

E.-N. BARISIEN

Sur la parabole tangente à quatre droites

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 455-461

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__455_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'13a]

SUR LA PARABOLE TANGENTE A QUATRE DROITES ;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Soient les quatre droites

$$\begin{aligned} y &= m_1 x + p_1, & y &= m_2 x + p_2, \\ y &= m_3 x + p_3, & y &= m_4 x + p_4. \end{aligned}$$

L'équation à trouver doit être de la forme

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi - \alpha)^2.$$

La condition de tangence d'une droite

$$(2) \quad y = mx + p$$

avec la parabole (1) s'obtiendra en exprimant que le symétrique Q du foyer F(α , β), par rapport à la droite (2), est sur la directrice

$$(3) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - \alpha = 0.$$

La projection P de F sur la droite (2) s'obtient en résolvant les deux équations

$$y = mx + p, \quad y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha),$$

ce qui donne, pour les coordonnées de P,

$$x_P = \frac{\alpha + \beta m - pm}{1 + m^2}, \quad y_P = \frac{m\alpha + \beta m^2 + p}{1 + m^2}.$$

On a, pour celles de Q,

$$\begin{aligned}x_Q &= 2x_P - x_F = \frac{2(\alpha + \beta m - pm)}{1 + m^2} - \alpha \\&= \frac{\alpha(1 - m^2) + 2\beta m - 2pm}{1 + m^2}, \\y_Q &= 2y_P - y_F = \frac{2(m\alpha + m^2\beta + p)}{1 + m^2} - \beta \\&= \frac{2m\alpha - \beta(1 - m^2) + 2p}{1 + m^2}.\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), on a

$$\begin{aligned}&\frac{[\alpha(1 - m^2) + 2\beta m - 2pm] \cos \varphi}{1 + m^2} \\&+ \frac{[2m\alpha - \beta(1 - m^2) + 2p] \sin \varphi}{1 + m^2} - \alpha = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(4) \quad &\alpha[(1 - m^2) \cos \varphi + 2m \sin \varphi] \\&+ \beta[2m \cos \varphi - (1 - m^2) \sin \varphi] \\&- \alpha(1 + m^2) + 2p(\sin \varphi - m \cos \varphi) = 0.\end{aligned}$$

La condition de tangence de la parabole (1) aux quatre droites données conduit donc aux quatre relations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned}&\alpha[(1 - m_1^2) \cos \varphi + 2m_1 \sin \varphi] \\&+ \beta[2m_1 \cos \varphi - (1 - m_1^2) \sin \varphi] \\&- \alpha(1 + m_1^2) + 2p_1(\sin \varphi - m_1 \cos \varphi) = 0, \\&\alpha[(1 - m_2^2) \cos \varphi + 2m_2 \sin \varphi] \\&+ \beta[2m_2 \cos \varphi - (1 - m_2^2) \sin \varphi] \\&- \alpha(1 + m_2^2) + 2p_2(\sin \varphi - m_2 \cos \varphi) = 0, \\&\alpha[(1 - m_3^2) \cos \varphi + 2m_3 \sin \varphi] \\&+ \beta[2m_3 \cos \varphi - (1 - m_3^2) \sin \varphi] \\&- \alpha(1 + m_3^2) + 2p_3(\sin \varphi - m_3 \cos \varphi) = 0, \\&\alpha[(1 - m_4^2) \cos \varphi + 2m_4 \sin \varphi] \\&+ \beta[2m_4 \cos \varphi - (1 - m_4^2) \sin \varphi] \\&- \alpha(1 + m_4^2) + 2p_4(\sin \varphi - m_4 \cos \varphi) = 0.\end{aligned} \right.$$

Ces quatre relations permettent de déterminer α , β , α et φ .

Comme α , β et α y entrent linéairement, on aura par leur élimination l'équation suivante en φ :

$$(6) \quad \begin{vmatrix} (1-m_1^2)\cos\varphi + 2m_1\sin\varphi & 2m_1\cos\varphi - (1-m_1^2)\sin\varphi \\ (1-m_2^2)\cos\varphi + 2m_2\sin\varphi & 2m_2\cos\varphi - (1-m_2^2)\sin\varphi \\ (1-m_3^2)\cos\varphi + 2m_3\sin\varphi & 2m_3\cos\varphi - (1-m_3^2)\sin\varphi \\ (1-m_4^2)\cos\varphi + 2m_4\sin\varphi & 2m_4\cos\varphi - (1-m_4^2)\sin\varphi \\ p_1(\sin\varphi - m_1\cos\varphi) & 1 + m_1^2 \\ p_2(\sin\varphi - m_2\cos\varphi) & 1 + m_2^2 \\ p_3(\sin\varphi - m_3\cos\varphi) & 1 + m_3^2 \\ p_4(\sin\varphi - m_4\cos\varphi) & 1 + m_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, cette équation est du troisième degré en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Le problème paraît donc comporter *trois solutions*, alors qu'on sait qu'il n'y en a qu'une; car il est bien avéré qu'il n'existe qu'une seule parabole tangente à quatre droites !

L'équation (6) peut se simplifier un peu en posant

$$\begin{aligned} m_1 &= \tan \frac{\omega_1}{2}, & m_2 &= \tan \frac{\omega_2}{2}, \\ m_3 &= \tan \frac{\omega_3}{2}, & m_4 &= \tan \frac{\omega_4}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\sin \omega_1 = \frac{2m_1}{1+m_1^2}, \quad \cos \omega_1 = \frac{1-m_1^2}{1+m_1^2}, \quad \dots$$

L'équation (6) peut donc s'écrire

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \cos(\varphi - \omega_1) & \sin(\varphi - \omega_1) & p_1 \cos \frac{\omega_1}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\omega_1}{2} \right) & 1 \\ \cos(\varphi - \omega_2) & \sin(\varphi - \omega_2) & p_2 \cos \frac{\omega_2}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\omega_2}{2} \right) & 1 \\ \cos(\varphi - \omega_3) & \sin(\varphi - \omega_3) & p_3 \cos \frac{\omega_3}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\omega_3}{2} \right) & 1 \\ \cos(\varphi - \omega_4) & \sin(\varphi - \omega_4) & p_4 \cos \frac{\omega_4}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\omega_4}{2} \right) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cas particulier. — Les quatre droites sont :

$$y = 0, \quad y = x, \quad y = 2x + k, \quad y = -x + q.$$

Alors

$$\begin{aligned} m_1 = 0, & \quad p_1 = 0, & m_2 = 1, & \quad p_2 = 0, \\ m_3 = 2, & \quad p_3 = k, & m_4 = -1, & \quad p_4 = q, \end{aligned}$$

L'équation (6) devient

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 1 \\ 2 \sin \varphi & 2 \cos \varphi & 0 & 2 \\ 4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi & 4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi & k(\sin \varphi - 2 \cos \varphi) & 5 \\ -2 \sin \varphi & -2 \cos \varphi & q(\sin \varphi + \cos \varphi) & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

J'ai pris ce cas particulier pour voir si l'équation en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ se simplifie. On a

$$\begin{aligned} & 2k(\sin \varphi - 2 \cos \varphi) \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 1 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 1 \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 1 \end{vmatrix} \\ & - 2q(\sin \varphi + \cos \varphi) \\ & \times \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 1 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 1 \\ 4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi & 4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi & 5 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

En développant les déterminants, on a

$$\begin{aligned} & 2k(\sin \varphi - 2 \cos \varphi) \\ & \times [\cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \\ & \quad + \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] \\ & - q(\sin \varphi + \cos \varphi) \\ & \times [5 \cos^2 \varphi + \sin \varphi(4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi) \\ & \quad - \sin \varphi(4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi) \\ & \quad - \cos \varphi(4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi) \\ & \quad - \cos \varphi(4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi) + 5 \sin^2 \varphi] = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 4k(\sin \varphi - 2 \cos \varphi) - q(\sin \varphi + \cos \varphi) \times 4 = 0, \\ & k(\sin \varphi - 2 \cos \varphi) - q(\sin \varphi + \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$(8) \quad (k - q) \operatorname{tang} \varphi = 2k + q, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{2k + q}{k - q}.$$

Dans ce cas, il n'y a qu'une valeur de φ : il n'y a bien qu'une seule parabole.

Mais, dans le cas général, l'équation reste du troisième degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

Tout cela est bien singulier !

Les quatre équations (5) deviennent

$$(9) \quad \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi - \alpha = 0,$$

$$(10) \quad \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi - \alpha = 0,$$

$$(11) \quad \alpha(4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi) + \beta(4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi) - 5\alpha = 2k(2 \cos \varphi - \sin \varphi),$$

$$(12) \quad \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \alpha = q(\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Les équations (9) et (10) donnent

$$(13) \quad \alpha = \alpha(\cos \varphi + \sin \varphi), \quad \beta = \alpha(\cos \varphi - \sin \varphi).$$

Ces valeurs étant portées dans (12), il vient

$$\alpha[(\cos \varphi + \sin \varphi) \sin \varphi + (\cos \varphi - \sin \varphi) \cos \varphi + 1] = q(\sin \varphi + \cos \varphi),$$

$$(14) \quad 2\alpha = q(\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Or, d'après (8),

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{2k + q}{\sqrt{(2k + q)^2 + (k - q)^2}} = \frac{2k + q}{\sqrt{5k^2 + 2q^2 + 2kq}}, \\ \cos \varphi = \frac{k - q}{\sqrt{5k^2 + 2q^2 + 2kq}}. \end{array} \right.$$

D'après (13) et (14), on a

$$\alpha = \frac{q}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi)^2, \quad \beta = \frac{q}{2}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

$$\alpha = \frac{q}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi),$$

et, d'après (15),

$$(16) \quad \alpha = \frac{9qk^2}{2(5k^2 + 2q^2 + 2kq)},$$

$$(17) \quad \beta = -\frac{3qk(k+2q)}{2(5k^2 + 2q^2 + 2kq)},$$

$$(18) \quad a = \frac{3kq}{2\sqrt{5k^2 + 2q^2 + 2kq}}.$$

L'équation de la parabole tangente aux quatre droites

$$y = 0, \quad y = x, \quad y = 2x + k, \quad y = -x + q$$

est donc

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi - a)^2,$$

ou

$$(19) \quad \left[x - \frac{9qk^2}{2(5k^2 + 2q^2 + 2kq)} \right]^2 + \left[y + \frac{3qk(k+2q)}{2(5k^2 + 2q^2 + 2kq)} \right]^2 = \frac{1}{4(5k^2 + 2q^2 + 2kq)} [2(k-q)x + 2(2k+q)y - 3kq]^2.$$

Autre particularité curieuse. — Le procédé qui vient le plus naturellement à l'esprit pour exprimer que (1) est tangent à (2) consiste à former l'équation aux abscisses des points d'intersection de (1) et (2), et d'écrire que les deux valeurs de x sont égales.

Au lieu de trouver la relation (4), linéaire en α , β et a , on trouve une relation du second degré en α , β et a . Il faut qu'il y ait un *facteur parasite* !

NOTE DE LA RÉDACTION. — Il semble, au premier abord, que l'article précédent aurait pu faire l'objet d'une question analogue à celles qui prennent place dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. Mais l'énoncé en eût été d'une longueur excessive. A titre

exceptionnel, nous avons donc accueilli la demande de M. Barisien, qui sollicite la résolution de l'équation (6) ou (7). Nous recevrons avec reconnaissance les observations de nos lecteurs à ce sujet; elles pourront faire l'objet d'articles figurant à la rubrique « Correspondance ».