

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 349-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__349_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

400.

(1857, p. 391)

Soit u une fonction rationnelle et entière du degré n d'un nombre quelconque de variables $x, y, z, \dots$, et soient $du, d^2u, \dots, d^nu$, les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que $dx, dy, dz, \dots$ sont constantes. Formons l'équation

$$t^n d^n u + nt^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1)t^{n-2} d^{n-2} u + \dots + n'u = 0.$$

Formons une fonction symétrique quelconque ration-

nelle et entière des différences des racines de cette équation; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u, d^{n-1} u, \dots, du, u$, et par conséquent une fonction de $x, y, z, \dots, dx, dy, dz$; si l'on différentie cette dernière fonction en traitant dx, dy, dz comme des constantes, on trouve un résultat identiquement nul.

MICHAEL ROBERTS.

SOLUTION

Par M. L. POLI.

Soit

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

une équation quelconque. Toute fonction symétrique Φ des différences des racines satisfait à l'équation différentielle

$$n p_0 \frac{d\Phi}{dp_1} + (n-1) p_1 \frac{d\Phi}{dp_2} + \dots + p_{n-1} \frac{d\Phi}{dp_n} = 0.$$

(Voir les *Leçons d'Algèbre supérieure* de Salmon. Ne les ayant pas ici sous la main, je ne puis donner de références.)

Cette relation, appliquée à l'équation en t , donne

$$n d^n u \frac{d\Phi}{d(n d^{n-1} u)} + (n-1) n d^{n-1} u \frac{d\Phi}{d[n(n-1) d^{n-2} u]} + \dots + (n-\mu) n(n-1) \dots (n-\mu+1) \frac{d\Phi}{d[n(n-1) \dots (n-\mu) d^{n-\mu-1} u]} = 0$$

ou

$$(1) \quad d^n u \frac{d\Phi}{d(d^{n-1} u)} + d^{n-1} u \frac{d\Phi}{d(d^{n-2} u)} + \dots + du \frac{d\Phi}{d(u)} = 0.$$

Il s'agit de prouver que $d\Phi = 0$, et comme Φ est fonction de $d^n u, d^{n-1} u, \dots, du, u$, on a

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial (d^n u)} d(d^n u) + \frac{\partial \Phi}{\partial (d^{n-1} u)} d(d^{n-1} u) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u} d(u).$$

On peut l'écrire, puisqu'on a convenu de représenter par $d^\mu u$ les différentielles prises en considérant dx, dy comme constantes,

$$(2) \quad d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial (d^n u)} d^{n+1} u + \frac{\partial \Phi}{\partial (d^{n-1} u)} d^n u + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du;$$

retranchant (1) de (2), on trouve

$$d\Phi \doteq \frac{\partial \Phi}{\partial (d^n u)} d^{n+1} u = 0$$

car, d'après les conventions faites,

$$d^{n+1} u = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

724.

(1865, p. 141; 1917, p. 119.)

Étant donné un point quelconque O et la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, le cône qui a pour sommet le point O et pour directrice la courbe donnée coupe la sphère suivant une deuxième courbe située, comme la première, sur une infinité de surfaces du second ordre.

Cela posé, on demande de démontrer que les axes de chacune de ces nouvelles surfaces sont parallèles aux normales qu'on peut mener en O aux trois anallagmatiques du quatrième ordre, passant par ce point et qui ont pour focale la courbe donnée.

MOUTARD.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient (S) la sphère, (Σ) la quadrique donnée, Γ leur biquadratique d'intersection, ω le centre de (S), Π le plan polaire de O par rapport à (S). Π coupe Oω en P, soit P₁ le milieu de Pω: menons par P₁ un plan Π₁ parallèle à Π. Les trois anallagmatiques ayant pour déférentes les trois quadriques (S) + λ(Σ) = 0 tangentes à Π₁ et pour sphère directrice (S) passeront par O, et si T₁, T₂, T₃ désignent les contacts de ces trois surfaces avec Π₁, les normales en O à ces trois anallagmatiques seront OT₁, OT₂, OT₃. Or le triangle T₁T₂T₃ est le triangle conjugué commun aux coniques sections de (S) et (Σ) par Π₁, la conique section de (S) n'est autre que la section par Π₁ du cône isotrope de sommet O, le trièdre OT₁T₂T₃ est donc trirectangle, fait du reste bien connu, les anallagmatiques considérées formant un système triple orthogonal. Si maintenant α, β, γ, δ désignent les points

d'intersection de Γ avec Π_1 , les points à l'infini sur $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$, seront les points à l'infini de Γ_1 , biquadratique qui constitue le reste de l'intersection de (S) avec le cône OT ; $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ seront les génératrices communes à tous les cônes de sommet O parallèles aux cônes asymptotiques de toutes les quadriques (Σ_1) passant par Γ_1 ; comme d'autre part les axes de ces quadriques sont parallèles aux arêtes du trièdre conjugué commun au cône isotrope de sommet O , et aux cônes parallèles aux cônes asymptotiques menés par O , ces axes seront parallèles à OT_1 , OT_2 , OT_3 , ce qui démontre la proposition.

Autre solution, par M. M.-F. EGAN.

729.

(1865, p. 142, 1917, p. 120.)

Les directions des axes de la section faite par le plan

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \lambda$$

dans la surface

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2C'x + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}$$

sont données par les intersections du plan

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

avec le cône

$$\begin{aligned} (A' \cos^2 \beta + A' \cos^2 \alpha - 2B' \cos \alpha \cos \beta)(x^2 \sin^2 \beta - y^2 \sin^2 \alpha) \\ + (A \cos^2 \gamma + A'' \cos^2 \alpha - 2B' \cos \alpha \cos \gamma)(z^2 \sin^2 \alpha - x^2 \sin^2 \gamma) \\ + (A' \cos^2 \gamma + A'' \cos^2 \beta - 2B \cos \beta \cos \gamma)(y^2 \sin^2 \gamma - z^2 \sin^2 \beta) = 0. \end{aligned}$$

J.-J.-A. MATHIEU.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Pour que le cône

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0$$

soit coupé par le plan

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

suivant des parallèles aux axes de la section faite par ce même plan dans la quadrique considérée, il faut et il suffit que le plan donné coupe les cônes

$$\begin{aligned} Lx^2 + My^2 + Nz^2 &= 0, \\ Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B''xz + 2B'''xy &= 0 \end{aligned}$$

et les cônes

$$(1) \quad \begin{cases} Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0, \end{cases}$$

suivant des génératrices formant faisceau harmonique, d'où les deux conditions :

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = L(A'' \cos^2 \beta + A' \cos^2 \gamma - 2B \cos \beta \cos \gamma) \\ \quad + M(A \cos^2 \gamma + A'' \cos^2 \alpha - 2B' \cos \alpha \cos \gamma) \\ \quad + N(A' \cos^2 \alpha + A \cos^2 \beta - 2B'' \cos \alpha \cos \beta) \\ 0 = L(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + M(\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) \\ \quad + N(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 0. \end{cases}$$

Cette dernière peut s'écrire

$$(3) \quad L \sin^2 \alpha + M \sin^2 \beta + N \sin^2 \gamma = 0;$$

éliminons L, M, N entre les équations (1), (2), (3), il vient

$$\begin{vmatrix} \begin{cases} A'' \cos^2 \beta + A' \cos^2 \gamma \\ - 2B \cos \beta \cos \gamma \end{cases} & \begin{cases} A \cos^2 \gamma + A'' \cos^2 \alpha \\ - 2B' \cos \alpha \cos \gamma \end{cases} & \begin{cases} A' \cos^2 \alpha + A \cos^2 \beta \\ - 2B'' \cos \alpha \cos \beta \end{cases} \\ \sin^2 \alpha & \sin^2 \beta & \sin^2 \gamma \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Autres solutions, par MM. DARGENTON et M. FAUCHEUX.

772.

(1866, p. 384; 1916, p. 320.)

Le nombre des sommets d'une courbe algébrique est, en
Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVII. (Sept. 1917.) 27

général, donné par la formule

$$3i + 5c - 3d - 3p,$$

dans laquelle i , c , d représentent le nombre des points d'inflexion, la classe, le degré de la courbe donnée, et p le nombre des branches paraboliques. LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Si l'on appelle *sommet d'une courbe* un point où le rayon de courbure est maximum ou minimum, c'est-à-dire un point où le cercle osculateur passe par quatre points consécutifs de la courbe, la formule de Laguerre est inexacte. En effet, à un sommet sur la courbe correspond un point de rebroussement de la développée; or Salmon montre (*Courbes planes*, p. 139) que le nombre des points de rebroussement de la développée est

$$R = 3i + 6c - 3d - 5p;$$

dans ce nombre sont compris les points de rebroussement à l'infini qui sont au nombre de $d - 2p$, ce qui porte le nombre des sommets à distance finie à

$$3i + 6c - 4d - 3p.$$

En admettant que la courbe ne passe pas par les points cycliques.

815.

(1867, p. 288; 1917, p. 157.)

Pour qu'une surface du second ordre soit transformée homologiquement en une sphère, il faut et il suffit: 1° que le plan d'homologie soit parallèle à l'un des plans cycliques de la surface (PONCELET, *Propriétés projectives*); 2° que le centre d'homologie soit un quelconque des points de la conique focale situé dans le plan principal auquel le plan d'homologie est perpendiculaire.

L. PAINVIN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient O le centre d'homologie, P le plan d'homologie, P' le plan qui correspond au plan de l'infini dans la transformation, le cône isotrope de sommet O coupe P' suivant un cercle (C) : pour qu'une quadrique Σ soit transformée en une sphère, il faut et il suffit qu'elle passe par (C) , P' et par suite P doit donc être parallèle à un plan cyclique Σ , de plus le cône isotrope de sommet O est alors bitangent à Σ , le cône circonscrit à Σ ayant pour sommet O est donc de révolution, et O est un foyer de Σ , se trouvant évidemment sur la focale dont le plan est perpendiculaire à P .

820 et 821.

(1877, p. 335, 336; 1916, p. 359, 360.)

820. *On coupe une surface du second degré (S) par un plan. On prend, sur la courbe d'intersection C , quatre points arbitraires (non en ligne droite) a, b, g, h et l'on mène en ces points les normales A, B, G, H à la surface (S) . On construit le couple de droites D et Δ rencontrant à la fois ces quatre normales et l'on détermine la droite I , issue du point fixe i qui s'appuie sur D et Δ .*

Démontrer que, lorsqu'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C , les droites telles que I engendrent un plan.

821. *Les données restant les mêmes, on construit comme précédemment le couple de droites D, Δ . On prend les traces de ces droites sur un plan fixe (P) ; on joint ces traces par une droite M .*

Démontrer que, lorsqu'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C , les droites telles que M passent par un point fixe.

MANNHEIM.

SOLUTIONS

Par M. R. BOUVAIST.

La conique C , supposée de grandeur invariable, peut se déplacer sur (S) ; son déplacement est bien déterminé, si cinq

de ses points sont assujettis à rester sur (S); il est d'ailleurs le même quels que soient ces cinq points. Il en résulte :

1° Que la droite I est située dans le plan normal à la trajectoire du point i , supposé entraîné dans le mouvement, et ceci quels que soient a, b, g, h ;

2° Que la droite (M) passe par le foyer du plan (P) suppose entraîné, et ceci quels que soient a, b, g, h .