

MATHIEU WEILL

Sur des identités remarquables

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 369-379

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__369_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A1b]

SUR DES IDENTITÉS REMARQUABLES ;

PAR M. MATHIEU WEILL.

Soit

$$ab = \lambda, \quad a + b = \mu,$$

d'où

$$a^2 = \mu a - \lambda,$$

$$b^2 = \mu b - \lambda.$$

Considérons

$$\begin{aligned} P &= (x + ay + bz)(x + by + az) \\ &= x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy + \mu xz + (\mu^2 - 2\lambda)yz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= (x + ay + bz)(x' + ay' + bz') \\ &= xx' + a^2 yy' + b^2 zz' + a(xy' + yx') + b(zx' + xz') \\ &\quad + \lambda(yz' + zy') \end{aligned}$$

ou

$$Q = X + aY + bZ,$$

en posant

$$X = xx' - \lambda yy' - \lambda zz' + \lambda(yz' + zy'),$$

$$Y = \mu yy' + xy' + yx',$$

$$Z = \mu zz' + zx' + xz'.$$

Soit

$$\begin{aligned} R &= (x + ay + bz)(x + by + az) \\ &\quad \times (x' + ay' + bz')(x' + by' + az'). \end{aligned}$$

On aura, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} R &= (X + aY + bZ)(X + bY + aZ) \\ &= X^2 + \lambda Y^2 + \lambda Z^2 + \mu XY + \mu XZ + (\mu^2 - 2\lambda)YZ. \end{aligned}$$

R n'est autre que le produit des deux formes :

$$\begin{aligned} x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \mu xy + \mu xz + (\mu^2 - 2\lambda)yz, \\ x'^2 + \lambda y'^2 + \dots + (\mu^2 - 2\lambda)y'z'. \end{aligned}$$

Donc nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des deux formes*

$$x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + \dots + (\mu^2 - 2\lambda) yz,$$

$$x'^2 + \lambda y'^2 + \dots + (\mu^2 - 2\lambda) y'z$$

est une forme de même espèce, et cela de plusieurs manières, car on peut permuter y avec z , ce qui change X, Y, Z ; ou y' avec z' .

En donnant à λ et à μ des valeurs particulières, on obtient un grand nombre d'identités.

Faisons, par exemple, $\lambda = 1$, $\mu = -1$; il vient

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'y' - x'z' - y'z')$$

$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ,$$

avec

$$X = xx' - yy' - zz' + yz' + zy',$$

$$Y = -yy' + xy' + yx',$$

$$Z = -zz' + zx' + xz'.$$

En permutant x avec y ou avec z , ou x' avec y' , .. . on obtient diverses valeurs pour le système X, Y, Z :

En particulier, si l'on fait

$$x = x',$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

il vient

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)^2$$

$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ,$$

avec

$$X = x^2 - (y - z)^2,$$

$$Y = 2xy - y^2,$$

$$Z = 2xz - z^2.$$

On aura aussi, évidemment,

$$X_1 = y^2 - (x - z)^2,$$

$$Y_1 = 2yx - x^2,$$

$$Z_1 = 2yz - z^2,$$

$$X_2 = z^2 - (x - y)^2,$$

$$Y_2 = 2zx - x^2,$$

$$Z_2 = 2zy - y^2,$$

ce qui donne trois formes distinctes.

Dans le cas particulier des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'y' - x'z' - y'z',$$

on peut obtenir des résultats différents en partant de l'identité

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \\ = (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z), \end{aligned}$$

α et α^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.

On a

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x' + \alpha y' + \alpha^2 z') = X + \alpha Y + \alpha^2 Z,$$

avec

$$X = xx' + yz' + zy',$$

$$Y = zz' + xy' + yx',$$

$$Z = yy' + xz' + zx'.$$

Le produit

$$\begin{aligned} P &= (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z) \\ &\times (x' + \alpha y' + \alpha^2 z')(x' + \alpha^2 y' + \alpha z') \end{aligned}$$

s'écrira donc

$$\begin{aligned} & (X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \alpha^2 Y + \alpha Z) \\ &= X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - XZ - YZ. \end{aligned}$$

(372)

C'est une nouvelle forme du produit

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'y' - x'z' - y'z').$$

En particulier, si l'on prend

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

on aura

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)^2 \\ &= (x^2 + 2yz)^2 + (y^2 + 2xz)^2 + (z^2 + 2xy)^2 \\ &\quad - (x^2 + 2yz)(y^2 + 2xz) - \dots \end{aligned}$$

Reprenant la formule générale, faisons

$$\mu = 1, \quad z = 0, \quad z' = 0;$$

il vient

$$(x^2 + \lambda y^2 + xy)(x'^2 + \lambda y'^2 + x'y') = X^2 + \lambda Y^2 + XY,$$

avec

$$\begin{aligned} X &= xx' - \lambda yy', \\ Y &= yy' + xy' + yx', \end{aligned}$$

et, en faisant $\lambda = 1$,

$$(x^2 + y^2 + xy)(x'^2 + y'^2 + x'y') = X^2 + Y^2 + XY,$$

avec

$$\begin{aligned} X &= xx' - yy', \\ Y &= yy' + xy' + yx'. \end{aligned}$$

Permutant x avec y , on aura un nouveau système

$$\begin{aligned} X_1 &= yx' - xy', \\ Y_1 &= xy' + yy' + xx', \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que l'identité générale que nous avons établie conduit à un très grand nombre d'identités nouvelles, qui peuvent avoir leur intérêt en Algèbre et dans la Théorie des nombres.

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} K &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha), \end{aligned}$$

et l'expression

$$\begin{aligned} L &= a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c' \\ &= (a' + b' + c')(a' + b'\alpha + c'\alpha^2)(a' + b'\alpha^2 + c'\alpha). \end{aligned}$$

Le produit KL s'écrira

$$(A + B + C)(A + B\alpha + C\alpha^2)(A + B\alpha^2 + C\alpha)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= aa' + bb' + cc', \\ B &= ab' + bc' + ca', \\ C &= ac' + ba' + cb'. \end{aligned}$$

Pour le voir, il suffit de faire, séparément, les produits de

$$a + b + c \quad \text{par} \quad a' + b' + c',$$

de

$$a + b\alpha + c\alpha^2 \quad \text{par} \quad a' + b'\alpha^2 + c'\alpha,$$

et de

$$a + b\alpha^2 + c\alpha \quad \text{par} \quad a' + b'\alpha + c'\alpha^2.$$

On voit donc que le produit des deux formes

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc, \\ a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c', \end{aligned}$$

est une forme de même espèce. On arrive d'ailleurs à ce résultat, immédiatement, en faisant le produit des déterminants :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} &= 3abc - a^3 - b^3 - c^3, \\ \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & a' \\ c' & a' & b' \end{vmatrix} &= 3a'b'c' - a'^3 - b'^3 - c'^3. \end{aligned}$$

Leur produit est le déterminant

$$-\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix} = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

A, B, C, ayant les valeurs indiquées plus haut.

Décomposons la forme

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

et faisons le produit

$$(a + b + c)(a + b\alpha + c\alpha^2),$$

puis

$$(a + b + c)(a + b\alpha^2 + c\alpha),$$

puis

$$(a + b\alpha + c\alpha^2)(a + b\alpha^2 + c\alpha).$$

Le premier produit est égal à

$$a^2 - bc + \alpha(b^2 - ac) + \alpha^2(c^2 - ab);$$

le second est égal à

$$a^2 - bc + \alpha^2(b^2 - ac) + \alpha(c^2 - ab);$$

le troisième est égal à

$$a^2 - bc + b^2 - ac + c^2 - ab.$$

On a donc l'identité

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

avec

$$A = a^2 - bc,$$

$$B = b^2 - ac,$$

$$C = c^2 - ab.$$

La première méthode ne donne pas cette identité.

Considérons, enfin, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (b^2 - d^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 \\ + 4bd(a^2 + c^2) \\ - 4ac(b^2 + d^2).$$

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ b' & c' & d' & a' \\ c' & d' & .. & .. \\ d' & a' & .. & .. \end{vmatrix}.$$

On aura

$$P = \Delta, \Delta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

en écrivant, pour abréger,

$$1 = aa' + bb' + cc' + dd',$$

$$2 = ab' + bc' + cd' + da',$$

$$3 = ac' + bd' + ca' + db',$$

$$4 = ad' + ba' + cb' + dc'.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des deux formes*

$$(b^2 - d^2 + a^2 - c^2)(b^2 - d^2 - a^2 + c^2) \\ + 4(ad - bc)(ab - cd), \\ (b'^2 - d'^2 + a'^2 - c'^2)(b'^2 - d'^2 - a'^2 + c'^2) \\ + 4(a'd' - b'c')(a'b' - c'd')$$

est une forme de même espèce, précédée du signe (—).

Considérons, d'autre part, l'équation binôme

$$x^4 - 1 = 0,$$

et soit α l'une des racines; le déterminant ..

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

peut s'écrire, en remarquant que si l'on pose

$$A = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3,$$

on a

$$\frac{A}{\alpha} = b + c\alpha + d\alpha^2 + a\alpha^3,$$

$$\frac{A}{\alpha^2} = c + d\alpha + a\alpha^2 + b\alpha^3,$$

$$\frac{A}{\alpha^3} = d + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3;$$

$$\Delta = A \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ \frac{1}{\alpha} & c & d & a \\ \frac{1}{\alpha^2} & d & a & b \\ \frac{1}{\alpha^3} & a & b & c \end{vmatrix}.$$

On en conclut, facilement, que Δ est divisible par le produit des quatre valeurs obtenues en remplaçant dans A , α , par les quatre racines de $x^4 - 1 = 0$, c'est-à-dire par 1, -1 , i et $-i$. Or, le produit des quatre polynomes ainsi formés peut s'écrire

$$P = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2].$$

Ce produit est égal à $-\Delta$.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des deux formes*

$$P = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2],$$

$$P_1 = (a' + b' + c' + d')(a' - b' + c' - d')[(a' - c')^2 + (b' - d')^2]$$

tant, à un facteur près, des polynomes

$$a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$$

et

$$x^n - 1.$$

Le produit $\Delta\Delta_1$ est, d'une part, le produit des résultants des deux polynomes

$$a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1},$$

$$b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1}$$

et

$$x^n - 1,$$

et, d'autre part, le résultant du produit

$$A = (a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1})(b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1})$$

et de

$$x^n - 1.$$

On peut, dans tout ce qui précède, supposer nul un coefficient, ou même en supposer plusieurs nuls. Considérons, par exemple, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & c & 0 & a \\ c & 0 & a & b \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix}$$

et l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} \Delta &= -[a + b + c][a - b + c][a + ib - c][a - ib - c] \\ &= -[(a + c)^2 - b^2][(a - c)^2 + b^2]. \end{aligned}$$

Soit

$$\Delta_1 = -[(a_1 + c_1)^2 - b_1^2][(a_1 - c_1)^2 + b_1^2].$$

Le produit $\Delta\Delta_1$ sera égal à R, et l'on aura

$$\begin{aligned} R &= -[A + B + C + D][A - B + C - D] \\ &\quad \times [(A - C)^2 + (B - D)^2], \end{aligned}$$

avec

$$A = aa_1 + bb_1 + cc_1,$$

$$B = ab_1 + bc_1,$$

$$C = ac_1 + ca_1,$$

$$D = ba_1 + cb_1$$