

M.-F. EGAN

**Foyers et asymptotes des coniques
et quadriques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 408-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__408_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'3d][L'7][L²]

FOYERS ET ASYMPTOTES DES CONIQUES ET QUADRIQUES;

PAR M. M.-F. EGAN.

I.

Une conique est uniquement déterminée lorsqu'on se donne le centre, les directions des axes, un point sur la courbe et la tangente en ce point.

Soit une hyperbole S , de centre O et de foyers F, F' , et soient A, A' les points où la tangente à S en un point M rencontre les asymptotes. D'après ce qu'on vient de dire, l'hyperbole Σ , ayant ses foyers en A et A' et passant par O , est la seule conique ayant pour axes la tangente et la normale à S au point M , et tangente en O à FF' . Un raisonnement tout pareil identifie S

avec une conique ayant ses foyers sur les asymptotes de Σ ; ces asymptotes sont donc MF et MF' .

Voici quelques autres propriétés du système :

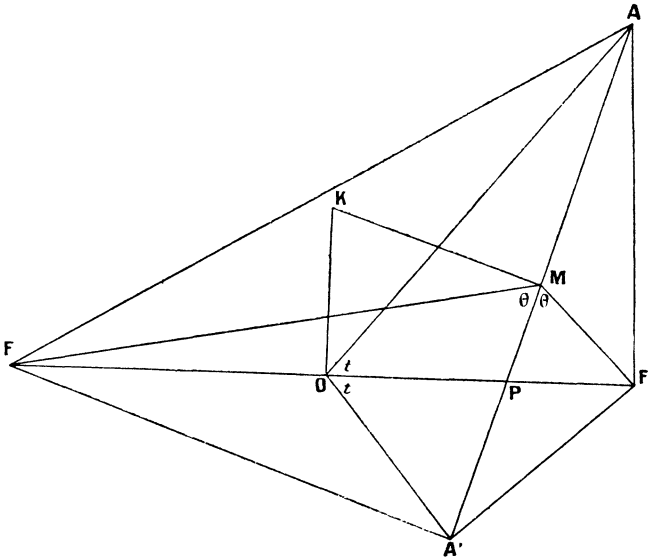
(1) *Les quatre foyers F, F', A, A' sont sur une même circonférence C .*

(2) *Les quatre asymptotes touchent un cercle C' , concentrique à C .*

(3) *Le quadrilatère $AFA'F'$ est circonscrit à une ellipse ayant ses foyers en O et M .*

(4) *Lorsque M se déplace sur S , la distance perpendiculaire de A ou A' à MF reste constante.*

La proposition (2) a été énoncée par M. d'Ocagne



dans les *Nouvelles Annales*, sous une forme un peu différente (1915, p. 532, question 2275).

Désignons par $2t$ et 2θ les angles AOA' et FMF' , et posons $FF' = 2c$, $AA' = 2\gamma$.

On a

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad OA \cdot OA' &= OF^2, & \widehat{FOA} &= \widehat{FOA'}, \\ \widehat{FA'O} &= \widehat{OFA}, & \widehat{AFA'} &= \widehat{OFA'} + \widehat{FA'O} = t. \end{aligned}$$

On trouve de même que l'angle $AF'A' = \pi - t$, donc le quadrilatère $AFA'F'$ est cyclique. Soit R le rayon du cercle circonscrit (C). On a

$$2R = AA' : \sin AFA' = 2\gamma : \sin t.$$

Or, t étant le demi-angle des asymptotes de S , si l'on désigne par b le demi-axe conjugué de cette hyperbole, on a

$$\sin t = b : c \quad \text{et} \quad R = c\gamma : b.$$

On en déduit que les axes conjugués de S et de Σ ont la même longueur $2b$.

Le centre K du cercle C est à l'intersection des perpendiculaires à FF' et AA' en O et M respectivement. Pour démontrer la proposition (2), calculons la distance perpendiculaire R' de K à OA , par exemple. On a

$$R' = OK \cos t = R \cos \theta \cos t.$$

On trouverait évidemment la même valeur de R' en remplaçant OA par l'une quelconque des trois autres asymptotes. Remarquons en passant que

$$R' : R = \cos(AA', FF').$$

En effet, la projection sur FF' de $A'A$ est la différence des projections de OA et OA' ; on a donc

$$2\gamma \cos APF' = (OA - OA') \cos t.$$

L'excentricité de Σ est égale à $\sec \theta$, on a donc

$$OA - OA' = 2\gamma \cos \theta,$$

donc

$$\cos APF' = \cos t \cos \theta.$$

Les triangles FOA, A'F'A sont équiangulaires, donc les angles OAF, MAF' sont égaux. Il s'ensuit que l'ellipse E, ayant ses foyers en O et M, et touchant AF, touche AF'. On établit de même (en tenant compte des valeurs $\theta, \pi - \theta$ des angles FAF', FA'F') que cette ellipse touche les autres côtés du quadrilatère.

Calculons les demi-axes a' et b' de l'ellipse E. Soient p et p' les perpendiculaires de O et M sur AF; on a

$$b'^2 = pp' = OF \cdot MA \cdot \sin OFA \sin MAF = c\gamma \cdot AF' \cdot A'F : 4R^2.$$

Or, les triangles AFA', AOF' sont équiangulaires, donc

$$AF' \cdot A'F = FO \cdot AA' = 2c\gamma,$$

$$b'^2 = c^2 \gamma^2 : 2R^2 = b^2 : 2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 4(a'^2 - b'^2) &= OM^2 = \frac{1}{2} (OA^2 + OA'^2) - \gamma^2 \\ &= \frac{1}{2} (OA - OA')^2 + OA \cdot OA' - \gamma^2 \\ &= 2(\gamma^2 - b^2) + c^2 - \gamma^2 \\ &= c^2 + \gamma^2 - 2b^2; \end{aligned}$$

donc

$$4a'^2 = c^2 + \gamma^2, \quad 4b'^2 = 2b^2.$$

La distance perpendiculaire du foyer d'une hyperbole à l'asymptote est égale au demi-axe conjugué. La distance de A à MF est donc égale à b , où que soit M sur la conique S.

II.

Soit M un point commun à trois quadriques homofocales S , ayant leur centre en O . On sait qu'il existe trois quadriques Σ de centre M , homofocales entre elles, ayant pour plans principaux les plans tangents en M aux S , et tangentes en O aux plans principaux des S .

Alors, toute focale des Σ est la section du cône asymptotique de l'une des quadriques S par le plan tangent en M à cette quadrique. L'énoncé reste vrai si l'on permute S et Σ , O et M .

La démonstration est à peu près la même que pour le cas des coniques. Considérons en effet les trois quadriques Φ , passant par O , et ayant pour focale commune la section φ du cône asymptotique de la quadrique S par le plan tangent à S en M . Les quadriques Φ ont évidemment les mêmes plans principaux que les Σ . Pour les identifier avec les Σ , il suffit donc de montrer que leurs plans tangents en O sont les mêmes. Or, pour les Φ ces plans sont les plans principaux du cône $O\varphi$, qui sont aussi les plans principaux de S , dont $O\varphi$ est le cône asymptotique. Les Φ sont donc identiques aux Σ .

Prenons une focale f des S et une focale φ des Σ , alors la développable (f, φ) est circonscrite à une conique de révolution ayant O et M pour foyers.

Soient $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ les équations tangentielles des points O et M . La conique φ est inscrite dans les deux cônes tangents à S , de sommets O et M , lesquels sont le cône asymptotique $O\varphi$ et le plan tangent en M . Son équation s'écrit donc

$$\varphi = S + k\alpha\beta = 0,$$

k étant une constante. D'autre part, f étant homofocale à S , son équation peut s'écrire

$$f = S + \lambda \Omega = 0,$$

Ω désignant le cercle à l'infini ; d'où l'identité

$$\varphi - f = k\alpha\beta - \lambda\Omega,$$

qui démontre la proposition.

Deux quadriques S' et Σ' , homofocales à S et à Σ respectivement, seront représentées par $f + m\Omega$, $\varphi + n\Omega$. La développable (S', Σ') est donc circonscrite à la conique de révolution

$$k\alpha\beta - (\lambda + m - n)\Omega = 0,$$

ayant ses foyers également en O et M .