune méthode pour trouver une solution de l'équation $ax^2 + by^2 = z^2$. Or cette question se trouve déjà résolue dans Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1767). Voir aussi, pour l'équation plus générale $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, GAUSS (*Disquisitiones*, n° 294), où se trouve traité un exemple numérique.