

G. FONTENÉ

Identities to be proved

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 456-462

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__456_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A1b]

IDENTITÉS A DÉMONTRER;

PAR M. G. FONTENÉ.

I. — Cas général.

1. IDENTITÉ COMBINATOIRE. — On a l'identité

$$(1) \quad C_m^0 \cdot C_p^\alpha C_q^\beta \dots - C_m^1 \cdot C_{p-1}^\alpha C_{q-1}^\beta \dots + \dots \\ + (-1)^h C_m^h \cdot C_{p-h}^\alpha C_{q-h}^\beta \dots + \dots \equiv 0,$$

avec

$$(2) \quad \begin{cases} p = m, & q = m, & \dots, \\ \alpha + \beta + \dots \leq m - 1, \end{cases}$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions

$$h \leq p - \alpha, \quad q - \beta, \quad \dots, \\ h \leq m;$$

nous reviendrons sur le cas où l'on doit aller jusqu'à $h = m$; ce cas écarté, si α est le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \dots$, on aura $h \leq p - \alpha$.

2. TRANSFORMATION DE CETTE IDENTITÉ. — Si l'on remplace $C_p^\alpha, C_{p-1}^\alpha, \dots$ par $C_p^{p-\alpha}, C_{p-1}^{p-\alpha-1}, \dots$, et si l'on opère de même pour $C_q^\beta, \dots$, en posant

$$p - \alpha = a, \quad q - \beta = b, \quad \dots,$$

on obtient

$$(3) \quad C_m^0 \cdot C_p^a C_q^b \dots - C_m^1 \cdot C_{p-1}^{a-1} C_{q-1}^{b-1} \dots + \dots \\ + (-1)^h C_m^h \cdot C_{p-h}^{a-h} C_{q-h}^{b-h} \dots + \dots \equiv 0,$$

avec

$$(4) \quad \begin{cases} p = m, & q \leq m, & \dots, \\ \alpha + \beta + \dots = m - 1, \end{cases}$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions

$$\begin{aligned} h &\leq a, b, \dots, \\ h &\leq m; \end{aligned}$$

nous reviendrons sur le cas où l'on doit aller jusqu'à $h = m$; ce cas écarté, on aura par exemple $h \leq a$.

3. IDENTITÉ ALGÈBRE. — Reprenons l'identité (1). En examinant le cas où l'on a

$$m - p = \alpha, q = \beta, \dots$$

de sorte que les inégalités en h se réduisent à $h \leq m$, on est mis sur la voie d'une identité algébrique, pour laquelle nous remplaçons p par x , q par y , ..., les quantités $x, y, \dots$ étant des variables qui peuvent prendre des valeurs quelconques.

Si l'on pose, x étant quelconque et α étant un entier positif ou nul,

$$\boxed{P' = x(x-1) \dots (x-\alpha+1)}.$$

le nombre des facteurs étant α , on a l'identité

$$(5) \quad \begin{aligned} C_n^x P_x^\alpha P_1^\beta \dots &= C_m^x P_{x-1}^\alpha P_1^\beta \dots + \dots \\ &+ (-1)^m C_m^m P_{x-m}^\alpha P_1^\beta \dots = 0, \end{aligned}$$

avec

$$(6) \quad \alpha + \beta + \dots \geq m - 1;$$

on a par convention

$$P_x^0 = 1.$$

4. SOLUTIONS REMARQUABLES D'UNE CERTAINE ÉQUATION. — Reprenons l'identité (3), avec $m \leq a, b, \dots$, d'où $h \leq m$. Le dernier terme du premier membre est

$$(-1)^m C_m^m \cdot C_{p-m}^{a-m} C_{q-m}^{b-m} \dots;$$

on peut alors supprimer au premier membre le facteur que l'on vient d'écrire, ce qui écarte les valeurs $p = m, m+1, \dots, a-1, q = m, m+1, \dots, b-1, \dots$, et il reste

$$\begin{aligned} p &\geq a, & q &\geq b, & \dots \\ \alpha + \beta + \dots &\leq m-1. \end{aligned}$$

On est mis ainsi sur la voie du résultat suivant, pour lequel je remplace p par $x, \dots, a$ par $u, \dots$

L'équation

$$(7) \quad C_m \frac{P_u^m}{P_u^m} \frac{P_v^m}{P_v^m} \dots - C_m \frac{P_{u-1}^{m-1}}{P_{u-1}^{m-1}} \frac{P_{v-1}^{m-1}}{P_{v-1}^{m-1}} \dots + (-1)^m C_m^m = 0,$$

ou encore l'équation

$$\begin{aligned} (8) \quad C_m^0 P_x^m P_y^m \dots - C_m^1 (P_u^1 P_{x-1}^{m-1}) (P_v^1 P_{y-1}^{m-1}) \dots \\ - C_m^2 (P_u^2 P_{x-2}^{m-2}) (P_v^2 P_{y-2}^{m-2}) \dots + \dots \\ + (-1)^m C_m^m P_u^m P_v^m \dots = 0, \end{aligned}$$

admet les solutions

$$(9) \quad x - u = \alpha, \quad y - v = \beta, \quad \dots,$$

$\alpha, \beta, \dots$ étant des entiers positifs ou nuls qui vérifient la condition

$$(10) \quad \alpha + \beta + \dots \leq m-1;$$

les couples d'inconnues $(x, u), (y, v), \dots$ étant en nombre n , ces solutions sont en nombre

$$\frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

5. AUTRE FORME DE L'ÉQUATION. — Pour obtenir une équation symétrique par rapport aux deux systèmes d'inconnues $x, y, \dots$ et $u, v, \dots$, considérons le terme général

$$(-1)^h C_m^h (P_u^h P_{v-h}^h) \dots$$

et faisons un changement de variables portant sur $u, v, \dots$ ou sur $x, y, \dots$; nous adopterons de préférence cette seconde façon de faire. A cause de

$$P_x^x = (-1)^x P_{-x+1}^x,$$

on a

$$P_{x-h}^{m-h} = (-1)^{m-h} P_{x-m+1}^h = (-1)^{m-h} P_x^h,$$

en posant

$$\begin{aligned} x - m + 1 &= -X, \\ h + k &= m; \end{aligned}$$

le terme général ci-dessus devient

$$(-1)^m C_m^h (P_u^h P_X^k) \dots;$$

l'équation (8) se transforme en celle-ci (avec $x, y, \dots$ au lieu de $X, Y, \dots$)

$$(11) \quad C_m^0 P_x^m P_y^m \dots + C_m^1 (P_u^1 P_x^{m-1}) \dots + \dots \\ + C_m^h (P_u^h P_x^k) \dots + \dots + C_m^m P_u^m P_v^m \dots = 0,$$

et cette équation admet les solutions

$$(12) \quad x + u = (m-1) - \alpha, \quad y + v = (m-1) - \beta, \quad \dots,$$

$\alpha, \beta, \dots$ étant des entiers positifs ou nuls qui vérifient les conditions

$$(13) \quad \alpha + \beta + \dots \leq m-1.$$

II. — Cas particulier.

6. IDENTITÉ COMBINATOIRE. — Si, pour l'identité (1),

on considère un seul nombre p , on a

$$[1] \quad C_m^0 C_p^\alpha - C_m^1 C_{p-1}^\alpha + \dots + (-1)^h C_m^h C_{p-h}^\alpha + \dots = 0,$$

avec

$$[2] \quad p \geq m, \quad \alpha \leq m-1,$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions $h \leq p - \alpha$, $h \leq m$. Nous supposons ici $p - \alpha \leq m$, d'où $h \leq p - \alpha$; le dernier terme est alors

$$(-1)^{p-\alpha} C_m^{p-\alpha} C_p^0.$$

7. TRANSFORMATION DE CETTE IDENTITÉ. — En posant $p - \alpha = a$, on a

$$[3] \quad C_m^0 C_p^a - C_m^1 C_{p-1}^a + \dots + (-1)^h C_m^h C_{p-h}^a + \dots = 0$$

avec

$$[4] \quad m \leq p, \quad m - a \leq 1,$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions $h \leq a$, $h \leq m$. Nous supposons ici $a \leq m$, d'où $h \leq a$; le dernier terme est alors $(-1)^a C_m^a C_p^0$. On peut dire, avec a entier :

L'équation

$$[3'] \quad C_m^0 \frac{x(x-1)\dots(x-a+1)}{a(a-1)\dots 1} - C_m^1 \frac{(x-1)\dots(x-a+1)}{(a-1)\dots 1} + \dots + (-1)^{a-1} C_m^{a-1} \frac{x-a+1}{1} + (-1)^a C_m^a = 0,$$

qui est du degré a , admet comme racines les a nombres entiers

$$[4'] \quad x = m, m+1, \dots, m+(a-1).$$

8. IDENTITÉ ALGÈBRE. — L'identité [1], quand on suppose $m \leq p - \alpha$, d'où $h \leq m$, conduit à l'identité algébrique suivante :

$$[5] \quad C_m^0 P_i^\alpha - C_m^1 P_{x-1}^\alpha + \dots + (-1)^m C_m^m P_{x-m}^\alpha = 0$$

avec

$$[6] \quad \alpha = m - 1.$$

9. RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION REMARQUABLE. — L'identité [3], avec $m \leq \alpha$, d'où $h < m$, conduit à ce résultat :

L'équation

$$[7] \quad C_m^0 \frac{P_i^m}{P_u^m} - C_m^1 \frac{P_{x-1}^m}{P_{x-1}^m} + \dots + (-1)^m C_m^m = 0,$$

ou encore l'équation

$$[8] \quad C_m^0 P_x^m - C_m^1 (P_u^1 P_{x-1}^{m-1}) \\ + C_m^2 (P_u^2 P_{x-2}^{m-2}) + \dots + (-1)^m C_m^m P_u^m = 0,$$

qui est du degré m en x , du degré m en u , est résolue par les formules

$$[9] \quad x - u = 0, 1, \dots, \alpha, \dots, m - 1;$$

le premier membre de cette équation est identique au produit

$$[10] \quad (x - u)(x - u - 1) \dots [x - u - (m - 1)];$$

cette identité a été rencontrée par M. Ono dans la démonstration d'une identité que j'avais obtenue indirectement (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 578).

10. AUTRE FORME DE L'ÉQUATION. — Si l'on remplace $x - m + 1$ par $-X$, on a ceci :

L'équation

$$[11] \quad C_m^0 P_x^m + C_1^m (P_u^1 P_x^{m-1}) + \dots + C_m^m P_u^m = 0,$$

qui est du degré m en x , du degré m en u , est résolue par les formules

$$[12] \quad x - u = (m-1), m-2, \dots, 0;$$

le premier membre de cette équation est identique au produit

$$[13] \quad (x+u)(x+u-1)\dots[x+u-(m-1)].$$

Si l'on fait par exemple $m=4$, les équations [8] et [11] donnent lieu aux identités

$$\begin{aligned} & (x(x-1)(x-2)(x-3) \\ & \quad + 4u(x-1)(x-2)(x-3) + 6u(u-1)(x-2)(x-3) \\ & \quad + 4u(u-1)(u-2)(x-3) + u(u-1)(u-2)(u-3) \\ & \quad \equiv (x+u)(x+u-1)(x+u-2)(x+u-3) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & x(x-1)(x-2)(x-3) \\ & \quad + 4ux(x-1)(x-2) + 6u^2(u-1)x(x-1) \\ & \quad + 4u(u-1)(u-2)x + u(u-1)(u-2)(u-3) \\ & \quad \equiv (x+u)(x+u-1)(x+u-2)(x+u-3), \end{aligned}$$

celle-ci étant symétrique par rapport aux deux variables x et u ; on passe de la première identité à la seconde en posant

$$x+u = X,$$

d'où

$$x-3 = X-3,$$

$$x-2 = X-2, \quad x-1 = X-1, \quad x = X.$$