

R. BRICARD

## Le principe de relativité

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 17  
(1917), p. 201-222

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1917\\_4\\_17\\_\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__201_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[T 1]

LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ (1);

PAR M. R. BRICARD.

---

INTRODUCTION

1. Le principe de Doppler-Fizeau, tel qu'il est ordinairement énoncé, implique la notion du mouvement absolu, ou tout au moins de mouvement par rapport à l'éther. L'application de ce principe devrait conduire à déceler de tels mouvements, par des expériences suffisamment délicates.

L'expérience célèbre de Michelson (1881-1887), instituée pour mettre en évidence l'influence du mouvement de la Terre sur la vitesse apparente de la lumière, a donné un résultat négatif. On a été conduit à penser qu'il en serait de même, de quelque manière qu'on variât l'expérience, et que les lois de la nature nous condamnent à ne connaître que des *mouvements*

---

(1) La plupart des Ouvrages sur la Relativité s'adressent à un public assez restreint, parce qu'ils font appel à des connaissances étendues en Physique mathématique.

Le travail suivant a été rédigé en vue d'intier le lecteur, peu familier avec cette dernière science, à l'une des conceptions modernes les plus intéressantes et les plus hardies. Comme le but poursuivi était avant tout d'introduire, le plus simplement possible, les notions, au premier abord déconcertantes, de la *contraction longitudinale* et du *temps local*, je me suis borné à l'étude de la Relativité dans l'espace à une dimension. On trouvera l'application des principes à l'espace à trois dimensions dans les Ouvrages spéciaux (les plus récents sont, je crois : *Relativity*, de A.-W. CONWAY, et *Le Principe de relativité*, de E.-M. LÉMERAY).

*relatifs* (de corps matériels). C'est en cela que consiste le *Principe de relativité*.

2. Pour préciser les hypothèses ou postulats, d'accord avec ce principe, qui ne conduisent à rien de moins qu'à modifier les notions fondamentales de durée et de longueur, nous imaginerons des *laboratoires*, réduits pour plus de simplicité à des droites orientées  $O_0x_0, O_1x_1, \dots$  toutes de même sens et glissant les unes sur les autres. A ces laboratoires sont attachés des observateurs  $A_0, A_1, \dots$  qui disposent de *règles* pour mesurer les longueurs et de *chronomètres* pour mesurer les durées. Chaque observateur possède une confiance absolue dans ses instruments, c'est-à-dire que, pour lui, ses règles ont des longueurs invariables et que des durées indiquées comme égales par ses chronomètres sont en effet telles. En outre, les instruments des divers laboratoires ont été réglés les uns sur les autres. Les observateurs ont pu le faire aux instants où leurs laboratoires se pénétraient mutuellement (le point  $O$  venant, par exemple, coïncider avec le point  $O_0$ ), et en suspendant leur mouvement relatif pendant un temps qu'on peut supposer aussi court qu'on veut. Ils ont alors vérifié qu'ils attribuaient bien 1 mètre à la même longueur et 1 seconde à la même durée.

Chacun des observateurs, *supposant son laboratoire absolument fixe*, peut évaluer, au moyen de ses instruments, les vitesses des autres laboratoires. Nous supposerons les circonstances telles que pour  $A_0$ , par exemple, les laboratoires  $A_1, \dots$  aient des vitesses *constantes*  $u, u_1, \dots$ . Nous énoncerons alors le postulat suivant :

*Dans ces conditions, les vitesses de  $A_0$ , mesurées*

par  $A, A_1, \dots$ , sont évaluées respectivement à  $-u, -u_1, \dots$  (avec les conventions de signe ordinaires).

Plus généralement, imaginons que les observateurs  $A_0$  et  $A$ , par exemple, instituent une expérience, conduisant à des mesures de longueurs et de durées, faites en partie dans le laboratoire  $O_0x_0$  et en partie dans le laboratoire  $Ox$ . En particulier, cette expérience peut être une mesure de la vitesse de la lumière. L'expérience, quelle qu'elle soit, sera ensuite répétée en échangeant les rôles des laboratoires, toutes les circonstances en restant d'ailleurs identiques. Aux longueurs et aux durées mesurées primitivement dans le laboratoire  $O_0x_0$  correspondent des longueurs et des durées mesurées dans le laboratoire  $Ox$ , et réciproquement. Cela posé, nous admettrons que :

*Toutes les évaluations correspondantes de durées et de longueurs sont identiques.*

C'est là le véritable postulat fondamental de la théorie de la relativité. Il comprend le premier. Il a aussi cette conséquence immédiate :

*Pour les observateurs  $A_0$  et  $A$ , et plus généralement pour tous les observateurs  $A_n$ , la vitesse de la lumière a la même valeur numérique.*

Pour simplifier les formules ultérieures, nous supposerons les unités de longueur et de temps tellement choisies, que cette valeur numérique soit égale à l'unité. Nous appellerons *seconde* l'unité de temps.

3. Des divers laboratoires nous en choisirons un,  $O_0x_0$  (observateur  $A_0$ ) dont nous dirons qu'il est en *repos absolu*. Les autres laboratoires seront dits *mo-*

*biles*. Nous appellerons *longueurs absolues* et *durées absolues* les valeurs numériques des longueurs et des durées mesurées par  $A_0$ . Les valeurs numériques des longueurs et des durées mesurées par  $A, A_1, \dots$  seront dites *relatives*. Autrement dit, des illusions de nature identique, mais contradictoires, qui ont cours dans les divers laboratoires, nous adopterons celle de  $A_0$ , pour la commodité du langage.

Cela posé, l'étude des conséquences logiques du postulat nous conduira aux conclusions suivantes :

1° La valeur relative d'une durée est toujours plus *faible* que sa valeur absolue. Autrement dit, les chronomètres des laboratoires mobiles sont nécessairement *ralentis* par le fait même de leur mouvement.

2° La valeur relative d'une longueur est toujours plus *forte* que sa valeur absolue. Autrement dit, les règles des laboratoires mobiles sont nécessairement *raccourcies* par le fait même de leur mouvement.

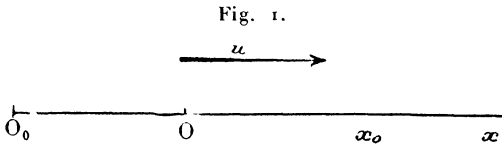
3° Le mouvement détruit jusqu'à la perception même de la simultanéité, en ce sens que deux phénomènes, se passant en des points différents et considérés comme simultanés par un observateur mobile, ne le sont pas en réalité.

#### I. — MESURE DU TEMPS; RALENTISSEMENT DES CHRONOMÈTRES MOBILES.

4. Pour établir le ralentissement des chronomètres mobiles, imaginons que les observateurs  $A_0$  et  $A$  fassent l'expérience suivante, qui n'est autre qu'une application du principe de Doppler-Fizeau (*fig. 1*) :

Les deux observateurs ont placé des chronomètres respectivement en  $O_0$  et  $O$ . Ces chronomètres ont été réglés l'un sur l'autre, comme il a été dit, et l'on peut

supposer qu'ils marquaient l'heure zéro quand le point  $O$  se trouvait en  $O_0$ .  $Ox$  étant en mouvement, l'observateur  $A_0$  émet du point  $O_0$  un signal lumineux



toutes les secondes. Ces signaux sont reçus en  $O$ , et l'observateur  $A$  note au moyen de son chronomètre l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives. L'expérience est ensuite répétée, en échangeant les rôles des deux observateurs. C'est-à-dire que  $A$  émet toutes les secondes un signal lumineux du point  $O$ . Ces signaux sont reçus en  $O_0$  et  $A_0$  note l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives.

Il faut, d'après le postulat fondamental de la relativité, que les intervalles de temps mesurés par les deux observateurs soient égaux. Or, nous allons voir qu'il n'en serait pas ainsi, si les marches des deux chronomètres restaient identiques, comme on le suppose dans les théories ordinaires.

En effet, supposons que l'observateur  $A_0$  émette du point  $O_0$  un signal à l'instant  $t$ . Soit  $x$  l'instant auquel ce signal est reçu en  $O$ . A cet instant, on a, en appelant toujours  $u$  la vitesse du laboratoire  $Ox$ ,

$$O_0O = ux.$$

La lumière a franchi cette distance dans le temps  $x - t$ . On a donc (on rappelle que la vitesse de la lumière est égale à l'unité)

$$x - t = ux,$$

d'où

$$x = \frac{t}{1-u}.$$

Un nouveau signal émis à l'heure  $t + 1$  sera reçu à l'heure

$$x' = \frac{t+1}{1-u},$$

et l'on a

$$(1) \quad x' - x = \frac{1}{1-u}.$$

Telle est la valeur de l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives en  $O$ .

D'autre part, un signal émis du point  $O$  à l'instant  $t$  doit franchir la distance  $ut$  pour arriver en  $O_0$ . Il arrive donc à l'instant

$$y = t + ut = (1+u)t.$$

Un signal émis à l'instant  $t + 1$  arrive à l'instant

$$y' = (1+u)(t+1);$$

L'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives en  $O_0$  est donc égal à

$$(2) \quad y' - y = 1 + u.$$

L'intervalle (2) est plus petit que l'intervalle (1). On a en effet

$$0 < 1 - u^2 < 1 \quad (1),$$

(1) La première de ces inégalités implique que la vitesse du point  $O$  est plus petite que la vitesse de la lumière. En effet, si l'on avait  $u \geq 1$ , les signaux émis par  $O_0$  n'arriveraient jamais au point  $O$ , tandis que les signaux émis par  $O$  continueraient à arriver au point  $O_0$  en des temps finis. La dissymétrie de l'expérience serait incompatible avec le postulat.

Ainsi, nous pouvons noter cette conséquence du principe :

*Aucune vitesse matérielle ne peut atteindre celle de la lumière.*

d'où

$$1 + u < \frac{1}{1 - u}.$$

Nous sommes en contradiction avec le postulat. On ne voit qu'une manière de rétablir l'accord : il faut que, par le fait du mouvement, le chronomètre placé en O se soit *ralenti*, de telle manière que l'observateur A attribue aux intervalles de temps (2) la même valeur que l'observateur A<sub>0</sub> aux intervalles (1), bien que les premiers soient plus longs.

5. Cherchons la loi de ce ralentissement. Appelons  $\lambda$  la valeur absolue d'une seconde relative, marquée par le chronomètre O. Il faut calculer  $\lambda$ .

En premier lieu, la formule (1) donne la valeur absolue de l'intervalle de temps mesuré par A. Cet observateur attribuera à ce même intervalle la valeur

$$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - u}.$$

En second lieu, A, croyant émettre des signaux toutes les secondes, les émet en réalité toutes les  $\lambda$  secondes. L'intervalle de temps mesuré par A<sub>0</sub> est donc donné par le second membre de la formule (2), multiplié par  $\lambda$ , et il est égal à

$$\lambda(1 + u).$$

Il faut que les deux valeurs que nous venons d'écrire soient égales. On a par suite

$$\lambda(1 + u) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - u},$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}.$$



Telle est la loi du ralentissement. On lui donne une forme se prêtant mieux aux calculs ultérieurs en introduisant les fonctions hyperboliques.

Posons

$$(3) \quad \text{th } \varphi = u.$$

Nous dirons que le nombre bien déterminé  $\varphi$  est l'argument hyperbolique de la vitesse  $u$ . On en tire

$$(4) \quad \lambda = \text{ch } \varphi.$$

*Ainsi, un chronomètre en mouvement se ralentit nécessairement, de telle sorte que la valeur absolue d'une seconde marquée par lui soit égale à  $\text{ch } \varphi$ ,  $\varphi$  étant l'argument hyperbolique de la vitesse de ce chronomètre.*

On peut dire aussi que, si  $t$  et  $t_0$  sont les valeurs attribuées à une même durée par l'observateur  $A$  et par l'observateur  $A_0$ , on a

$$t = \frac{t_0}{\text{ch } \varphi}.$$

**6. Remarque.** — Au point de vue de  $A_0$ , le chronomètre de  $A$  marche trop lentement. Le postulat exige alors qu'au point de vue de  $A$ , le chronomètre de  $A_0$  marche aussi trop lentement. Il y a là une contradiction apparente qui sera élucidée plus tard.

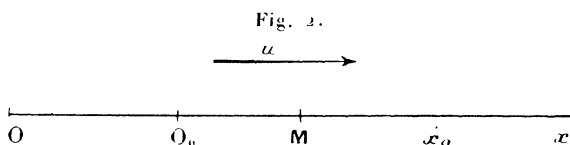
**7. Exercice.** -- Imaginons que deux observateurs mobiles,  $A$  et  $A_1$ , fassent l'expérience suivante : leurs chronomètres étant réglés tous deux sur celui de  $A_0$ , chacun d'eux convient d'émettre un signal lumineux à l'instant  $t$  marqué par son chronomètre. Vérifier que chacun des deux observateurs lit bien la même heure  $t_1$

sur son chronomètre, au moment où il reçoit le signal de l'autre.

## II. — MESURE DES LONGUEURS; CONTRACTION LONGITUDINALE.

8. Le raccourcissement des règles mobiles (et en général de tous les segments entraînés avec le laboratoire  $Ox$ ) est une conséquence nécessaire du ralentissement des chronomètres.

Considérons, en effet, un point  $M$  (*fig. 2*) entraîné



avec le laboratoire  $Ox$ , et imaginons que l'observateur  $A$  fasse l'expérience suivante. En  $M$  il place un miroir pouvant réfléchir en  $O$  la lumière émanée de ce point. Soit  $x$  la longueur *qu'il attribue* au segment  $OM$ .  $A$  émet un signal lumineux au point  $O$ , où se trouve placé un chronomètre, et mesure avec cet instrument le temps  $t$  nécessaire à la lumière pour faire le trajet  $OM + MO$ . Puisque pour tout observateur la vitesse de la lumière est égale à 1, on doit avoir

$$t = 2x.$$

Évaluons, d'autre part, le temps absolu  $t_0$  nécessaire à la lumière pour faire ce double trajet. Pour  $A$ , tout se passe comme si la lumière allait de  $O$  en  $M$  avec la vitesse  $1 - u$  et de  $M$  en  $O$  avec la vitesse  $1 + u$ . Si donc  $x_0$  est la longueur absolue de  $OM$ , on a

$$t_0 = x_0 \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) = \frac{2x_0}{1-u^2} = 2x_0 \operatorname{ch}^2 \varphi.$$

Mais  $t$  et  $t_0$  sont les mesures d'une même durée, faites respectivement par A et par  $A_0$ . On a donc (n° 5)

$$t = \frac{t_0}{\text{ch } \varphi},$$

d'où

$$x = x_0 \text{ ch } \varphi, \quad x_0 = \frac{x}{\text{ch } \varphi}.$$

*Ainsi la longueur absolue d'un segment mobile est égale à sa longueur relative réduite dans le rapport de  $\text{ch } \varphi$  à 1. Cela exige que la règle avec laquelle A mesure cette longueur se soit réduite, par le fait du mouvement, dans le même rapport.*

On donne à ce phénomène le nom de *contraction longitudinale*.

9. Ce résultat donne lieu à une contradiction apparente, semblable à celle que nous avons signalée à propos des mesures de durée : au point de vue de  $A_0$ , les règles de A se sont réduites de longueur. Il faut donc qu'au point de vue de A, les règles de  $A_0$  se soient également réduites. Cette contradiction sera élucidée en même temps que l'autre.

### III. — LE TEMPS LOCAL.

10. Jusqu'à présent, nous avons supposé l'observateur A en possession d'un seul chronomètre, placé en O. Imaginons maintenant qu'il en place un autre en un point M, d'abscisse relative  $x$  (*fig. 2*). Comment s'y prendra-t-il pour le mettre à l'heure sur le premier?

*Réponse* : De telle manière que la vitesse de la lumière lui paraisse égale à 1. Si donc il émet un

signal lumineux du point M, à l'instant où le chronomètre placé en ce point marque  $t$ , ce signal doit atteindre le point O à l'instant où le chronomètre de ce point marque  $t + x$ .

Proposons-nous le problème suivant : *Quelle est l'heure absolue  $t_0$  à l'instant où le chronomètre placé en M marque  $t$ ?*

Nous supposons toujours que le point O est passé en  $O_0$  à l'heure zéro, et qu'à cet instant le chronomètre O marquait également zéro.

La longueur absolue du segment OM est  $\frac{x}{\text{ch } \varphi}$ . Pour l'observateur  $A_0$ , la lumière franchit cette distance avec la vitesse  $1 + u$ . Elle atteint donc le point O à l'heure absolue

$$t_0 + \frac{x}{\text{ch } \varphi(1 + u)} = t_0 + \frac{x}{\text{ch } \varphi(1 + \text{th } \varphi)} = t_0 + \frac{x}{\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi}.$$

Mais, à cet instant, au point O, l'heure relative est égale à l'heure absolue divisée par  $\text{ch } \varphi$ . Cette heure doit d'autre part, comme on l'a dit, être égale à  $t + x$ . On a donc

$$\text{ch } \varphi(t + x) = t_0 + \frac{x}{\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi},$$

d'où

$$t_0 = \left( \text{ch } \varphi - \frac{1}{\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi} \right) x + \text{ch } \varphi t.$$

Le coefficient de  $x$  se réduit à

$$\frac{\text{ch}^2 \varphi + \text{ch } \varphi \text{sh } \varphi - 1}{\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi} = \frac{\text{sh}^2 \varphi + \text{ch } \varphi \text{sh } \varphi}{\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi} = \text{sh } \varphi.$$

Donc finalement

$$(5) \quad t_0 = \text{sh } \varphi x + \text{ch } \varphi t.$$

La formule (5) établit donc le résultat signalé au

n° 3 : deux phénomènes ayant lieu en des points différents et considérés par A comme simultanés ne le sont pas en réalité (c'est-à-dire pour  $A_0$ ). En effet  $t_0$  dépend non seulement de  $t$ , mais de  $x$ .

On dit que  $t$  est l'heure locale au point M.

#### IV. — FORMULES FONDAMENTALES.

11. Les formules fondamentales dont il s'agit établissent les relations entre les *coordonnées relatives* et les *coordonnées absolues* d'un phénomène. Voici ce qu'il faut entendre par là :

Tout phénomène instantané ayant lieu au point M est caractérisé, pour l'observateur A, par l'abscisse  $x$  (relative, bien entendu) du point M et par l'heure locale  $t$  à laquelle se produit le phénomène.

Cette abscisse et cette heure locale sont les *coordonnées relatives* du point M.

Le phénomène a, pour  $A_0$ , deux coordonnées absolues, qui sont l'abscisse absolue  $x_0$  du point M et l'heure absolue  $t_0$  à laquelle se produit le phénomène.

Proposons-nous de calculer  $x_0$  et  $t_0$ , connaissant  $x$  et  $t$ .

Le problème a déjà été résolu pour  $t_0$  [formule (5)].

Pour avoir  $x_0$ , il suffit d'écrire que

long. abs. de  $O_0M$  = long. abs. de  $O_0O$  + long. abs. de  $OM$ .

Mais

$$\text{long. abs. de } O_0M = x_0,$$

$$\text{long. abs. de } O_0O = ut_0 = \text{th } \varphi t_0,$$

$$\text{long. abs. de } OM = \frac{x}{\text{ch } \varphi}.$$

Donc

$$(6) \quad x_0 = \text{th } \varphi t_0 + \frac{x}{\text{ch } \varphi},$$

ou, d'après la formule (5),

$$x_0 = \text{th } \varphi (\text{sh } \varphi x + \text{ch } \varphi t) + \frac{x}{\text{ch } \varphi} = \frac{\text{sh}^2 \varphi + 1}{\text{ch } \varphi} x + \text{sh } \varphi t$$

et, finalement,

$$x_0 = \text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi t.$$

Telle est la seconde des formules fondamentales que nous voulions obtenir. Récrivons-les :

$$(7) \quad x_0 = \text{ch } \varphi x + \text{sh } \varphi t,$$

$$(8) \quad t_0 = \text{sh } \varphi x + \text{ch } \varphi t.$$

On les résout immédiatement en  $x$  et  $t$ , en tenant compte de ce que

$$\text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = 1.$$

Il vient ainsi

$$(9) \quad x = \text{ch } \varphi x_0 - \text{sh } \varphi t_0,$$

$$(10) \quad t = -\text{sh } \varphi x_0 + \text{ch } \varphi t_0.$$

On voit qu'on passe des formules (7) et (8) aux formules (9) et (10) en permutant  $x$  et  $x_0$ ,  $t$  et  $t_0$ , et en changeant  $\varphi$  en  $-\varphi$ . C'est bien ce qu'exige le principe de relativité.

**12. Remarque.** — On pouvait arriver plus rapidement aux formules fondamentales. Comme on l'a vu, on peut écrire immédiatement la formule (6), qui n'est autre que la formule (9). L'application du postulat fondamental conduit alors à la formule (7), et les formules (8) et (10) résultent des deux précédentes par des combinaisons simples. Mais on perd peut-être ainsi en clarté ce qu'on gagne en concision.

**13. Application.** — Il est maintenant facile d'éclaircir les paradoxes signalés au n° 6 et au n° 9.

1° Si  $A_0$  observe constamment le chronomètre mo-

bile placé en O, et A, le chronomètre fixe placé en O<sub>0</sub>, chacun des observateurs estimera que le chronomètre de l'autre retarde.

En effet, faisons dans la formule (8)  $x = 0$ . Il vient

$$t_0 = \text{ch } \varphi t, \quad \text{d'où} \quad t_0 > t.$$

Donc le chronomètre placé en O est en retard, au point de vue de A<sub>0</sub>. Faisons maintenant  $x_0 = 0$  dans la formule (10). Il vient

$$t = \text{ch } \varphi t_0, \quad \text{d'où} \quad t > t_0.$$

Ainsi A<sub>0</sub> arrive bien à une constatation semblable. La contradiction apparente s'explique, quand on a bien saisi la notion du temps local. A a raisonné comme si le chronomètre placé en O et celui qu'à un certain moment il place en O<sub>0</sub> pour comparer celui de A<sub>0</sub> étaient d'accord : aux yeux de A<sub>0</sub>, il se trompe. Celui-ci, d'ailleurs, commet exactement la même erreur aux yeux de A.

Les égalités précédentes paraissent incompatibles, à cause d'un simple vice de notation :  $t$  et  $t_0$  n'y ont pas les mêmes valeurs.

2° Imaginons maintenant que A<sub>0</sub> et A possèdent deux règles auxquelles ils attribuent la même longueur  $l$ . Je dis que chacun des observateurs trouvera la règle de l'autre plus courte que la sienne.

Soient, en effet, M et M' les extrémités de la règle mobile,  $x$  et  $x'$  leurs abscisses relatives. On a par hypothèse

$$x' - x = l.$$

Pour apprécier la longueur absolue de cette règle, A<sub>0</sub> notera les abscisses absolues  $x_0$  et  $x'_0$  de ses deux extrémités à un même instant  $t_0$ . Il écrira alors, en

vertu de la formule (9),

$$x' = \text{ch } \varphi x'_0 - \text{sh } \varphi t_0,$$

$$x = \text{ch } \varphi x_0 - \text{sh } \varphi t_0,$$

d'où, par soustraction,

$$x'_0 - x_0 = \frac{x' - x}{\text{ch } \varphi} = \frac{l}{\text{ch } \varphi}.$$

Donc pour  $A_0$ , la règle mobile a une longueur inférieure à  $l$ .

De même, la règle fixe a des extrémités dont les abscisses absolues  $\xi_0$  et  $\xi'_0$  satisfont à l'égalité

$$\xi'_0 - \xi_0 = l.$$

Pour en mesurer la longueur, A notera les abscisses relatives  $\xi$  et  $\xi'$  de ses extrémités, quand les heures locales en ces points ont une même valeur  $\theta$ . Il obtient alors, par application de la formule (7),

$$\xi'_0 = \text{ch } \varphi \xi' + \text{sh } \varphi \theta,$$

$$\xi_0 = \text{ch } \varphi \xi + \text{sh } \varphi \theta,$$

d'où

$$\xi' - \xi = \frac{\xi'_0 - \xi_0}{\text{ch } \varphi} = \frac{l}{\text{ch } \varphi},$$

et il aboutit à la même conclusion que  $A_0$ .

La contradiction apparente s'explique toujours de la même manière : A a cru noter sur une échelle divisée les passages *simultanés* de deux points, alors qu'en réalité ces passages étaient *successifs*.

## V. — FORMULES FONDAMENTALES DE CINÉMATIQUE.

14. Soit M un point mobile par rapport au laboratoire  $Ox$ . Son mouvement sera défini par une relation

$$x = f(t)$$



entre ses coordonnées, abscisse relative et heure locale.

Les formules de transformation (9) et (10) permettent d'obtenir l'équation du mouvement absolu de ce point.

La vitesse et l'accélération relatives du point M seront définies par les expressions ordinaires  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{d^2x}{dt^2}$ .

Les vitesse et accélération absolues seront de même  $\frac{dx_0}{dt_0}$  et  $\frac{d^2x_0}{dt_0^2}$ .

15. *Composition des vitesses.* — On peut mettre sous une forme simple la relation qui existe entre la vitesse relative et la vitesse absolue d'un point.

Posons à cet effet

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = \text{th } \theta,$$

$$(12) \quad \frac{dx_0}{dt_0} = \text{th } \theta_0,$$

$\theta$  et  $\theta_0$  étant les arguments hyperboliques de ces deux vitesses. On a, en différenciant les relations (7) et (8),

$$(13) \quad dx_0 = \text{ch } \varphi dx + \text{sh } \varphi dt,$$

$$(14) \quad dt_0 = \text{sh } \varphi dx + \text{ch } \varphi dt$$

(en n'oubliant pas que  $\varphi$  est une constante); donc

$$\frac{dx_0}{dt_0} = \frac{\text{ch } \varphi dx + \text{sh } \varphi dt}{\text{sh } \varphi dx + \text{ch } \varphi dt} = \frac{\text{ch } \varphi \frac{dx}{dt} + \text{sh } \varphi}{\text{sh } \varphi \frac{dx}{dt} + \text{ch } \varphi},$$

et, en introduisant  $\theta$  et  $\theta_0$ ,

$$(15) \quad \text{th } \theta_0 = \frac{\text{th } \theta + \text{th } \varphi}{1 + \text{th } \varphi \text{th } \theta} = \text{th}(\theta + \varphi),$$

d'où

$$(16) \quad \theta_0 = \theta + \varphi.$$

Ainsi, l'argument hyperbolique de la vitesse absolue est égal à l'argument hyperbolique de la vitesse relative augmenté de celui de la vitesse d'entraînement du laboratoire  $Ox$ .

On voit donc que la composition des vitesses (sur une droite) s'exprime par la formule d'addition des tangentes hyperboliques (1).

16. *Accélération relative et accélération absolue.* — Pour calculer la seconde, connaissant la première, nous tirons d'abord de la relation (14)

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{dt_0}{dt} &= \operatorname{sh} \varphi \frac{dx}{dt} + \operatorname{ch} \varphi = \operatorname{sh} \varphi \operatorname{th} \theta + \operatorname{ch} \varphi \\ &= \frac{\operatorname{ch}(\theta + \varphi)}{\operatorname{ch} \theta} = \frac{\operatorname{ch} \theta_0}{\operatorname{ch} \theta}. \end{aligned}$$

On a ensuite, en dérivant les relations (11) et (12), la première par rapport à  $t$ , la seconde par rapport à  $t_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}, \\ \frac{d^2 x_0}{dt_0^2} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \theta_0} \frac{d\theta_0}{dt_0} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \theta_0} \frac{d\theta_0}{dt} \frac{dt}{dt_0}; \end{aligned}$$

d'où, en vertu de la formule (17),

$$\frac{d^2 x_0}{dt_0^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \theta_0} \frac{d\theta_0}{dt} \operatorname{ch} \theta.$$

Mais il résulte de la formule (16) qu'on a

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.$$

On trouve donc, en divisant les deux expressions

(1) La formule (16) montre que, si  $\theta$  est constant,  $\theta_0$  l'est également. Aussi un mouvement uniforme pour  $A$  l'est aussi pour  $A_0$ .

trouvées pour  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  et  $\frac{d^2 x_0}{dt_0^2}$ ,

$$\frac{\frac{d^2 x}{dt^2}}{\frac{d^2 x_0}{dt_0^2}} = \frac{\text{ch}^3 \theta_0}{\text{ch}^3 \theta},$$

ce qu'on peut écrire

$$(18) \quad \text{ch}^3 \theta_0 \frac{d^2 x_0}{dt_0^2} = \text{ch}^3 \theta \frac{d^2 x}{dt^2},$$

formule qui résout le problème.

#### VI. — DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ.

17. Il est clair que les hypothèses de la dynamique ordinaire sont incompatibles avec le principe de relativité. Il suffit pour le faire voir de remarquer que ces hypothèses, appliquées à l'étude du mouvement d'un point soumis à une force de grandeur constante, conduisent à prévoir que la vitesse de ce point croîtra sans limite, et arrivera par conséquent à dépasser la vitesse de la lumière, ce qui est inadmissible.

Il faut donc modifier ces hypothèses de manière à les mettre en harmonie avec le principe (1).

La première hypothèse de la dynamique classique est qu'un point matériel qui n'est soumis à aucune force est animé, dans le cas le plus général, d'un mouvement uniforme. Nous pouvons conserver cette hypothèse. On a vu en effet qu'un mouvement uniforme pour A l'est aussi pour A<sub>0</sub> (n° 15, note). Par conséquent, A et A<sub>0</sub> estimeront dans le même cas qu'un

---

(1) Rappelons que nous nous bornons à étudier les phénomènes qui se passent sur une droite.

point matériel n'est soumis à aucune force, ce qui est bien conforme au principe de relativité.

Si un point matériel est animé d'un mouvement varié, A estimera que ce point est soumis à une force. En dynamique classique, cette force est par définition  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  étant l'accélération du point, *m étant un coefficient qui ne dépend que du point matériel et non de sa vitesse (sa masse)*.

C'est ici que la nouvelle dynamique est obligée de se séparer de la dynamique classique, en adoptant une hypothèse plus générale. Étant donné un point matériel dont l'accélération à un certain instant est  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , la force qui lui communique cette accélération aura toujours pour expression  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ , mais on admettra que le coefficient *m*, au lieu d'être constant, *sera une certaine fonction de la vitesse du point à l'instant considéré*.

Autrement dit : la masse d'un point matériel, au lieu d'être constante, est une fonction de sa vitesse.

Avant de préciser la nature de cette fonction, on voit qu'elle doit être croissante avec la vitesse et tendre vers l'infini quand la vitesse du point matériel tend vers la vitesse de la lumière. C'est à cette condition que les lois de la nouvelle dynamique s'opposeront à ce que la vitesse d'un point matériel puisse atteindre celle de la lumière.

18. Nous déterminerons la forme de *m* par la condition suivante, d'accord avec le principe de relativité : *il faut que la valeur numérique attribuée à la force qui produit un mouvement donné soit la même pour l'observateur A et l'observateur A<sub>0</sub>, et cela, quelle*

que soit la vitesse  $u$  d'entraînement du laboratoire  $Ox$  (ou quel que soit l'argument hyperbolique  $\varphi$  de cette vitesse).

On peut poser  $m = f(\theta)$ . Telle est la valeur de la masse du point  $M$  pour l'observateur  $A$ . Pour l'observateur  $A_0$ , cette masse a la valeur  $f(\theta_0)$ . On doit avoir

$$f(\theta) \frac{d^2 x}{dt^2} = f(\theta_0) \frac{d^2 x_0}{dt_0^2}.$$

Mais on a trouvé [équation (18)]

$$\text{ch}^3 \theta \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{ch}^3 \theta_0 \frac{d^2 x_0}{dt_0^2},$$

d'où

$$\frac{f(\theta)}{\text{ch}^3 \theta} = \frac{f(\theta_0)}{\text{ch}^3 \theta_0}.$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient  $\theta$  et  $\varphi$ , c'est-à-dire quels que soient  $\theta$  et  $\theta_0 = \varphi + \theta$ . Par conséquent, la valeur commune des deux membres de la relation précédente doit être une constante absolue  $m_0$ .

Ainsi

$$(19) \quad m = f(\theta) = m_0 \text{ch}^3 \theta;$$

$m_0$  est la masse du point pour une vitesse nulle, c'est-à-dire la *masse statique*.

Si l'on veut introduire explicitement la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \text{th} \theta,$$

on écrira

$$m = m_0 \left( \frac{1}{1 - \text{th}^2 \theta} \right)^{\frac{3}{2}} = m_0 \left[ 1 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Ainsi la masse d'un point matériel mobile est proportionnelle à la puissance d'exposant  $-\frac{3}{2}$  de l'expres-

sion  $1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ . On voit bien qu'elle devient infinie pour  $\frac{dx}{dt} = 1$ .

On donne à  $m$  le nom de *masse longitudinale*, la dynamique d'un milieu à deux ou trois dimensions obligeant à considérer une autre masse, la *masse transversale*, dont la valeur est différente.

En résumé, l'équation fondamentale de la dynamique sur une droite  $Ox$  est la suivante :

$$(20) \quad m_0 \operatorname{ch}^3 \theta \frac{d^2 x}{dt^2} = F.$$

Mais, comme on l'a déjà écrit,

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = \operatorname{th} \theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

On peut donc écrire l'équation (20)

$$(21) \quad m_0 \operatorname{ch} \theta \frac{d\theta}{dt} = F.$$

19. Comme application, traitons le mouvement d'un point matériel soumis à une force d'intensité constante. Il faut intégrer les équations (21) et (11), où  $F$  est une constante. Nous supposons que le point mobile part du point  $O$  au temps zéro avec une vitesse nulle.

L'équation (21) s'écrit

$$m_0 \operatorname{ch} \theta d\theta = F dt.$$

Intégrons en tenant compte des conditions à l'origine. Il vient

$$m_0 \operatorname{sh} \theta = Ft,$$

d'où

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{F}{m_0} t, \quad \operatorname{th} \theta = \frac{\frac{F}{m_0} t}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2} t^2}}.$$

L'équation (11) donne alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{F}{m_0} t}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2} t^2}},$$

d'où

$$x = \int_0^t \frac{\frac{F}{m_0} t dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2} t^2}} = \frac{m_0}{F} \left( \sqrt{1 + \frac{F^2}{m_0^2} t^2} - 1 \right).$$

Telle est l'équation du mouvement. Quand  $t$  augmente indéfiniment,  $x$  augmente indéfiniment et  $\frac{dx}{dt}$  tend vers 1.