A. PELLET

Sur les systèmes orthogonaux

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 37-39
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__37_0>

[O¹6p]

SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ;

PAR M. A. PELLET.

1. Soit

$$\Theta = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{X_i}{Y_i - \lambda} + \sum_{j=1}^{j=m} Z_j + \varphi(\lambda),$$

X_i, Y_i étant des fonctions de la seule coordonnée x_i, Z_j de z_j, et $\varphi(\lambda)$ une fonction entière de λ.

La fonction u des variables x et z définie par l'intégrale

$$\int_0^{\lambda} \lambda^\alpha \Theta \, d\lambda = u,$$

où la limite supérieure est racine de $\Theta = 0$, a pour différentielle totale le produit de $\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha}$ par

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{X'_i}{Y_i - \lambda} dx_i + \frac{\alpha}{\alpha+1}\left[\sum_{i=1}^{j=m} Z'_j \, dz_j\right],$$

si les m fonctions Y_i satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \alpha X Y' + Y X' = 0,$$

où l'on a effacé l'indice ; $\alpha > -1$.

En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_0^{\lambda} \lambda^\alpha \left[\frac{(Y_i - \lambda)X'_i - X_i Y'_i}{(Y_i - \lambda)^2}\right] d\lambda$$

$$= \lambda^\alpha \frac{(Y_i - \lambda)X'_i - X_i Y'_i}{Y_i - \lambda} - \int_0^{\lambda} (\alpha + 1) X' \lambda^{\alpha - 1} \, d\lambda,$$

en tenant compte de la relation (1); et réduisant, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha} \frac{X'_i}{Y_i - \lambda}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial u}{\partial z_j} = \int_0^\lambda Z'_j \lambda^\alpha \, dz_i = Z'_j \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$, puisque la limite supérieure annule Θ. Il en résulte que l'enveloppe des surfaces

$$\int_0^\lambda \lambda^\alpha \left[\sum_1^m \frac{x_i^2}{a_i x_i^{-\frac{2}{\alpha}} - \lambda} + 2bz + \frac{\alpha^2 b^2}{(\alpha+1)^2} \lambda + c \right] d\lambda = u,$$

λ étant le paramètre variable forme un système orthogonal lorsqu'on y fait varier u. Si b n'est pas nul, on peut remplacer c par o, et l'exposant α doit être supérieur à -1. Pour b nul, $\alpha = -1$ et

$$c = -\sum_1^m \frac{1}{a_i};$$

on a le système étudié à la page 141 des *Leçons sur les Systèmes orthogonaux* par M. Darboux.

2. De même la fonction u définie par l'intégrale

$$\int_{+\infty}^\lambda e^{-\lambda} \Theta \, d\lambda = u,$$

où la limite supérieure annule Θ, a pour différentielle totale le produit $-e^{-\lambda}$ par

$$\sum_1^m \frac{X'_i}{Y_i - \lambda} dx_i + \sum_1^n Z'_j \, dz_j,$$

si les fonctions Y_ι, X_ι sont liées par la relation

$$X_\iota Y'_\iota = X'_\iota \qquad \text{ou} \qquad Y_i = a_\iota + l x_\iota.$$

On en déduit le système orthogonal

$$(2) \qquad \int_{+\infty}^{\lambda} e^{-\lambda}\left[\sum_1^m \frac{x^2}{l x_\iota + a_\iota - \lambda} + 2 b z_1 + b^2\lambda + c\right] d\lambda = u,$$

$$\sum_1^m \frac{x_\iota}{l x_\iota + a_\iota - \lambda} + 2 b z + b^2\lambda + c = 0,$$

formé en faisant varier u dans l'enveloppe de la surface (2), où l'on considère λ comme le paramètre.