

J.-B. POMEY

**Sur une propriété de la fraction
rationnelle du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 441-448

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__441_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[A 5a]

**SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FRACTION RATIONNELLE
DU SECOND DEGRÉ ;**

PAR M. J.-B. POMEY.

L'un des problèmes les plus intéressants que l'on puisse se proposer au sujet de la fraction rationnelle du second degré, c'est de retrouver sur elle, par une voie qui sera alors tout à fait élémentaire, quelques-unes des propriétés des courbes du troisième degré dont on demande parfois la démonstration aux fonctions elliptiques. Parmi ces propriétés se trouve en première ligne celle qui relie trois points en ligne droite.

Soit donc la fonction

$$y = \frac{a x^2 + b x + c}{a' x^2 + b' x + c'};$$

coupons la courbe par la droite

$$y = m x + n;$$

l'équation aux abscisses des points d'intersection est

$$ma' x^3 + (mb' + na' - a)x^2 + (mc' + nb' - b)x + nc' - c = 0.$$

Appelons x_1, x_2, x_3 les racines et posons

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$s_2 = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2,$$

$$s_3 = x_1 x_2 x_3.$$

Les relations entre les coefficients et les racines

donnent

$$\begin{aligned} m(b' + s_1 a') + n a' - a &= 0, \\ m(c' - s_2 a') + n b' - b &= 0, \\ m s_3 a' + n c' - c &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de m et de n fournit la relation cherchée; posons, pour abrégier,

$$A = bc' - cb', \quad B = ca' - ac', \quad C = ab' - ba';$$

elle s'écrit

$$A(b' + s_1 a') + B(c' - s_2 a') + C s_3 a' = 0.$$

Si A , B , C sont nuls simultanément, la courbe se décompose, l'équation aux abscisses devient

$$(m x + n)(a' x^2 + b' x + c') = 0.$$

Le problème est indéterminé. Écartons ce cas.

Cherchons la forme que doit avoir la fraction γ , pour que, si l'on pose

$$x_1 = \text{tang } \varphi_1, \quad x_2 = \text{tang } \varphi_2, \quad x_3 = \text{tang } \varphi_3,$$

la relation obtenue se confonde avec la suivante :

$$\text{tang}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = h.$$

Celle-ci revient à

$$s_1 + h s_2 - s_3 - h = 0.$$

L'identification donne

$$\frac{A a'}{1} = -\frac{B a'}{h} = \frac{C a'}{-1} = \frac{A b' + B c'}{-h}.$$

De ces équations on déduit d'abord

$$\begin{aligned} A h + B &= 0, \\ A b' + B(c' - a') &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$h(c' - a') - b' = 0.$$

D'autre part, les deux identités

$$A a' + B b' + C c' = 0,$$

$$A a + B b + C c = 0$$

donnent

$$a' - b' h - c' = 0,$$

$$a - b h - c = 0.$$

On aura donc, tout d'abord,

$$b'^2 + (c' - a')^2 = 0,$$

d'où

$$b' = 0, \quad a' = c' \quad \text{et ensuite} \quad h = \frac{a - c}{b}.$$

Si donc y est de la forme

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'(x^2 + 1)}$$

et qu'on pose $x = \tan \varphi$, les valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de φ correspondant à trois points en ligne droite satisfont à la relation

$$\tan(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{a - c}{b}.$$

C'est la relation fondamentale que nous nous proposons d'obtenir.

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{a + c}{2}(1 + x^2) \\ &+ \frac{c - a}{2}(1 - x^2) + 2\frac{b}{2}x, \end{aligned}$$

de sorte que, comme on a

$$\frac{2x}{1 + x^2} = \sin 2\varphi, \quad \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \cos 2\varphi,$$

y sera de la forme

$$y = y_0 + y_1 \sin(\varphi - \alpha),$$

en posant

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a - c}{b}, \quad \text{d'où} \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \alpha + k\pi.$$

Or, pour ramener le dénominateur à la forme indiquée, comme alors on doit avoir $\delta' \equiv b'^2 - 4a'c' < 0$, il suffira de poser

$$\gamma a'x + b' = \sqrt{-\delta'} \operatorname{tang} \varphi,$$

pour avoir

$$a'x^2 + b'x + c' = \frac{-\delta'}{4a'} (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi).$$

Le calcul de y_0 , y_1 et α , en fonction des coefficients de la fraction rationnelle, peut s'effectuer simplement, en recherchant la signification de ces quantités; on voit que, dans ce cas, il y a un maximum et un minimum réels, qui sont $y_0 + y_1$ et $y_0 - y_1$. Or ils sont donnés par l'équation

$$\delta' y^2 - 2T y + \delta = 0,$$

où l'on a

$$\delta' = b'^2 - 4a'c', \quad \delta = b^2 - 4ac, \quad T = bb' - \gamma ac' - 2c'a.$$

Posons

$$\Delta = T^2 - \delta\delta' = 4(B^2 - AC).$$

Cette valeur de Δ devra être positive et l'on aura

$$\left. \begin{array}{l} y_0 + y_1 \\ y_0 - y_1 \end{array} \right\} = \frac{T}{\delta'} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'},$$

d'où

$$y_0 = \frac{T}{\delta'}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'}.$$

Les valeurs de φ correspondant au maximum et au

minimum sont

$$\varphi' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad \varphi'' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4},$$

auxquelles correspondent les valeurs x' et x'' de x , savoir :

$$2\alpha'x' + b' = \sqrt{-\delta'} \operatorname{tang} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$2\alpha'x'' + b' = \sqrt{-\delta'} \operatorname{tang} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

d'où l'on tire aisément, par addition,

$$\alpha'(x' + x'') + b' = \sqrt{-\delta'} \operatorname{tang} \alpha.$$

Donc α est la valeur de φ qui correspond à l'abscisse qui est à égale distance des abscisses du maximum et du minimum. Or l'équation aux abscisses du maximum et du minimum est, comme on sait,

$$Cx^2 - 2Bx + A = 0,$$

d'où

$$x' - x'' = \frac{2B}{C}.$$

On aura donc

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2\alpha'B + b'C}{C\sqrt{-\delta'}},$$

et, moyennant cette valeur de α , on pourra écrire

$$x = -\frac{b'}{2\alpha'} + \frac{\sqrt{-\delta'}}{2\alpha'} \operatorname{tang} \varphi,$$

$$y = \frac{T}{\delta'} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'} \sin(2\varphi - \alpha);$$

enfin, la condition pour que trois points de la courbe soient en ligne droite est

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \alpha + k\pi.$$

Pour que ces transformations soient réelles, il faut que l'on ait $\delta' < 0$.

Supposons maintenant qu'on ait $\delta' > 0$. Je chercherai, dans ce cas, à identifier l'équation aux abscisses de trois points en ligne droite avec l'équation

$$\text{th}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = h,$$

en posant $x = \text{th} \psi$.

J'aurai à identifier l'équation en s_1, s_2, s_3 avec l'équation

$$h = \frac{s_1 + s_3}{1 + s_2} \quad \text{ou} \quad s_1 - h s_2 + s_3 - h = 0,$$

ce qui donnera, par un calcul semblable au précédent,

$$h = -\frac{b'}{a' + c'} = -\frac{a' + c'}{b'} = -\frac{a + c}{b}.$$

Si l'on posait $b' = \pm(a' + c')$, on aurait $h = \mp 1$ et $\pm(a + c) = b$; reportant b et b' dans Δ , on aurait $\Delta = 0$, la courbe se décomposerait. Écartons ce cas.

On posera donc

$$b' = 0, \quad a' + c' = 0,$$

d'où

$$h = -\frac{a + c}{b}.$$

On ramènera le dénominateur de la fraction γ à la forme cherchée, en posant

$$2 a' x + b' = \sqrt{c'} \text{th} \psi,$$

et il viendra pour γ une expression de la forme

$$\gamma = \gamma_0 + m \text{sh} 2\psi - n \text{ch} 2\psi.$$

Si l'on a $m^2 > n^2$, on posera

$$\text{th} x' = \frac{n}{m},$$

et il viendra

$$(1) \quad \gamma = \gamma_0 + \sqrt{m^2 - n^2} \text{sh}(2\psi - \alpha').$$

Si l'on a $m^2 < n^2$, on posera

$$\text{th } \alpha' = \frac{m}{n},$$

et il viendra

$$(2) \quad y = y_0 - \sqrt{n^2 - m^2} \text{ ch}(2\psi - \alpha').$$

La formule précédemment obtenue

$$y = \frac{T}{\delta'} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'} \sin(2\varphi - \alpha)$$

se transformera, si l'on pose

$$\varphi = \frac{\psi}{i}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{i},$$

en la suivante :

$$y = \frac{T}{\delta'} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{\delta'} \text{sh}(2\psi - \alpha');$$

c'est la formule (1), et l'on a

$$\frac{2\alpha'B + b'C}{C\sqrt{\delta'}} = \text{th } \alpha'.$$

La formule (2) sera donc

$$y = \frac{T}{\delta'} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'} \text{ch}(2\psi - \alpha')$$

avec

$$\text{th } \alpha'' = \frac{C\sqrt{\delta'}}{2\alpha'B + b'C}.$$

Un cas limite serait celui où l'on aurait $m = n$, ou $\alpha' = \alpha''$, c'est-à-dire

$$C^2\delta' = (2\alpha'B + b'C)^2.$$

L'identité

$$C^2\delta' - (2\alpha'B + b'C)^2 = -4\alpha'^2(B^2 - AC) = -4\alpha'^2\Delta$$

montre qu'on aurait $\Delta = 0$; la courbe alors se décomposerait.

Bien que nous ne voulions pas insister sur les nombreuses conséquences géométriques de la condition

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \alpha + k\pi,$$

pour trois points en ligne droite, ou de la condition analogue en ψ_1, ψ_2, ψ_3 , nous ajouterons, à titre d'exemple, une simple remarque, relative aux points d'inflexion : suivant que δ' est négatif ou positif, j'ai exprimé y en fonction des arguments φ ou ψ . Comme la tangente trigonométrique a pour période π , les φ des trois points d'inflexion, dans le cas, de la courbe en φ , sont

$$\varphi' = \frac{\alpha}{3},$$

$$\varphi'' = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi''' = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Ils sont réels et les points d'inflexion aussi ; dans le cas de la courbe en ψ , comme la tangente hyperbolique a pour période πi , une seule de ces valeurs serait réelle ; donc la condition de réalité des trois points d'inflexion est $\delta' < 0$. D'autre part, la relation

$$\varphi' + \varphi'' + \varphi''' = \alpha + \pi$$

montre que, lorsque les trois points sont réels, ils sont en ligne droite. Analytiquement, d'ailleurs, il en serait de même si l'on considérait les points imaginaires de la courbe.