LUCIEN GODEAUX

Étude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 49-61

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__49_0>

[P¹1c]

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE SUR L'HOMOGRAPHIE PLANE DE PÉRIODE TROIS ET SUR UNE SURFACE CUBIQUE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Considérons, sur une surface algébrique F, une involution d'ordre n, c'est-à-dire un système algébrique, doublement infini, de groupes de n points de la surface, tels qu'un point de la surface n'appartienne, en général, qu'à un seul de ces groupes. En général, une involution appartenant à une surface algébrique possède ∞^1 points de coïncidence, c'est-à-dire ∞^1 points comptant pour plus d'une unité parmi les n points des groupes auxquels ils appartiennent respectivement. Cependant, certaines involutions peuvent ne posséder qu'un nombre fini, éventuellement nul, de points de coïncidence. Supposons que l'involution d'ordre n, donnée sur F, jouisse de cette dernière propriété. Deux problèmes se posent :

1° *Déterminer une surface normale* Φ, *image de l'involution* (c'est-à-dire dont les points correspondent birationnellement aux groupes de l'involution) *et étudier ses singularités;*

2° *Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique soit l'image d'une involution, appartenant à une surface algébrique, ayant un nombre fini de points de coïncidence.*

Nous avons consacré à l'étude de ces problèmes plusieurs Mémoires, parmi lesquels nous citerons les suivants :

1° *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (*Rendiconti R. Accad. Lincei*, 1er semestre 1914);

2° *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914);

3° *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (*Bull. Soc. math. de France*, 1913);

4° *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* (*Bull. Soc. math. de France*, 1915);

5° *Sur les involutions de genres un et de seconde espèce appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'Université de Jassy*, 1915);

6° *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté de Toulouse,* 1914).

A ces travaux il faut ajouter des recherches de MM. Enriques et Severi qui ont d'ailleurs été le point de départ des nôtres :

F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta mathematica*, 1909).

Dans la première de nos études citées, nous avons notamment démontré que toute involution appartenant à une surface algébrique, douée d'un nombre fini de points de coïncidence, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Sauf dans le Mémoire n° 6, nous nous sommes toujours borné à des surfaces spéciales. Nos recherches ultérieures porteront sur des surfaces quelconques.

Dans cette Note nous traiterons, à titre d'exemple, un cas très simple et bien connu. Notre surface F sera un plan et notre involution sera celle qui est engendrée par l'homographie plane de période trois. Nous étudierons la surface cubique qui représente cette involution.

1. Soient en coordonnées homogènes

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

ε étant une racine cubique primitive de l'unité, les équations d'une homographie plane de période trois.

Cette homographie engendre une involution I_3, d'ordre trois. Un groupe de cette involution est constituée par trois points :

$$(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^2 x_3), \quad (x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_3).$$

L'involution I_3 possède trois points de coïncidence ; ce sont les points

$$(1, 0, 0), \qquad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

On peut former aisément des systèmes linéaires de courbes planes composés avec I_3. Les plus simples sont formés de courbes d'ordre trois.

La cubique

$$\begin{aligned} &a_{300} x_1^3 + a_{030} x_2^3 + a_{003} x_3^3 + 3 a_{210} x_1^2 x_2 \\ &\quad + 3 a_{201} x_1^2 x_3 + 3 a_{120} x_1 x_2^2 + 3 a_{021} x_2^2 x_3 \\ &\quad + 3 a_{102} x_1 x_3^2 + 3 a_{012} x_2 x_3^2 + 6 a_{111} x_1 x_2 x_3 = 0 \end{aligned}$$

est transformée, par l'homographie, en la cubique

$$\begin{aligned} &a_{300} x_1^3 + a_{030} x_3^2 + a_{003} x_3^3 + 3 \varepsilon a_{210} x_1^2 x_2 \\ &\quad + 3 \varepsilon^2 a_{201} x_1^2 x_3 + 3 \varepsilon^2 a_{102} x_1 x_2^2 + 3 \varepsilon x_2^2 x^2 \\ &\quad + 3 \varepsilon a_{102} x_1 x_3^2 + 3 \varepsilon^2 a_{102} x_2 x_3^2 + 6 a_{111} x_1 x_2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Par contre, le système des cubiques planes contient trois systèmes linéaires composés, avec I_3, ce sont :

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0;$$

$$(2) \qquad \mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0;$$

$$(3) \qquad \nu_1 x_1^2 x_3 + \nu_2 x_2^2 x_1 + \nu_3 x_3^2 x_2 = 0.$$

Le premier seul de ces systèmes est dépourvu de points de base et est donc de degré 9.

2. *Surface cubique image de* I_3. — Rapportons projectivement les courbes

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

aux plans

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0,$$

d'un espace linéaire à trois dimensions. Nous obtenons ainsi une surface du troisième ordre Φ, d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3.$$

A un point de cette surface Φ correspond un groupe de I, et inversement. On obtient donc une surface image de I_3, du troisième ordre.

3. *Étude d'un point de diramation de* Φ. — A un point de coïncidence P du plan (x_1, x_2, x_3) correspond, sur Φ, un point de diramation P' qui est un point singulier de cette surface. Nous allons étudier la singularité de P'. Nous supposerons, pour fixer les idées, que P est le point $(1, 0, 0)$. Alors le point P' est le point $(1, 0, 0, 0)$.

Considérons une droite

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

passant par P, et ses transformées

$$a_2 x_2 + \varepsilon a_3 x_3 = 0, \qquad \varepsilon a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

au moyen de l'homographie. Ces droites diffèrent, lorsque a_2, a_3 ne sont pas nuls; elles coïncident si l'une de ces quantités est nulle. Cela signifie que si un point du plan s'approche de P dans une direction différente des directions $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ses conjugués dans I_3 s'approchent de P suivant deux directions différentes.

En d'autres termes, un point infiniment voisin de P n'est pas un point de coïncidence de I_3, exception faite pour les points infiniment voisins de P dans les directions $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Considérons une courbe

$$\lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{4}$$

du système (1) passant par P. Cette courbe possède un point double en P et ses deux branches touchent les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

A la courbe (4) correspond sur Φ une cubique, section plane de cette surface passant par P'. Cette cubique possède, en P', un point double à tangentes distinctes. En effet, à un point Q de la section de Φ par le plan

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$$

correspondent trois points de la courbe (4), Q_1, Q_2, Q_3. Lorsque le point Q s'approche de P' (sur la section plane considérée), les points Q_1, Q_2, Q_3 s'approchent de P, mais tous trois sur une même branche de la courbe (4), puisqu'ils doivent coïncider en un point infiniment voisin de P sur cette branche. A chaque branche de la courbe (4) correspond donc une branche de la section plane considérée sur Φ, en P'. Par suite, les sections planes de Φ passant par P' ayant en ce point un point double à tangentes distinctes, la surface Φ possède en P' un point double non uniplanaire.

Il y a ∞^1 courbes (1) ayant en P un point triple. Elles ont pour équations

$$\lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0$$

et sont donc dégénérées en trois droites. Comme nous l'avons vu plus haut, ces trois droites sont transformées les unes en les autres par l'homographie.

A cette courbe (1) spéciale correspond, sur Φ, la section de cette surface par le plan

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0.$$

Cette section plane possède un point double à tangentes confondues en P', car à un point de la section infiniment voisin de P' correspondent, sur le plan (x_1, x_2, x_3), trois points infiniment voisins de P, mais situés chacun sur une des trois droites dont il vient d'être question.

On en conclut que :

En chaque point de diramation, la surface Φ possède un point double biplanaire.

Effectivement, l'étude de l'équation de la surface conduit au même résultat. En P', par exemple, Φ a un point double dont le cône tangent se décompose en les deux plans $X_2 = 0$, $X_3 = 0$.

4. La surface Φ est évidemment normale, car le système des courbes (1) est complet. En d'autres termes, il n'est pas possible de trouver une courbe de ce système, c'est-à-dire une cubique invariante pour l'homographie et n'appartenant pas au système (2), (3), qui ne puisse être représentée par l'équation (1). Nous avons par suite résolu le premier problème.

L'involution d'ordre trois engendrée par une homographie plane de période trois, peut être repré-

sentée par une surface cubique possédant trois points doubles biplanaires.

5. *Deux systèmes de cubiques gauches tracées sur* Φ. — A une courbe (2) ou (3) correspond, sur Φ, une courbe dont nous allons rechercher la nature.

Une courbe (2) rencontre une courbe (1) en neuf points formant trois groupes de I_3, par suite, la courbe A correspondant à cette courbe (2) rencontrera une section plane de Φ en trois points. Mais la courbe A ne peut être plane, sans quoi elle aurait pour transformée une courbe (1); la courbe A est donc une cubique gauche.

Une courbe (1) passant par le point (1, 0, 0) rencontre une courbe (2), en dehors du domaine de ce point, en six points formant deux groupes de I_3; par conséquent, un plan passant par le point (1, 0, 0, 0) rencontre la courbe A, en dehors de ce point, en deux points. On en conclut que la courbe A passe par les trois points doubles de Φ.

Une courbe (1) ayant un point triple en (1, 0, 0), c'est-à-dire décomposée en trois droites, rencontre une courbe (2) en deux groupes de I_3 en dehors du domaine de ce point. Le plan

$$\lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

rencontre donc A en deux points en dehors de (1, 0, 0, 0) et par suite la courbe A ne touche pas la droite

$$X_2 = X_3 = 0.$$

On pourrait raisonner de même sur les courbes correspondant, sur Φ_1 anx courbes (3). On voit donc que :

Il existe, sur la surface Φ, *deux réseaux de* *cubiques gauches passant par les points doubles de la surface, mais n'y touchant pas la tangente principale.*

6. Il convient d'étudier de plus près ces réseaux de cubiques gauches. Nous étudierons celui qui correspond au réseau des courbes (2). Suivant l'usage adopté en Géométrie algébrique, nous indiquerons ce réseau par $|A|$, et l'une quelconque de ses courbes génériques par A.

Les courbes

$$\mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0 \tag{2}$$

passent par les sommets du triangle fondamental et touchent la droite $x_2 = 0$ en $(1, 0, 0)$, la droite $x_3 = 0$ en $(0, 1, 0)$ et la droite $x_1 = 0$ en $(0, 0, 1)$.

La courbe A qui correspond à la courbe (2) est située sur les cônes

$$\mu_1 X_4^2 + \mu_2 X_2 X_3 + \mu_3 X_3 X_4 = 0, \tag{I}$$

$$\mu_1 X_1 X_4 + \mu_2 X_4^2 + \mu_3 X_1 X_3 = 0, \tag{II}$$

$$\mu_1 X_1 X_2 + \mu_2 X_2 X_4 + \mu_3 X_1^2 = 0, \tag{III}$$

ainsi qu'on le voit par un calcul très simple. Ce sont les trois cônes projetant la courbe respectivement des trois points doubles de la surface Φ.

Le cône (I), de sommet $(1, 0, 0, 0)$, touche le plan $X_3 = 0$ le long de la droite $X_3 = X_4 = 0$, tandis que le cône (II) ne touche pas ce plan. On en conclut que la cubique gauche A touche le plan $X_3 = 0$ en $(0, 1, 0, 0)$. De même, A touche le plan $X_1 = 0$ en $(0, 0, 1, 0)$ et $X_2 = 0$ en $(1, 0, 0, 0)$. En d'autres termes :

Dans les domaines des points doubles de la surface Φ, les cubiques A sont tracées sur une nappe de *la surfacc; en* (1, 0, 0, 0) *sur la nappe tangente à* $X_2 = 0$, *en* (0, 1, 0, 0) *sur la nappe tangente à* $X_3 = 0$, *en* (0, 0, 1, 0) *sur la nappe tangente à* $X_1 = 0$.

Remarquons enfin que le réseau $|A|$ est de degré un. En effet, deux cubiques (2) ont en commun, en dehors des sommets du triangle fondamental, trois points formant un groupe de I_3. Les deux courbes A qui correspondent aux courbes considérées n'ont donc qu'un point commun, variable.

7. A une cubique plane du plan (x_1, x_2, x_3), non transformée en elle-même par l'homographie, correspond sur Φ une courbe elliptique d'ordre 9, découpée sur cette surface par une surface cubique. Les coefficients de l'équation de cette dernière surface sont d'ailleurs des fonctions des coefficients de l'équation de la courbe considérée.

Pour le faire voir, considérons la cubique

$$\varphi_1 = \Sigma a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l = 0$$
$$(i + k + l = 3).$$

L'homographie la transforme successivement en les cubiques :

$$\varphi_2 = \Sigma \varepsilon^{k+2l} a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l = 0,$$
$$\varphi_3 = \Sigma \varepsilon^{2k+l} a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l = 0.$$

La courbe

$$(5) \qquad \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 = 0$$

correspond donc, sur Φ, à une courbe C en correspondance birationnelle avec chacune des cubiques $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$. En effet, à un point de C correspondent trois points du plan (x_1, x_2, x_3) situés sur chacune des trois cubiques considérées. C est par suite elliptique.

La courbe (5) rencontre une courbe (1) en neuf ternes de I_3, donc C est bien d'ordre 9.

Remarquons qu'il existe, sur $\varphi_1 = 0$, par exemple, neuf couples de points auxquels correspondent les mêmes points de C. On en conclut que la courbe C possède neuf points doubles variables en des points simples de Φ. (Les couples de points dont il est question ici forment les dix-huit points d'intersection de $\varphi_1 = 0$ avec $\varphi_2 = 0$ et $\varphi_3 = 0$).

Faisons varier la courbe $\varphi_1 = 0$ d'une manière continue dans son plan jusqu'à ce que son équation devienne

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

La courbe C correspondante varie sur Φ et se réduit à la section de Φ par le plan

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0$$

comptée trois fois, c'est-à-dire à la section de Φ par la surface cubique

$$(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4)^3 = 0.$$

On en conclut que les courbes C sont découpées, sur Φ, par des surfaces cubiques.

Faisons maintenant coïncider la courbe $\varphi_1 = 0$ avec la courbe

$$(2) \qquad \mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0.$$

La courbe (5) se réduit à la courbe $\varphi_1^3 = 0$ et la courbe C à une courbe A comptée trois fois. La surface cubique découpant cette courbe A sur Φ doit donc osculler cette surface en chacun de ses points de rencontre. Cette surface cubique a pour équation

$$
\begin{aligned}
\psi(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv {} & \mu_1^3 X_1^2 X_2 + \mu_2^3 X_2^2 X_3 + \mu_3^3 X_2^3 X_1 \\
& + 3\mu_1^2 \mu_3 X_4^2 X_1 + 3\mu_2^2 \mu_1 X_4^2 X_2 + 3\mu_3^2 \mu_2 X_4^2 X_3 \\
& + 6\mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4^2 + 3\mu_2^2 \mu_3 X_2 X_3 X_4 \\
& \qquad - 3\mu_3^2 \mu_1 X_3 X_1 X_4 + 3\mu_1^2 \mu_3 X_1 X_2 X_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Remarquons que, dans le domaine du point (1, 0, 0, 0) par exemple, la surface $\psi = 0$ touche simplement la nappe de la surface Φ tangente à $X_2 = 0$.

8. Considérons la surface F, d'ordre 9, située dans l'espace à quatre dimensions, dont les équations sont :

$$
X_1 X_2 X_3 = X_4^3, \qquad X_5^3 = \psi(X_1, X_2, X_3, X_4).
$$

Entre la surface Φ et la surface F, nous avons une correspondance (1, 3). Quels sont les points de Φ de diramation pour cette correspondance, c'est-à-dire les points de Φ auxquels correspondent trois points coïncidents de F.

Une première condition que ces points doivent vérifier, c'est évidemment $X_5 = 0$, c'est-à-dire

$$
\psi(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0.
$$

Mais nous avons vu que cette surface osculait Φ en chaque point de rencontre, sauf dans le domaine des points (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), où elle touche une des nappes de la surface. Il n'y aura donc diramation qu'en ces points de contact simple.

On voit donc qu'il y a trois points de diramation et que la surface F est par suite irréductible.

Nous démontrerons actuellement que la surface F est rationnelle.

Posons

$$
\frac{X_1}{x_1^3} = \frac{X_2}{x_2^3} = \frac{X_3}{x_3^3} = \frac{X_4}{x_1 x_2 x_3} = \frac{X_5}{\mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1} = \rho.
$$

Ces formules font correspondre à un point du plan (x_1, x_2, x_3) un point de F. Inversement, à un point de F correspond un point du plan (x_1, x_2, x_3).

En effet, on a successivement

$$\mu_1 x_1^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = \frac{1}{\rho} X_5,$$

$$\mu_1 x_2^2 x_3 X_1 + \mu_2 x_3^2 x_1 X_2 + \mu_3 x_1^2 x_2 X_3 = \frac{1}{\rho} X_4 X_5,$$

$$\mu_1 x_3^2 x_1 X_1 X_2 + \mu_2 x_1^2 x_2 X_2 X_3 + \mu_3 x_2^2 x_3 X_3 X_1 = \frac{1}{\rho} X_4^2 X_5.$$

On en déduit, en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_3 X_3 & \mu_1 X_1 & \mu_2 X_2 \\ \mu_2 X_2 X_3 & \mu_3 X_1 X_3 & \mu_1 X_1 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \mu_2 & \mu_3 \\ X_4 & \mu_1 X_1 & \mu_1 X_2 \\ X_4^2 & \mu_3 X_1 X_3 & \mu_1 X_1 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mu_1 & 1 & \mu_3 \\ \mu_3 X_3 & X_4 & \mu_2 X_2 \\ \mu_2 X_2 X_3 & X_4^2 & \mu_1 X_1 X_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 1 \\ \mu_3 X_3 & \mu_1 X_1 & X_4 \\ \mu_2 X_2 X_3 & \mu_3 X_1 X_3 & X_4^2 \end{vmatrix},$$

$$x_1^2 x_2 = \frac{1}{\rho} \frac{X_5 \Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2^2 x_3 = \frac{1}{\rho} \frac{X_5 \Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3^2 x_1 = \frac{1}{\rho} \frac{X_5 \Delta_3}{\Delta}.$$

Mais on a

$$x_1^3 = \frac{1}{\rho} X_1, \qquad x_2^3 = \frac{1}{\rho} X_2, \qquad x_3^3 = \frac{1}{\rho} X_3;$$

par suite,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_1 \Delta}{X_5 \Delta_1}, \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{X_2 \Delta}{X_5 \Delta_2}, \qquad \frac{x_3}{x_1} = \frac{X_3 \Delta}{X_5 \Delta_3}.$$

On en déduit, par exemple,

$$\frac{x_1}{X_1 X_2 \Delta^2} = \frac{x_2}{X_2 X_5 \Delta\Delta_1} = \frac{x_3}{X_5^2 \Delta_1 \Delta_2}.$$

On voit qu'entre la surface F et le plan (x_1, x_2, x_3) il existe une correspondance birationnelle. La surface F est donc bien rationnelle.

La transformation

$$\rho X'_1 = X_1, \qquad \rho X'_2 = X_2, \qquad \rho X'_3 = X_3,$$
$$\rho X'_4 = X_4, \qquad \rho X'_5 = \varepsilon X_5,$$

qui engendre sur F l'involution dont Φ est l'image, a pour correspondante, dans le plan (x_1, x_2, x_3),

$$x'_1 = x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3.$$

9. Pour résoudre le second problème proposé, remarquons qu'une surface cubique, possédant trois points doubles biplanaires ordinaires, ne peut pas nécessairement être représentée par l'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3,$$

c'est-à-dire que les trois couples de plans tangents à la surface aux trois points biplanaires ne sont pas nécessairement les faces d'un trièdre; mais une surface jouissant de cette propriété peut au contraire toujours être représentée par une telle équation. Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface cubique soit l'image d'une involution plane d'ordre trois, engendrée par une homographie de période trois à trois points unis, est qu'elle possède trois points biplanaires ordinaires, les plans tangents à la surface en ces points étant les faces d'un même trièdre.