

PICARDAT

La courbe orthoptique de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17
(1917), p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[L'17e]

LA COURBE ORTHOPTIQUE DE DEUX CONIQUES ;

PAR M. PICARDAT,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.

I. — ÉTUDE GÉNÉRALE.

1. DEGRÉ. — Soient deux coniques S et S' sans particularité de forme ni de position; soit C la courbe orthoptique; pour avoir son degré, cherchons le nombre de points d'intersection avec une droite quelconque Δ du plan; menons une tangente T à S qui coupe Δ en t et par t la perpendiculaire T_1 à T ; le point A appartiendra à l'orthoptique c si T_1 est tangente à S' . Or si T varie en restant tangente à S , T_1 varie et enveloppe une courbe (E) et les tangentes communes à E et S' couperont Δ aux points cherchés; leur nombre sera donc le double de la classe de E . Pour avoir la classe de E cherchons le nombre de droites T_1 passant par un point quelconque du plan a ; les droites T_1 passant par a seront obtenues en joignant ce point aux points d'intersection de Δ avec la podaire de S prise par rapport à a ; le nombre de ces

points est 4 et par suite l'orthoptique C est de degré 8.

Remarque. — La courbe C est tangente à S en huit points, car la développée de S et S' ont huit tangentes communes. De même pour S'.

2. POINTS CYCLIQUES I ET J. — Si l'on mène de I une tangente à S et une tangente à S', ces deux droites isotropes sont rectangulaires, donc I fait partie du lieu C; de plus les deux tangentes à S issues de I peuvent se combiner aux deux tangentes à S' issues de I de quatre façons; donc les points cycliques I et J sont points quadruples de C.

Foyers singuliers. — Soit M un point de la courbe C intersection de la droite T, tangente à S en θ , et de la perpendiculaire T' tangente à S' en θ' ; la normale à la courbe C au point M passe au milieu de $\theta\theta'$ (théorie du centre instantané, par exemple). Soient F, φ les foyers réels de S; F', φ' ceux de S'. Les deux tangentes FI et F'I fournissent le point I de C et la tangente à C correspondante coïncide avec la normale et est équidistante de FI et F'I; elle passe donc par le milieu f_1 de FF'; donc :

La courbe C possède quatre foyers singuliers réels f_1, f_2, f_3, f_4 qui sont les milieux des segments obtenus en joignant les foyers de S à ceux de S'.

Ces quatre points sont donc les sommets d'un parallélogramme ayant pour côtés c et c' ; ces côtés étant parallèles aux axes focaux des deux coniques (c et c' désignant les demi-distances focales).

Remarquons de suite que deux foyers singuliers peuvent se confondre :

1° Deux sommets adjacents f_1, f_2 du parallélogramme sont confondus; les deux autres f_3, f_4 sont alors confondus; l'une des coniques est un cercle; en prenant pour Δ une droite isotrope, on trouve pour E une conique et l'on voit que, en I et en J, la courbe C possède un double rebroussement (points bicuspidaux à tangentes distinctes).

2° Deux sommets opposés f_1, f_3 , par exemple, se confondent; alors les axes focaux des deux coniques sont parallèles et les distances focales égales. Ici la courbe possède en I et en J un contact avec elle-même (tacnode et deux autres branches en chaque point).

3° Les deux cas précédents peuvent être réunis; on a deux cercles pour S et S'; ce cas sera examiné plus loin.

3. POINTS DOUBLES. — Un point M du plan sera point double de C si les deux tangentes à S issues de M sont perpendiculaires aux deux tangentes à S' issues du même point, car on a en M en général deux tangentes distinctes pour la courbe C.

L'angle des tangentes à S issues de M a alors même bissectrice que l'angle des tangentes à S' issues de M; les tangentes issues de M aux coniques du faisceau tangentiel [S, S'] forment donc une involution de rayons doubles rectangulaires; les droites isotropes issues de M forment alors un couple de l'involution et M est le foyer d'une conique du faisceau [S, S']; réciproquement tout point de C foyer d'une conique du faisceau [S, S'] est point double de C. Or le lieu des foyers des coniques d'un faisceau tangentiel est une cubique circulaire Γ ; elle coupe C en 24 points dont 8 aux points I et J; il en reste 16 à distance finie; or chacun est compté deux fois, donc on a 8 points.

La courbe (C) possède en général huit points doubles à distance finie situés sur une cubique circulaire (contenant son foyer singulier) passant par les foyers et les ombilics de S et S'.

Ces résultats montrent donc que la courbe C est en général de genre égal à 1.

Nous allons examiner maintenant les cas où le genre et le degré de C peuvent diminuer selon la nature et la position de S et S'.

4. APPARITION D'UN NEUVIÈME ET D'UN DIXIÈME POINT DOUBLE. — La courbe C peut-elle posséder plus de huit points doubles et devenir unicursale? La réponse nous sera fournie de la manière suivante : tout point double M de C relatif aux deux tangentes issues de M à S et S' est fourni par la courbe Γ ; un nouveau point double doit résulter d'une seule tangente à S perpendiculaire à une seule tangente à S'; ceci ne peut se produire que si ces deux tangentes sont des asymptotes; supposons donc une asymptote A de S perpendiculaire à une asymptote A' de S'; ces deux droites se coupent en a et l'on voit facilement que la courbe C possède quatre points infiniment voisins de a relatifs à deux branches de courbes issues de a ; donc :

Si une asymptote de S est perpendiculaire à une asymptote de S', l'intersection de ces deux droites est un point double de C qui devient unicursale.

Au point de vue de coniques réelles ce cas ne peut se présenter que pour deux hyperboles.

On conclut de suite que : *si les asymptotes de S sont perpendiculaires aux asymptotes de S', la courbe C possède deux nouveaux points doubles et se décompose.*

La condition de perpendicularité des asymptotes s'exprime encore par le fait que les deux coniques sont semblables, les axes correspondants étant rectangulaires. Ce cas se traite immédiatement : les deux coniques S et S' possèdent alors deux centres de similitude σ et σ' ; soit T une tangente à S ; il lui correspond une perpendiculaire T' tangente à S' , relativement au centre σ et le point d'intersection de T et T' décrit la podaire d'une conique semblable à S et S' par rapport à σ , donc :

Si les deux coniques S et S' sont semblables, les axes correspondants étant rectangulaires, l'orthoptique C se décompose en deux podaires de coniques semblables à S et S' et de points doubles σ et σ' centres de similitude.

Remarquons que le cas de deux cercles rentre dans celui-ci.

5. ABAISSEMENT DU DEGRÉ DE C . — Ce fait peut être dû aux deux causes suivantes :

1° Une droite perpendiculaire à elle-même est tangente à S et S' ; alors elle fait partie de C ; au point de vue réel, c'est le cas de deux coniques ayant un foyer commun ;

2° Une tangente à S' est perpendiculaire à toutes les tangentes de S ; c'est-à-dire S' est une parabole et la tangente singulière, c'est-à-dire la droite de l'infini, compte double pour C .

6. ÉTUDE DE LA CUBIQUE CIRCULAIRE Γ . — Je signalerai simplement les résultats classiques relatifs à Γ pour la disposition des points doubles de C .

1° Le quadrilatère des tangentes communes à S et S' est circonscrit à un cercle : *la cubique Γ a un point double au centre du cercle.*

2° Le quadrilatère des tangentes communes est circonscrit à deux cercles ; dans ce cas S et S' ont un axe commun, Γ a deux points doubles, c'est-à-dire : *la cubique Γ se décompose en cet axe et un cercle l'admettant comme diamètre.*

3° Le quadrilatère des tangentes communes renferme une droite isotrope et par suite, à cause de la réalité, S et S' ont un foyer commun ; *la cubique Γ se réduit à une droite à distance finie (+ deux droites isotropes).*

4° Le quadrilatère des tangentes communes est un parallélogramme ; S et S' sont concentriques : *la cubique Γ se réduit à une hyperbole équilatère (+ la droite de l'infini).*

5° Le quadrilatère des tangentes communes est un losange, S et S' sont coaxiales : *la cubique Γ se réduit à deux droites perpendiculaires (+ la droite de l'infini).*

6° Le quadrilatère des tangentes communes renferme la droite de l'infini ; S et S' sont deux paraboles : *la cubique Γ se réduit à un cercle (+ la droite de l'infini).*

7° Le quadrilatère des tangentes communes renferme la droite de l'infini comptée deux fois ; S et S' sont deux paraboles à axes parallèles : *la cubique Γ se réduit à une droite (+ la droite de l'infini double).*

Enfin signalons le cas des coniques homofocales où Γ n'existe plus.

II. — ÉTUDE DES DIVERS CAS PARTICULIERS.

Cette étude résulte des résultats précédents relatifs à C :

1° Si une asymptote de S est perpendiculaire à une asymptote de S', C est unicursale.

2° Si les asymptotes de S sont perpendiculaires à celles de S', C se décompose en deux podaires.

3° Si les deux coniques ont un foyer commun, C renferme les deux droites isotropes issues de ce foyer et le degré de la courbe restante est celui de C — 2.

4° Si une conique est une parabole, C renferme la droite de l'infini comptée double et le degré de la courbe restante est celui de C — 2.

5° Les huit points doubles de C sont sur Γ qui peut se décomposer et si $F\varphi$ et $F'\varphi'$ sont égaux et parallèles deux points doubles sont à l'infini en I et J (tacnodes).

La combinaison de ces résultats et des résultats relatifs à Γ donne les conclusions suivantes :

PREMIÈRE PARTIE. — S et S' sont deux coniques à centre :

α . Courbe C de degré 8 de genre 1 : 1° S et S' sont placées de façon quelconque. — C est du 8^e degré, de genre 1; quarticirculaire; ayant huit points doubles à distance finie sur la cubique Γ .

2° $F\varphi$, $F'\varphi'$ sont deux segments égaux et parallèles. — C n'a plus que six points doubles à distance finie, les deux autres sont à l'infini en I et J.

3° L'une des coniques est un cercle. — Les points cycliques sont bicuspidaux.

4° Les deux coniques S et S' ont un axe commun.

— Cet axe est axe de symétrie pour C qui possède quatre points doubles sur cet axe et quatre autres points doubles deux à deux symétriques par rapport à cet axe situés sur un cercle qui contient les foyers et les ombilics de S et S' situés hors de l'axe commun. Ces quatre points doubles peuvent se construire géométriquement; d'ailleurs deux seront rejetés à l'infini si S et S' ont même distance focale.

5° *Les deux coniques S et S' sont concentriques.*

— Le centre commun est centre de symétrie pour C qui possède huit points doubles à distance finie situés sur une hyperbole équilatère, symétriques deux à deux par rapport au centre; si de plus S et S' sont égales, la courbe C a deux axes de symétrie rectangulaires, les points doubles se déterminent géométriquement.

6° *Les deux coniques S et S' sont coaxiales.* — Les axes sont axes de symétrie pour C ; chaque axe contient quatre points doubles que l'on peut déterminer.

β . *Courbe C de degré 8 unicursale.* — Ce cas ne peut se présenter que pour deux hyperboles telles qu'une asymptote de l'une soit perpendiculaire à une asymptote de l'autre; on peut signaler le cas où ces deux hyperboles sont concentriques, la courbe C ayant alors un centre de symétrie.

γ . *Courbe C de degré 8 décomposable en deux podaires.* — Ce cas se présente lorsque les asymptotes de S sont perpendiculaires à celles de S' ou encore que S et S' sont semblables, les axes de même nature étant rectangulaires; les deux centres de similitude σ et σ' sont sur le cercle de diamètre $\omega\omega'$; ω , ω' étant les centres des deux coniques S et S' ; ce cercle passe aussi par les deux nouveaux points doubles, intersections

des asymptotes rectangulaires. Les deux coniques Σ, Σ' dont on prend les podaires sont semblables à S et S' , deux des centres de similitude étant σ et σ' . Selon les positions de σ, σ' on a diverses courbes.

Je signalerai les cas suivants :

1° Les deux coniques S et S' sont concentriques; on a deux podaires de coniques prises par rapport au centre, en particulier l'orthoptique de deux hyperboles équilatères ayant les mêmes asymptotes et formée de deux lemniscates.

2° S et S' sont deux cercles; l'orthoptique est formée de deux limaçons de Pascal égaux, symétriques par rapport à la ligne des centres; on voit que les points cycliques sont de rebroussement; les foyers singuliers sont confondus au milieu de $\omega\omega'$; enfin les points doubles des deux limaçons sont sur le cercle de diamètre $\omega\omega'$ et le cercle ayant pour diamètre le segment formé par les deux centres d'homothétie.

Remarquons que, si les deux coniques données S et S' sont orthogonales en un de leurs points communs, ce point est de rebroussement pour C , donc :

L'orthoptique de deux cercles orthogonaux est formée de deux cardioïdes ayant leurs rebroussements aux points d'intersection des deux cercles.

δ. Courbe C de degré 6 et de genre 1. — Supposons que S et S' aient un foyer commun F, F' ; C renferme les deux droites isotropes FI, FJ et il reste une courbe du sixième degré trirculaire admettant pour foyers singuliers les deux centres ω et ω' et le milieu de $\varphi\varphi'$. La cubique Γ se réduit à la droite $\varphi\varphi'$ qui coupe C en trois points doubles, la courbe C est de genre 1 en général. La courbe C touche chacune des

coniques S et S' en six points; examinons un cas particulier :

Les deux coniques S et S' ont un axe commun. — C'est un axe de symétrie pour C ; les trois points doubles de C sont sur cet axe; si l'une des coniques est un cercle, il y a rebroussement aux points cycliques.

ε. *Courbe C de degré 6 unicursale.* — C'est le cas de deux hyperboles S et S' ayant un foyer commun, une asymptote de la première étant perpendiculaire à une de la deuxième.

φ. *Courbe C de degré 6 décomposable.* — Les deux coniques S et S' ont un foyer commun, leurs axes focaux perpendiculaires et sont semblables; la courbe C se réduit à une podaire du quatrième degré et à un cercle, coupant la podaire sur la droite des foyers. Enfin S et S' sont homofocales; C se réduit au quatrième degré bicirculaire avec quatre rebroussements aux points communs à S et S' , on a un cercle double concentrique. Si $S \equiv S'$ on retrouve le cercle de Monge.

DEUXIÈME PARTIE. — S est une conique à centre, S' est une parabole. — L'orthoptique se réduit à une courbe du sixième degré, la droite de l'infini comptant double; les points cycliques sont doubles et il y a encore huit points doubles, donc en tout dix, la courbe est donc unicursale; ces huit points doubles sont obtenus de la manière suivante : sept sont sur la cubique circulaire Γ , le huitième est le point à l'infini dans la direction de la directrice de la parabole. La courbe possède deux foyers singuliers réels, milieux des segments joignant le foyer de la parabole aux deux foyers

de la conique S. La courbe C touche chacune des deux coniques en six points. Signalons les cas suivants :

1° *Les deux coniques ont un axe commun.* — Ce sera un axe de symétrie pour C; Γ se réduit à cet axe et un cercle, donc la courbe C a trois points doubles sur l'axe et quatre sur le cercle qui passe par les foyers et les ombilics non situés sur l'axe.

2° *Les deux coniques ont un foyer commun.* — L'orthoptique se réduit à une courbe du quatrième degré circulaire ayant pour foyer singulier le centre de la conique S; Γ se réduit à une droite qui coupe C en deux points doubles; le troisième point double est à l'infini; les points doubles et les asymptotes pouvant se construire géométriquement.

TROISIÈME PARTIE. — *S et S' sont deux paraboles.* — La droite de l'infini comptant quadruple, il reste une courbe C du quatrième degré circulaire ayant pour foyer singulier le milieu du segment joignant les foyers des deux paraboles; Γ se réduit à un cercle coupant C en huit points; en exceptant les points cycliques on trouve trois points doubles; donc :

L'orthoptique de deux paraboles est une quartique circulaire ayant trois points doubles situés sur un cercle passant par les foyers des deux paraboles et circonscrit au triangle des tangentes communes.

Examinons les divers cas : d'abord les axes peuvent être rectangulaires, alors la courbe C se réduit à une podaire de parabole courbe du troisième degré par rapport au centre de similitude, donc :

1° *L'orthoptique de deux paraboles ayant leurs axes rectangulaires est une podaire de parabole;*

2° *L'orthoptique de deux paraboles telles que l'axe de chacune d'elles soit la directrice de l'autre est une strophoïde droite;*

3° *L'orthoptique de deux paraboles telles que l'axe de chacune d'elles soit la tangente au sommet de l'autre est une cissoïde droite.*

Si les deux paraboles ont leur foyer commun, C se réduit au second degré, en général, et l'on a :

1° *L'orthoptique de deux paraboles ayant leur foyer commun est une conique;*

2° *L'orthoptique de deux paraboles ayant leur foyer commun et leurs axes rectangulaires est une droite perpendiculaire au milieu du segment joignant le foyer commun à l'intersection des deux directrices.*

Si les deux paraboles ont leurs axes parallèles, C est une quartique circulaire ayant un point double à l'infini sur la direction perpendiculaire à celle des axes et deux points doubles à distance finie sur la droite joignant les deux foyers.

Si de plus les deux paraboles ont même foyer, la courbe C se réduit à une conique ayant trois points doubles (un à l'infini et deux aux intersections des deux paraboles), c'est une droite double, donc :

L'orthoptique de deux paraboles homofocales est la corde commune. Si les deux paraboles sont identiques, on retrouve la directrice.

Le cas où l'une des coniques se réduit à deux droites ou, au point de vue tangentiel, à un ou deux points fournit pour C des podaires. Si S et S' sont réduites toutes deux à des points on a pour C quatre cercles.

La question peut se généraliser en faisant jouer à deux points quelconques le rôle des points cycliques ou en les remplaçant par une conique quelconque; on a alors le résultat suivant :

Étant données trois coniques S, S', S'' le lieu C des points d'intersection des tangentes à S et S' conjuguées par rapport à S'' est une courbe du huitième degré possédant huit points doubles sur S'' et douze points doubles sur une cubique Γ .

Les huit points sur S'' sont les points de contact des tangentes communes à S et S'' , puis à S' et S'' .

La cubique Γ est le lieu des points tels que les tangentes issues de ces points à S, S', S'' soient en involution. Cette cubique Γ passe par les dix-huit ombilics des trois coniques prises deux à deux.

La courbe C touche chacune des deux coniques S et S' en huit points. Ces propriétés se démontrent comme pour le cas de l'orthoptique de deux coniques.

Remarquons qu'en échangeant les trois coniques S, S', S'' , on définit trois courbes du huitième degré C, C', C'' , et l'on a toujours la même cubique Γ ; donc la cubique Γ renferme les dix-huit ombilics des coniques et les trente-six points doubles de C, C', C'' situés hors des coniques données.

Il resterait à étudier comme plus haut les divers cas possibles pour la courbe du huitième degré obtenue et à en déduire quelques théorèmes intéressants.