

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17 (1917), p. 34-40

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__34_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2231.

(1918, p. 52.)

Soient a une racine simple de l'équation $\varphi(x) = 0$ et $F(x)$ un polynome défini par l'équation

$$\varphi^2(x) = (x - a)^2 F(x).$$

Démontrer qu'on a

$$F(a) = \varphi'^2(a),$$

$$F'(a) = \varphi'(a)\varphi''(a),$$

$$F''(a) = \frac{1}{4}\varphi'^2(a) + \frac{1}{3}\varphi'(a)\varphi'''(a), \quad \dots$$

Supposant qu'on ait

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$$

et que $f(x)$ soit un polynome de degré m ($m < 2n$), véri-

fier l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^2} \frac{1}{(x-a_i)^2} \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \frac{f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^3} \frac{1}{x-a_i}. \end{aligned}$$

Les nombres a_1, a_2, \dots, a_n étant connus, déterminer le polynôme $f(x)$ par la condition que la relation précédente ne contienne pas de termes de la forme

$$\frac{A_i}{x-a_i}$$

et, dans ce cas, trouver la forme de la relation considérée.

N. ABRAMESCU.

SOLUTION

Par M. T. ONO.

1° La différentiation n fois de l'équation

$$(x-a)^2 F(x) = \varphi(x)\varphi(x)$$

donne

$$\begin{aligned} & (x-a)^2 F^{(n)}(x) + 2n(x-a)F^{(n-1)}(x) + n(n-1)F^{(n-2)}(x) \\ &= \varphi(x)\varphi^{(n)}(x) + n\varphi'(x)\varphi^{(n-1)}(x) \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{2!}\varphi''(x)\varphi^{(n-2)}(x) + \dots + \varphi^{(n)}(x)\varphi(x) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} n(n-1)F^{(n-2)}(a) &= n\varphi'(a)\varphi^{(n-1)}(a) \\ & \quad + \frac{n(n-1)}{2!}\varphi''(a)\varphi^{(n-2)}(a) + \dots \\ & \quad + n\varphi^{(n-1)}(a)\varphi'(a). \end{aligned}$$

En faisant $n = 2, 3, 4, 5, \dots$, on trouve

$$F(a) = \varphi'^2(a),$$

$$F'(a) = \varphi'(a)\varphi''(a),$$

$$12F''(a) = 8\varphi'(a)\varphi'''(a) + 6\varphi''^2(a),$$

$$20F'''(a) = 10\varphi'(a)\varphi^{(4)}(a) + 20\varphi''(a)\varphi'''(a).$$

[La relation donnée pour $F''(a)$ dans l'énoncé est en faute.]

2° Posons, selon l'usage,

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2} \\ = \sum \frac{A'_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{A_i}{x-a_i},$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \sum A'_i F_i(x) + \sum A_i (x-a_i) F_i(x),$$

où

$$(x-a_i)^2 F_i(x) = (x-a_1)^2 \dots (x-a_n)^2 = \varphi^2(x).$$

On a d'abord

$$A'_i = \frac{f(a_i)}{F_i(a_i)} = \frac{f(a_i)}{\varphi'^2(a_i)}$$

et puis

$$f'(a_i) = A'_i F'_i(a_i) + A_i F_i(a_i),$$

donc

$$A_i = \frac{f'(a_i) - A'_i F'_i(a_i)}{F_i(a_i)} = \frac{f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i)}{\varphi'^3(a_i)},$$

car, d'après 1°

$$F_i(a_i) = \varphi'^2(a_i), \quad F'_i(a_i) = \varphi'(a_i)\varphi''(a_i).$$

3° Dans le cas $A_i = 0$, on a

$$f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i) = 0,$$

donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$$

pour $x = a_1, a_2, \dots, a_n$; ainsi, à un facteur numérique près,

$$f(x) = \varphi'(x).$$

On a alors

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = \sum \frac{1}{\varphi'(a_i)} \frac{1}{(x-a_i)^2}.$$

2235.

(1915, p. 54.)

Soient A, B, C, D les pieds des normales, issues d'un point P; a une ellipse d'axes Ox et Oy. Les points B, C, D et le point A', diamétralement opposé sur l'ellipse au point A, sont sur un cercle, dit « cercle de Joachimsthal ». Démontrer que le centre de ce cercle peut être obtenu par la construction suivante : Soient α et β les points de rencontre de la normale en A avec les axes Ox et Oy, M le point d'intersection des perpendiculaires élevées par ces points aux axes, M₁ le symétrique de M par rapport à O; le centre cherché est le milieu du segment M₁P.

Ce théorème résulte de l'équation du cercle de Joachimsthal mise sous une forme convenable.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est l'équation de l'ellipse; si x_0, y_0 sont les coordonnées du point A, α et β celles du point P, le cercle de Joachimsthal a pour équation

$$x^2 + y^2 - y \left(\beta + \frac{c^2 y_0}{b^2} \right) - x \left(\alpha - \frac{c^2 x_0}{a^2} \right) - \beta y_0 - \alpha x_0 + \frac{c^2 x_0^2}{a^2} - a^2 = 0.$$

Si l'on remarque que les coordonnées du point M₁ sont

$$x = -\frac{c^2 x_0}{a^2}, \quad y = \frac{c^2 y_0}{b^2},$$

on a la proposition à démontrer.

Autre solution de M. T. ONO

2236.

(1915, p. 55.)

Trouver l'intégrale

$$\int^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + \lambda}.$$

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + \lambda} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8 dx}{(8\lambda - 1) + \cos 4x},$$

ou, en posant $\text{tang } 2x = u$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+u^2} \frac{4\lambda-1}{4\lambda} &= 8 \sqrt{\frac{\lambda}{4\lambda-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du \sqrt{\frac{4\lambda+1}{4\lambda}}}{1+u^2} \\ &= 4\pi \sqrt{\frac{\lambda}{4\lambda-1}}. \end{aligned}$$

Autre solution de M. ONO.

2237.

(1915, p. 55)

Les trois équations

$$(1) \quad (x-2a)(2x+a)(x+6a)(2x-3a) - 4ax(3x-4a)(4x-9a) = 0,$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{a\sqrt{2a-3x} + (a-x)\sqrt{x+2a}} - \sqrt{a\sqrt{2a-3x} - (a-x)\sqrt{x+2a}} = \sqrt{a} \sqrt[3]{2\sqrt{2}},$$

$$(3) \quad \sqrt[6]{a\sqrt{a} + \sqrt{a^3 - x^3}} + \sqrt[6]{a\sqrt{a} - \sqrt{a^3 - x^3}} = \sqrt[6]{2a\sqrt{a}}$$

ont deux racines communes $\frac{a}{4}(9 \pm \sqrt{33})$ qui sont racines doubles de (1).

Les autres racines de l'équation (2) sont

$$0, \quad -a(3 \pm \sqrt{-3}) \frac{a}{4}(3 \pm 5\sqrt{3}).$$

Les autres racines de l'équation (3) sont

$$0, \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1 + \sqrt{3}), \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1 - \sqrt{3}).$$

E.-N. BARISIEN.

(39)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Posons dans (1)

$$x = t + \frac{9a}{4},$$

cette équation devient

$$\begin{aligned} & \left(t + \frac{a}{4}\right) \left(t + \frac{11a}{4}\right) \left(t + \frac{33a}{4}\right) \left(t - \frac{3a}{4}\right) \\ & - 4at \left(t + \frac{9a}{4}\right) \left(3t + \frac{11a}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\left(t^2 - \frac{33}{16}a^2\right)^2 = 0;$$

les racines de (1) sont donc doubles et égales à

$$\frac{a}{4} (9 \pm \sqrt{33}).$$

L'équation (2) élevée au cube s'écrit

$$2(a-x)\sqrt{x+2a} = \sqrt{a}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}(2a+3\sqrt[3]{-x^3})$$

ou, en désignant par ε l'une des racines cubiques de -1 ,

$$x[2x^2 - 9a\varepsilon^2x - 6a^2(1 + 2\varepsilon)] = 0,$$

d'où tout d'abord la racine $x = 0$.

Si

$$\varepsilon = -1$$

on a l'équation

$$2x^2 - 9ax + 6a^2 = 0$$

dont les racines sont

$$\frac{a}{4} (9 \pm \sqrt{33}).$$

Si

$$\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

on a l'équation

$$4x^2 - 9a(\sqrt{-3} - 1)x - 6a^2(2 + \sqrt{-3}) = 0$$

dont les racines sont

$$-a(3 - \sqrt{3}), \quad \frac{a}{4}(3 + 5\sqrt{-3}).$$

Si

$$\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

on a l'équation

$$4x^2 + 9a(\sqrt{-3} + 1)x - 6a^2(2 - \sqrt{-3}) = 0$$

dont les racines sont

$$-a(3 + \sqrt{3}), \quad \frac{a}{4}(3 - 5\sqrt{-3}).$$

Si nous posons dans (3)

$$u = \sqrt[6]{a\sqrt{a} + \sqrt{a^3 - x^3}}, \quad v = \sqrt[6]{a\sqrt{a} - \sqrt{a^3 - x^3}},$$

nous avons

$$uv = \sqrt[6]{x^3} \quad \text{et} \quad u + v = \sqrt[6]{2a\sqrt{a}} = K;$$

élevons les deux membres de cette dernière équation à la puissance 6, il vient

$$uv[6(u^4 + v^4) + 15uv(u^2 + v^2) + 20u^2v^2] = 0,$$

d'où l'on déduit, en supposant $uv \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$,

$$2u^2v^2 - 4K^2uv + K^4 = 0,$$

d'où

$$uv = \frac{K^2}{4}(9 \pm \sqrt{33}),$$

ou

$$\sqrt[6]{x^3} = \frac{K^2}{4}(9 \pm \sqrt{33}),$$

d'où les racines

$$x = \frac{K^4}{4^2}(9 \pm \sqrt{33})^2\varepsilon;$$

ε étant l'une quelconque des racines cubiques de l'unité, l'énoncé n'est donc pas vérifié en ce qui concerne l'équation (3).