

A. PELLET

**Sur les systèmes orthogonaux**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1916), p. 37-39

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1916\\_4\\_16\\_\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__37_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O'6p]

## SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ;

PAR M. A. PELLET.

1. Soit

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{X_i}{Y_i - \lambda} + \sum_{j=1}^{j=m} Z_j + \varphi(\lambda),$$

$X_i, Y_i$  étant des fonctions de la seule coordonnée  $x_i, Z_j$  de  $z_j$ , et  $\varphi(\lambda)$  une fonction entière de  $\lambda$ .

La fonction  $u$  des variables  $x$  et  $z$  définie par l'intégrale

$$\int_0^{\lambda} \lambda^\alpha \theta \, d\lambda = u,$$

où la limite supérieure est racine de  $\theta = 0$ , a pour différentielle totale le produit de  $\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha}$  par

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{X'_i}{Y_i - \lambda} dx_i + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left[ \sum_{j=1}^{j=m} Z'_j dz_j \right],$$

si les  $m$  fonctions  $Y_i$  satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \quad \alpha XY' + YX' = 0,$$

où l'on a effacé l'indice;  $\alpha > -1$ .

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \int_0^{\lambda} \lambda^\alpha \left[ \frac{(Y_i - \lambda)X'_i - X_i Y'_i}{(Y_i - \lambda)^2} \right] d\lambda \\ &= \lambda^\alpha \frac{(Y_i - \lambda)X'_i - X_i Y'_i}{Y_i - \lambda} - \int_0^{\lambda} (\alpha + 1) X' \lambda^{\alpha-1} d\lambda, \end{aligned}$$

en tenant compte de la relation (1); et réduisant, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha} \frac{X'_i}{Y_i - \lambda}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial u}{\partial z_j} = \int_0^\lambda Z'_j \lambda^\alpha dz_j = Z'_j \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et  $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$ , puisque la limite supérieure annule  $\Theta$ . Il en résulte que l'enveloppe des surfaces

$$\int_0^\lambda \lambda^\alpha \left[ \sum_1^m \frac{x_i^2}{a_i x_i - \frac{\alpha}{2} - \lambda} + 2bz + \frac{\alpha^2 b^2}{(\alpha+1)^2} \lambda + c \right] d\lambda = u,$$

$\lambda$  étant le paramètre variable forme un système orthogonal lorsqu'on y fait varier  $u$ . Si  $b$  n'est pas nul, on peut remplacer  $c$  par 0, et l'exposant  $\alpha$  doit être supérieur à  $-1$ . Pour  $b$  nul,  $\alpha = -1$  et

$$c = - \sum_1^m \frac{1}{a_i};$$

on a le système étudié à la page 141 des *Leçons sur les Systèmes orthogonaux* par M. Darboux.

2. De même la fonction  $u$  définie par l'intégrale

$$\int_{+\infty}^\lambda e^{-\lambda \Theta} d\lambda = u,$$

où la limite supérieure annule  $\Theta$ , a pour différentielle totale le produit  $-e^{-\lambda}$  par

$$\sum_1^m \frac{X'_i}{Y_i - \lambda} dx_i + \sum_1^n Z'_j dz_j,$$

( 39 )

si les fonctions  $Y_i, X_i$  sont liées par la relation

$$X_i Y'_i = X'_i \quad \text{ou} \quad Y_i = a_i + l x_i.$$

On en déduit le système orthogonal

$$(2) \quad \int_{+\infty}^{\lambda} e^{-\lambda} \left[ \sum_1^m \frac{x^2}{l x_i + a_i - \lambda} + \gamma b z_1 + b^2 \lambda + c \right] d\lambda = u,$$
$$\sum_1^m \frac{x_i}{l x_i + a_i - \lambda} + 2 b z - b^2 \lambda + c = 0,$$

formé en faisant varier  $u$  dans l'enveloppe de la surface (2), où l'on considère  $\lambda$  comme le paramètre.