

F. GONSETH

Quelques propriétés métriques des foyers, des tangentes, etc.

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 17 (1917), p. 125-132

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__125_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K'7c]

**QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FoyERS,
DES TANGENTES, ETC. ;**

PAR M. F. GONSETH,

Assistant à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

1. Les groupes de n droites, d'un faisceau de centre F , qui sont *apolaires* à une paire de droites d_1 et d_2 du faisceau, forment une *involution* (système linéaire de dimension 1). On les obtient tous en considérant d_1 et d_2 comme deux groupes de n droites confondues et en formant le système linéaire que ces deux premiers déterminent. Je supposerai, dans la suite, que la paire $d_1 d_2$ est *isotrope*. On sait, en pareil cas (¹), que les *paires* qui lui sont apolaires (ou harmoniques) sont rectangulaires.

(¹) LAGUERRE, *Note sur les foyers* (*Nouvelles Annales*, 1853).

L'involution des groupes apolaires à la paire $d_1 d_2$ n'est pas modifiée par toute transformation projective du plan qui laisse cette dernière intacte, d'après ce qui précède. En particulier l'involution des apolaires à la paire isotrope de F ne sera pas modifiée par une rotation quelconque du plan autour de F. Par conséquent *les groupes de cette involution s'obtiennent par la rotation de l'un d'entre eux* (rotation réelle ou imaginaire).

D'autre part, un groupe g est univoquement déterminé par une des droites qui le composent. Soient d_1, d_2, \dots, d_n ces dernières (les indices indiquant l'ordre dans lequel elles sont rencontrées par une droite mobile tournant dans un sens constant autour de F). Je fais tourner le groupe g jusqu'à ce que d_1 vienne en d_2 : le groupe dans cette nouvelle position fait encore partie de l'involution et, comme il a la droite d_2 en commun avec le groupe g primitif, il coïncide avec celui-ci. Donc l'angle $d_2 d_3$ est égal à l'angle $d_1 d_2$. En définitive :

L'involution des groupes de n droites d'un faisceau apolaires à la paire isotrope du faisceau est formée des groupes qui divisent le plan en $2n$ parties égales (involution absolue, du $n^{\text{ième}}$ ordre).

2. Un foyer F d'une courbe plane algébrique Γ_n , de $n^{\text{ième}}$ classe, est, par définition, à l'intersection de deux tangentes isotropes. Or les groupes de n droites conjuguées à Γ_n , autour de F, forment un système linéaire auquel on peut parvenir en considérant chaque tangente comme un groupe de n droites conjuguées confondues, et en formant le système linéaire de groupes déterminé par ces n premiers. Par conséquent, d'après ce qui précède :

La condition nécessaire et suffisante, sous forme réelle, pour qu'un point F soit foyer d'une courbe plane algébrique Γ_n de $n^{\text{ième}}$ classe, est que le système linéaire des groupes de n droites conjuguées, autour de F, contienne l'involution absolue de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Par commodité, je nommerai *régulier* tout groupe d'une involution absolue.

3. Soit, réciproquement, g un groupe régulier de n droites; il admet la paire isotrope du faisceau comme *paire apolaire*. Par conséquent les groupes, de $n - 1$ droites, polaires premiers des droites du faisceau sont eux aussi apolaires à la paire isotrope, donc réguliers; de même :

Le groupe polaire, suivant g , d'un groupe quelconque de p droites est un groupe régulier de $n - p$ droites (s'il n'est pas indéterminé).

De ceci résulte immédiatement :

Si P est un point d'où les tangentes menées à une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe Γ_n forment un groupe régulier, les tangentes menées de P à la polaire mixte, suivant Γ_n , d'un groupe quelconque de droites par P formeront, elles aussi, un groupe régulier.

Examinons particulièrement le cas où $n = 3$. Deux courbes de troisième classe, Γ_1 et Γ_2 , étant fixées, le lieu des points, P, d'où les tangentes à l'une et à l'autre forment deux groupes apolaires est, comme on sait, une courbe de troisième ordre, C_3 . Il est d'ailleurs facile de s'en assurer : si un point M décrit une droite d , les groupes de tangentes menées de M à Γ_1 forment une

série, d'ordre 3, de courbes de troisième ordre (dégénérées), et si M doit venir en un point P, il faut soumettre les courbes de cette série à une condition linéaire.

Je suppose que Γ_2 se réduise à trois points non en ligne droite, A, B, C. La courbe C_3 passe alors par ces trois points. Déplaçons C jusqu'en C'; C_3 devient C'; ces deux courbes ont en commun les points A et B, et sept autres. De chacun, R, de ces derniers, les trois tangentes menées à Γ_1 forment un groupe apolaire aux deux groupes RA, RB, RC; et RA, RB, RC', c'est-à-dire apolaire à la paire RA, RB.

Je suppose enfin que A et B soient les *ombilics* du plan. D'après ce qui précède, les trois tangentes menées de R à Γ_1 forment un groupe régulier. Ces sept points peuvent être tous distincts et réels, comme, par exemple, dans le cas où Γ_1 est réduite à trois points. En définitive :

Il existe sept points d'où les tangentes menées à une courbe générale de troisième classe forment un groupe régulier.

Par ces sept points passent une double infinité de cubiques, qui coupent la droite de l'infini suivant un système linéaire, de dimension 2, de groupes de trois points. Ces groupes sont tous apolaires au groupe des trois points triples; les ombilics forment la *paire neutre*. Par conséquent : *Par ces sept points passent trois courbes de troisième ordre qui osculent la droite de l'infini; les trois directions d'osculatation forment un groupe régulier.*

Nous avons vu plus haut que les coniques polaires, suivant Γ_1 , des droites passant par un point R sont toutes vues de ce point sous un angle droit. *Supposons*

que Γ_1 se réduise aux trois points ABC. Soient A_1, B_1, C_1 les projections du point R depuis les sommets du triangle ABC sur les côtés opposés, et A_2, B_2, C_2 les harmoniques de A_1, B_1, C_1 suivant les paires de sommets du même triangle. Il n'est pas difficile de voir que les coniques polaires (suivant notre Γ_1 dégénérée) des droites passant par R forment un faisceau qui contient les paires AA_2, BB_2 et CC_2 comme coniques dégénérées. Les cercles orthoptiques de toutes ces coniques, en particulier, les cercles construits sur AA_2, \dots , comme diamètres, passent par R.

Enfin, si le triangle ABC est équilatéral, tout point du cercle circonscrit jouit des mêmes propriétés.

4. Nous avons rencontré au paragraphe précédent un système linéaire de groupes de trois points, de dimension 2, sur la droite de l'infini, et dont les ombilics forment la paire neutre. Ce système peut être examiné plus soigneusement. Je le projette depuis un point arbitraire. D'après ce qui précède, *tous les groupes de trois droites obtenus sont apolaires à un groupe régulier; la paire isotrope est apolaire à ce dernier et la paire polaire de toute droite d du faisceau est rectangulaire*. Voici comment, d étant donnée, sa paire polaire s'en déduit : soient d_1, d_2, d_3 les droites du groupe fondamental régulier; les trois paires formées d'une droite d_i et de la symétrique de d suivant d_i ont mêmes bissectrices; celles-ci forment la paire polaire de d . On en déduit :

a. La somme algébrique des angles que forment, avec une des fondamentales d_i , une droite d et les droites de son groupe polaire est égale à $\frac{\pi}{2}$ (indépendante de d).

b. La somme algébrique des angles que forment avec d_i les trois droites d'un groupe du système est égale à zéro.

Ce système mériterait donc le nom de *système symétrique du troisième ordre*, de même qu'on nomme *involution symétrique* (de second ordre) le système des harmoniques à une paire rectangulaire.

Je veux maintenant faire voir que *les directions asymptotiques de toutes les cubiques qui passent par les sommets, l'orthocentre et les trois pieds des hauteurs d'un triangle, forment un système symétrique de troisième ordre.*

Soient A, B, C, D les quatre sommets d'un quadrangle et L, M, N ses points diagonaux. Par ces sept points passent une double infinité de cubiques qui coupent une droite arbitraire, d , suivant un système linéaire de groupes de trois points, de dimension 2. Je me propose de rechercher la paire neutre de ce système. Dans ce but, d'un point P quelconque, je mène les tangentes aux coniques du faisceau passant par A, B, C, D. Les points de contact sont sur une cubique (la correspondante de P) qui passe par P et les sept points sus-mentionnés. (Il n'est pas difficile de voir que toute cubique passant par ces sept points peut être obtenue de la sorte.) Je suppose que P soit quelconque sur d ; deux coniques du faisceau touchent d , en F_1 et F_2 ; ces points appartiennent à la cubique correspondante de tout point de d et par conséquent ils forment la paire neutre cherchée.

Si maintenant les quatre points A, B, C, D sont les trois sommets d'un triangle et son orthocentre, les points L, M, N en sont les pieds des hauteurs; si

enfin d est à l'infini, les points F_1 et F_2 sont les ombilics du plan, ce qui démontre l'affirmation.

Je nomme *équilatère* une cubique dont les trois asymptotes forment un triangle équilatéral. Sur toute droite le système des groupes de trois points conjugués à une cubique possède une paire neutre. Cette paire, pour une cubique équilatère, et sur la droite de l'infini, est naturellement formée des ombilics. Elle est d'autre part harmonique aux coniques polaires de tout point de la droite de l'infini, qui forment donc un faisceau d'hyperboles équilatères. Les points-bases de ce faisceau sont les quatre pôles de la droite de l'infini. Par conséquent :

Les quatre pôles, suivant une cubique équilatère, de la droite de l'infini, sont les sommets et l'orthocentre d'un triangle.

§. Voici comment sera caractérisé *le système symétrique du nième ordre*, c'est-à-dire le système linéaire des groupes de n droites apolaires au groupe régulier $d_1 \dots d_n$.

Tout groupe polaire est régulier.

Je nomme α l'angle dont doit tourner, dans le sens positif, une droite arbitraire d , jusqu'à ce qu'elle rencontre une première droite fondamentale. d rencontrera une première droite de son groupe polaire après une rotation de $\frac{n}{n-1} \alpha$.

On en déduit :

La somme algébrique des angles que forment, avec une direction fondamentale d_i , k droites arbi-

traies et les $n - k$ droites de leur groupe polaire mixte est égale à $(n - 1 - k) \frac{\pi}{2}$ (indépendante des k premières droites).

En particulier la somme algébrique des angles que forment, avec une direction fondamentale, les n droites d'un groupe est égale à zéro. En d'autres termes, et en faisant usage d'une expression due à Laguerre : *Les groupes d'un système symétrique ont une orientation nulle par rapport à toute droite du groupe régulier fondamental.*

Par les $2n$ points d'intersection d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ ordre et d'un cercle passent une infinité de dimension $N(n - 2) + 1$ de courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre. On vérifie aisément que ces courbes coupent une droite arbitraire suivant un système linéaire de groupes de n points, de dimension $n - 1$ seulement; la droite de l'infini, en particulier, suivant un pareil système dans lequel les ombilics forment une paire neutre et par conséquent :

Les directions asymptotiques de toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre, qui passent par les points d'intersection de l'une d'entre elles et d'un cercle, forment un système symétrique du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Le cas particulier où $n = 2$ est bien connu.