

Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17 (1917), p. 241-248

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__241_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

1689 (1895, 35*). — Conclure des mêmes équations (celles de la question 1688) les résultats suivants :

1°

$$dt = \frac{m d\tau \sin(\nu + \nu')}{a \sin \nu'} = \frac{m' d\sigma' \sin(\nu + \nu')}{a \sin \nu};$$

2°

$$a^2 = u^2 + u'^2 + 2uu' \cos(\nu + \nu');$$

3° Le plan des deux normales menées par l'origine aux plans (A) contient l'axe des z ;

4° L'équation

$$m d\tau \sin \nu = m' d\sigma' \sin \nu',$$

où $m d\tau$ et $m' d\sigma'$ sont des moments, exprime que le plan des xy est un lieu géométrique d'axes instantanés de rotation et que, par suite, ce plan est un cône de Poinsot, lequel est de révolution et a pour cône supplémentaire l'axe des z .

ESCARY.

1690 (1895, 35*). — En désignant par ψ la longitude du plan des deux normales (λ, μ, ν) , (λ', μ', ν') qui pivote autour de l'axe des z , démontrer qu'on a

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \mu} = \frac{\cos \psi}{\sin \psi}, \quad \frac{\cos \lambda'}{\cos \mu'} = \frac{\cos \psi'}{\sin \psi'}, \quad \frac{\cos \lambda}{\cos \mu} = \frac{\cos \lambda'}{\cos \mu'}.$$

ESCARY.

1691 (1895, 35*). — Conclure de ces équations $\psi' = \psi + \pi$ (Laplace) et les deux intégrales suivantes

$$\text{tang}^2 \theta \cos 2\psi = D^2, \quad \text{tang}^2 \theta' \cos 2\psi' = D'^2,$$

où θ et θ' sont des angles que font les rayons vecteurs r et r' avec l'axe des z , D et D' des constantes arbitraires.

ESCARY.

1692 (1895, 35*). — En posant

$$\frac{\cos \psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = \sqrt{\frac{1 + e^{2\omega}}{2}},$$

démontrer les formules suivantes :

$$\sin \theta = \cos \nu = \frac{D e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$\cos \theta = \sin \nu = \frac{1}{\sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$\cos \lambda = \frac{\sqrt{e^{2\omega} + 1}}{\sqrt{2} e^{\omega} \sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$\cos \mu = \frac{\sqrt{e^{2\omega} - 1}}{\sqrt{2} e^{\omega} \sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2 = \frac{D^2 e^{4\omega} (e^{2\omega} + D^2) d\omega^2}{(D^2 e^{2\omega} + 1)^2 (e^{4\omega} - 1)} = d\xi^2,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\xi^2,$$

$$d\sigma^2 = r^4 d\xi^2.$$

ESCARY.

1693 (1895, 36*). — Démontrer que la relation

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \mu} = \frac{\cos \lambda'}{\cos \mu'},$$

déduite des deux premières équations (B), entraîne les suivantes :

$$\omega' = \omega,$$

$$dt = \frac{m}{a} \frac{(D + D') e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}} r^2 d\xi = \frac{m'}{a} \frac{(D + D') e^{\omega'}}{\sqrt{D'^2 e^{2\omega'} + 1}} r'^2 d\xi',$$

$$r'^2 = \frac{m}{m'} \frac{D}{D'} \frac{D'^2 e^{2\omega} + 1}{D^2 e^{2\omega} + 1} r^2,$$

$$r^2 = \frac{m'}{m} \frac{D'}{D} \frac{D^2 e^{2\omega'} + 1}{D'^2 e^{2\omega'} + 1} r'^2,$$

$$\cos(\nu + \nu') = \frac{DD' e^{2\omega} - 1}{\sqrt{(D^2 e^{2\omega} + 1)(D'^2 e^{2\omega'} + 1)}}.$$

ESCARY.

1694 (1895, 36*). — Démontrer que, dans le cas de $D < D'$, on a l'inégalité

$$\frac{m'D'}{mD} > \frac{r^2}{r'^2} > \frac{m'D}{mD'};$$

et que, si l'on a

$$D > D',$$

la même inégalité a lieu dans un sens opposé. ESCARY.

1695 (1895, 37*). — Sachant qu'on a

$$r''^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos(\nu + \nu'),$$

et en posant

$$D^2 e^{2\omega} + 1 = P, \quad D'^2 e^{2\omega} + 1 = Q,$$

$$DD' \left(\frac{\sqrt{mD'} + \sqrt{m'D}}{\sqrt{m'D} - \sqrt{mD}} \right)^2 e^{2\omega} + 1 = S,$$

démontrer les relations suivantes ⁽¹⁾ :

$$r''^2 - \left(\sqrt{\frac{mD}{m'D'}} - 1 \right)^2 \frac{S}{P} r^2 = \left(\sqrt{\frac{m'D'}{mD}} - 1 \right)^2 \frac{S'}{P'} r'^2,$$

$$d\xi^2 = \frac{D'^2}{D^2} \frac{P^2}{Q^2} \frac{e^{2\omega} + D'^2}{e^{2\omega} + D^2} d\xi'^2,$$

$$d\xi^2 = \frac{D^2}{D'^2} \frac{P'}{Q'} \frac{e^{2\omega'} + D^2}{e^{2\omega'} + D'^2} d\xi'^2.$$

ESCARY.

1705 (1895, 39*). — Considérons un système focal donné comme l'ensemble de deux systèmes réciproques, et faisons tourner l'un de ces systèmes d'une demi-révolution autour d'une droite, assujettie à la seule condition de rencontrer à angle droit l'axe du système focal.

Démontrer que, dans cette nouvelle position, les deux systèmes sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde équilatère.

Si l'on désigne par c le paramètre des paraboles des sec-

(1) Plusieurs de ces formules semblent entachées d'erreurs. peut-être typographiques. En outre, on n'a pas défini P' , Q' , S' . En tous cas, on a reproduit exactement ici le texte de l'énoncé imprimé en 1895.

tions principales de ce parabolôïde, par r la distance d'un point quelconque du système focal à l'axe et par θ l'angle que fait le plan focal de ce point avec l'axe, on a

$$r \operatorname{tang} \theta = c.$$

G. TARRY.

1710 (1896, 56). — Une série de bougies, de compositions et de hauteurs différentes, sont posées verticalement sur une table et allumées au même instant. Démontrer: 1^o que généralement le centre de gravité du système formé par les bougies décrit une série d'arcs d'hyperboles successives; 2^o qu'à un instant quelconque l'hyperbole correspondante a une asymptote verticale qui passe par le centre de gravité primitif des parties consumées des bougies qui brûlent encore à l'instant considéré.

WALTON.

1715 (1896, 103). — On appelle *nombre de Möbius*, les nombres $\mu(n)$ définis de la manière suivante :

$$\mu(1) = 1.$$

$\mu(n) = 0$ quand n est divisible par un carré autre que l'unité.

$\mu(n) = +1$ quand n n'a que des facteurs premiers différents en nombre pair.

$\mu(n) = -1$ quand n n'a que des facteurs premiers différents en nombre impair.

Dans cet énoncé l'unité n'est pas comptée comme facteur. Montrer que la somme

$$\mu^2(1) + \mu^2(2) + \dots + \mu^2(n)$$

est égale à $\frac{6}{\pi^2} n + \delta$, expression où la valeur absolue de δ est inférieure à $3\sqrt{n}$.

J. FRANEL.

1721 (1896, 152). — Déterminer un polynôme entier du degré n , $f'_n(x)$, tel que le résidu de la fonction

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{m-1}}{1-x^m} \quad (m \text{ nombre entier positif})$$

relatif au point $x = 0$ soit égal à 0 quand m et n sont différents, et à l'unité quand $m = n$.

J. FRANEL.

1731 (1896, 295). — Soient n et $k \leq n$ deux nombres entiers positifs, et posons, en désignant par $E\left(\frac{n}{k}\right)$ le plus grand nombre qui ne dépasse pas $\frac{n}{k}$,

$$\frac{n}{k} = E\left(\frac{n}{k}\right) + \theta k,$$

en sorte que

$$0 \leq \theta k < 1.$$

Démontrer que l'expression

$$\sqrt[n]{(1-\theta_1)(1-\theta_2)(1-\theta_3)\dots(1-\theta_n)}$$

converge vers une limite déterminée pour $n = \infty$, limite qu'on peut exprimer par le produit infini

$$\prod_2^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

et dont la valeur numérique est

$$0,4545101352\dots$$

1738 (1896, 344). — Huit points étant donnés sur un plan, il existe 75 points tels qu'en les joignant aux huit points donnés, on obtienne des faisceaux en involution:

ED. DEWULF.

1747 (1896, 487). — On pose, a, b, a_0 étant trois quantités réelles,

$$a_n + b_n i = \frac{(a + bi + 2)(a + bi + 4)\dots(a + bi + 2n)}{(a + 2)(a + 3)\dots(a + n + 1)} a_0.$$

1° Démontrer que l'on a

$$(1) \quad a_{2p+1} - C_{2p+1}^1 a_{2p} + C_{2p+1}^2 a_{2p-1} - \dots + (-1)^{2p+1} a_0 \equiv 0,$$

$$(2) \quad b_{2p} - C_{2p}^1 b_{2p-1} + C_{2p}^2 b_{2p-2} - \dots + (-1)^{2p-1} b_1 \equiv 0.$$

tielle

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

s'obtienne en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par une constante arbitraire.

Les équations ainsi obtenues ont-elles des intégrales singulières ?

Nota. — On examinera plus particulièrement le cas où le polynôme $f(x, p)$ est du second degré en p .

On écartera les solutions du problème qui conduisent à une *équation de Clairaut*. C. BOURLET.

1761 (1897, 148). — Cinq droites quelconques sont données dans un plan. On mène une transversale par un point fixe et, sur cette droite, on prend un sixième point qui forme une involution avec les cinq points déterminés par les cinq droites données. Le lieu géométrique de ce sixième point, quand la transversale tourne autour de son pivot, se compose de cinq coniques. E. DEWULF.

1762 (1897, 148). — Les caractéristiques des plans tangents à un cône de la classe n forment une surface d'ordre $2n + 1$. E. DEWULF.

1763 (1897, 148). — Soient $C_n(x, y) = 0$, $C_m(x, y) = 0$ les équations de deux courbes d'ordres respectifs n et m . Si un point est commun à ces deux courbes et si son ordre de multiplicité est n' pour C_n et m' pour C_m , il appartient aussi à la courbe représentée par l'équation

$$\frac{\partial C_n}{\partial x} \frac{\partial C_m}{\partial y} - \frac{\partial C_n}{\partial y} \frac{\partial C_m}{\partial x} = 0,$$

et est multiple de l'ordre $m' + n' - 2$ pour cette courbe.

Donner une interprétation algébrique de ce théorème.

E. DEWULF.

1776 (1897, 387). — Soient $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme positive et $\varphi(h) = \sum' \frac{1}{f(x, y)}$, la somme étant

étendue à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées x et y , tels que

$$f(x, y) \text{ soit } < h.$$

On excepte, bien entendu, le système particulier $x = y = 0$, ce que nous indiquons en affectant le signe Σ d'un accent.

Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente indéfiniment.

J. FRANEL.

1777 (1897, 387). — Soient, plus généralement,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \Sigma a_{r,s} x_r x_s \quad \begin{matrix} (r = 1, 2, \dots, p) \\ (s = 1, 2, \dots, p) \end{matrix}$$

une forme positive des p variables x_1, \dots, x_p , $D = |(a_{rs})|$ son déterminant et

$$\varphi(h) = \sum' \frac{1}{|f(x_1, x_2, \dots, x_p)|^{\frac{p}{2}}}$$

la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières des variables (à l'exception du système $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$) satisfaisant à l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) < h.$$

Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{D} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente indéfiniment.

J. FRANEL.