

J.-B. POMEY

Nouvelle démonstration d'un théorème d'Abel sur les séries

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 379-382

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__379_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D 2a]

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THEOREME D'ABEL
SUR LES SÉRIES;

PAR M. J.-B. POMEY.

Remarque préliminaire. — Soit, dans le plan, un ensemble (A) de points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ contenus dans un cercle C de rayon R; si je forme l'ensemble (B) des points $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ homologues respectivement des points $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ dans une transformation homothétique opérée à partir d'un point P, situé à l'intérieur du cercle C, comme centre d'homothétie et avec un rapport de similitude λ inférieur à l'unité mais positif, la figure (B) est contenue dans un cercle C' de rayon $R' = \lambda R$ et le cercle C' est contenu à l'intérieur du cercle C; les deux figures coïncideraient, naturellement, si λ était égal à l'unité. Je dirai pour abréger que j'opère sur (A) la transformation $S_\lambda^p(A)$ et que j'obtiens l'ensemble (B). J'écrirai alors $S_\lambda^p(A) \equiv (B)$.

Énoncé. — Considérons une suite de vecteurs $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ en nombre infini, mais supposons que le plus grand des vecteurs

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad s_2 = u_0 + u_1 + u_2 \dots, \quad s_n = \Sigma(u_n) \dots$$

demeure fini. Supposons que les nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ soient une infinité de nombres positifs, rangés par ordre décroissant de façon que chacun d'eux soit tout au plus égal au précédent, mais tels cependant que, si l'on se donne un nombre ε aussi petit qu'on voudra, on puisse prendre n assez grand pour que tous les nombres à partir de a_n soient inférieurs à ε . Je dis que la série

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + \dots$$

est convergente.

Démonstration. — Soient $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ les extrémités des vecteurs $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ appliqués à l'origine, comme le seraient des forces. Je puis tracer un cercle C de rayon R assez grand pour contenir à son intérieur tous les points (B) de cet ensemble, en même temps que l'origine que j'appellerai Q. Je fais la transformation $S_a^n(B)$ et j'obtiens les points $B_0^0, B_1^0, B_2^0, \dots$. Le premier B_0^0 est l'extrémité du vecteur $a_0 u_0$ et le vecteur B_{n-1}^0, B_n^0 est égal à $a_0 u_n$. Ceci posé, je fais les opérations successives :

$$\begin{aligned} S_{\alpha_0}^{\alpha} (B_0 \ B_1 \ \dots \ B_n \ \dots) &\equiv (B_0^0 \ B_1^0 \ B_2^0 \ \dots \ B_n^0 \ \dots), \\ S_{\alpha_1}^{B_0^0} (B_1^0 \ B_2^0 \ \dots \ B_n^0 \ \dots) &\equiv (B_1^1 \ B_2^1 \ B_3^1 \ \dots \ B_n^1 \ \dots), \\ S_{\underline{\alpha_1}}^{B_1^0} (B_2^1 \ B_3^1 \ \dots \ B'_n \ \dots) &\equiv (B_2^2 \ B_3^2 \ B_4^2 \ \dots \ B_n^2 \ \dots), \\ &\vdots \\ S_{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}}^{B_{n-1}^{n-1}} (B_1^{n-1} \ B_{n+1}^{n-1} \ \dots) &\equiv (B_n^n \ B_{n+1}^n \ \dots), \end{aligned}$$

Les points $B_0^0, B_1^0, B_2^0, \dots$ sont compris à l'intérieur d'un cercle C_0 de rayon $R_0 = a_0 R$; les points $B_1^1, B_2^1, B_3^1, \dots$ sont compris à l'intérieur d'un cercle C_1 de

rayon $R_1 = \frac{a_1}{a_0} R_0 = a_1 R$; les points $B_2^0, B_3^0, \dots$ sont compris à l'intérieur d'un cercle C_2 de rayon $R_2 = \frac{a_2}{a_1} R_1 = a_2 R$; les points $B_n^0, B_{n+1}^0, \dots$ sont compris à l'intérieur d'un cercle C_n de rayon $R_n = a_n R$. Or, le cercle C enveloppe le cercle C_0 qui enveloppe le cercle C_1 qui enveloppe le cercle $C_2, \dots$, qui enveloppe le cercle C_n dont le rayon tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc les centres d'homothétie successifs $Q, B_0^0, B_1^0, B_2^0, \dots, B_n^0, \dots$ qui sont compris respectivement à l'intérieur de ces divers cercles successifs tendent vers un point limite Σ bien déterminé. Maintenant, examinons les valeurs de $Q B_0^0$, de $Q B_1^0, \dots$ et de $Q B_n^0$. Tout d'abord $Q B_0^0$ est un vecteur égal à $a_0 u_0$, $B_0^0 B_1^0$ est un vecteur égal à $a_0 u_1$, donc $B_0^0 B_1^0$ est un vecteur égal à

$$\frac{a_1}{a_0} \times a_0 u_1 = a_1 u_1$$

et $Q B_1^0$ est, par suite, égal à

$$a_0 u_0 + a_1 u_1.$$

D'une façon générale, je dis que le vecteur $Q B_n^0$ est égal à

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_n u_n,$$

car la même formule subsiste quand on change n en $n+1$. En effet, il suffit de considérer les vecteurs $B_n^0 B_{n+1}^0, B_n^1 B_{n+1}^1, B_n^2 B_{n+1}^2, \dots$ pour voir qu'ils sont égaux respectivement à

$$a_0 u_{n+1}, a_1 u_{n+1}, a_2 u_{n+1}, \dots;$$

puis, quand nous prenons B_n^0 pour centre d'homothétie

thétie, nous avons enfin

$$\mathbf{B}_n^z \mathbf{B}_{n+1}^{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \mathbf{B}_n^n \mathbf{B}_{n+1}^n = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n u_{n+1} = a_{n+1} u_{n+1},$$

ce qui établit la loi et prouve en même temps que la limite de $\mathbf{Q} \mathbf{B}_n^n$ ou $\Sigma a_n u_n$ est le vecteur bien déterminé $\mathbf{Q} \Sigma$.