

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 273-278

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__273_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. P. Carissan. — *Description mécanique de la spirale logarithmique.* — Il est possible d'obtenir un tracé rigoureux de cette courbe fondamentale au moyen d'un appareil très simple, inventé et construit par l'auteur pour quelques élèves de collège en 1914, issu de la remarque suivante :

Les deux arcs : 1° de la spirale $\Sigma \rho = A^{\omega} (A > 0)$,

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVII. (Juillet 1917.) 21

2° de l'hélice circulaire H de pas h et de rayon R, $x = R \cos u$, $y = R \sin u$, $z = Rmu$, ont même expression différentielle en fonction : 1° de la cote de l'extrémité M de l'arc pour l'hélice; 2° de son rayon vecteur pour la spirale.

En effet, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

$$(1) \quad \sigma = \frac{\sqrt{1 + LA^2}}{LA} (\rho_1 - \rho_0),$$

où $LA = \log. \text{ nép. } A$ et $ds^2 = R^2(1 + m^2) du^2$,

$$(2) \quad s = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} (z_1 - z_0)$$

pour l'un et l'autre cas.

Cela posé, si l'on parvient à établir une connexion matérielle telle que la double condition $s = \sigma$, $\rho = z$ soit effectivement satisfaite d'une façon continue dans le champ de l'instrument, on aura réalisé un traceur de Σ , avec les relations métriques

$$(3) \quad LA = m = \frac{h}{2\pi R} = \cot V,$$

V étant l'angle intérieur de la tangente à la spirale avec le rayon vecteur OM.

La rotation d'une vis ordinaire, armée d'une molette roulante perpendiculaire, solidaire d'un moyeu-écrou qui épouse la vis, satisfait à la condition continue $\rho = z$, et permet d'appliquer l'hélice H sur la spirale Σ . La vis tourne tout d'une pièce, non sur elle-même, mais en balayant de son axe un plan P' autour d'un point fixe O' de cet axe et de ce plan. La molette, de rayon R, appuie légèrement par son bord sur un plan P, parallèle à P' (distance R), et roule sans glisser sur ce plan P, ce qui réalise la condition $s = \sigma$.

L'appareil, de construction aisée, se compose donc essentiellement : 1° d'une vis ordinaire; 2° d'une molette-écrou finement dentée mobile le long et autour de la vis; 3° d'un pivot-étrier OO' , recevant en O' l'extrémité polaire de la vis, tandis que son pied est au pôle O de la spirale sur une planchette circulaire P . Le point de contact de la molette et du plan P décrit la spirale avec une grande précision à partir d'un cercle de quelques millimètres autour du pôle-asymptote.

Classification des spirales d'après les constantes de la vis :

$$\begin{aligned} h < 2\pi R, \quad A < e: & \quad h > 2\pi R, \quad A > e; \\ h = 2\pi R, & \quad A = e. \end{aligned}$$

Ainsi, une molette roulante embrayée sur une vis tournante de pas égal au périmètre de la molette engendre précisément, par son point de contact, la spirale logarithmique même $\rho = e^{\omega}$.

Pour les vis dont le pas est inférieur à ce périmètre, la base A est plus petite que e .

Pour celles (vis à long enroulement et à long écrou) dont le pas est supérieur, la base est plus grande que e .

Perfectionnements et remarques. — 1° Il importe peu que la vis tourne plutôt que le plateau ou même tous les deux à la fois. On peut aussi restreindre le champ de la rotation en la limitant à un faible secteur, à condition de relever la vis à bout de course pendant le mouvement rétrograde, à l'aide d'un encliquetage.

2° En soudant bout à bout deux vis symétriques, ou de pas inverse de part et d'autre du point O , et en armant chacune d'elles d'une molette, la distance des

deux molettes MM' représente la fonction hyperbolique $A^x + A^{-x}$.

3° Un curvimètre ordinaire, tournant autour de l'axe de son manche, projeté au point fixe O , fournit le tracé théorique immédiat de la spirale logarithmique ; pour un instrument de ce genre

$$R = 3^{\text{mm}},5; \quad h = 0,5; \quad A = 1,001; \quad V = 87^{\circ} 30',$$

les spires sont très rapprochées bien que séparées à l'œil nu et que leur dilatation progressive soit manifeste.

4° Il est possible d'établir un mécanisme asymptote déroulé uniquement dans le temps et dans un espace fini et fournissant par leurs différences une suite illimitée de décimales ou de logarithmes de nombres croissants, par l'adjonction d'un parallélogramme articulé dont un côté est constitué par la vis prenant des positions de plus en plus inclinées. Cet appareil, à l'étude, plus compliqué, oscillerait à la façon d'un pendule.

5° Sur un cône quelconque, on obtient une hélice conique. Le traceur logarithmique équivaut, à la rigueur, à une présentation expérimentale des logarithmes, en permettant de constater la propriété fondamentale du produit sur des couples de valeurs numériques choisies arbitrairement.

Nous ressentons vivement l'honneur qui nous est fait d'une présentation dans ce Recueil, sous les auspices d'une entité essentielle (conquête lumineuse et sereine des méditations de tant d'hommes supérieurs, parmi lesquels brille Hermite), de ce nombre e , trouvé une fois de plus en corrélation avec cet autre π , dans la conjugaison harmonieuse d'un transformateur cinéma-

tique primordial; de l'humble outil qu'est la vis aux mains d'un modeste artisan.

M. G Fontené. — *Au sujet de la question 711, IV.* — Comme je l'ai montré précédemment (1916, p. 272) l'énoncé de l'auteur est exact. Un énoncé rectifié a été donné par M. J. de Virieu, en 1865, page 79; voici cet énoncé :

« Une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \dots = 0,$$

dans laquelle $f(a)$ désigne une fonction algébrique du degré $m - 2$ ou plus, a toujours des racines imaginaires. »

Pour la démonstration, le degré de $f(a)$ étant $m - s$, avec $s \geq 2$, l'auteur multiplie le premier membre de l'équation par $(x - 1)^{m-s+1}$; dans la nouvelle équation, les termes de degrés $m, m - 1, \dots, m - s + 1$, en nombre $s \geq 2$, ont des coefficients nuls comme étant leur différence d'ordre $m - s + 1$ d'une fonction entière de degré $m - s$.

M. de Virieu indique ensuite une généralisation de la proposition énoncée par Hermite au Concours général de 1842.

M. d'Ocagne. — *Remarque sur la question 2255 (voir la solution, 1917, p. 193).* — La solution du 2^o peut être complétée par la remarque que *la section par un plan quelconque, parallèle à D, est une cissoïde d'une ellipse identique à celle suivant laquelle le plan mené par D, parallèlement au plan de section, coupe la surface.*

Pour avoir une cissoïde de cercle, il suffit donc de

couper par un plan parallèle à un des plans de section circulaire menés par D. Ces plans, au nombre de deux, sont ceux, faciles à déterminer, qui (si l'on se reporte aux notations de l'énoncé) correspondent aux points B pour lesquels $CB = CA$.