

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 355-359

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__355_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. G. Fontené. — *Sur un article de M. Bouvaist.*
— M. Bouvaist a obtenu très élégamment (p. 184) le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles T qui sont circonscrits à une conique S , conjugués à une conique Σ , inscrits par suite à une conique S' ; ce lieu dépend uniquement de la conique S et du cercle orthoptique de la conique Σ . Voici quelques remarques concernant les cas où le lieu est un système de deux droites :

1° Quand le lieu se réduit à un point (deux droites

imaginaires), l'une des coniques Σ en nombre infini qui correspondent à l'un ou à l'autre des deux cercles orthoptiques obtenus donne un cercle comme conique S' . Il existe une infinité de triangles inscrits à ce cercle et conjugués à la conique Σ .

2° Lorsque la conique S est une parabole, l'un des triangles T a pour l'un de ses côtés la droite à l'infini du plan, et le lieu comprend la droite à l'infini. Le lieu véritable est alors une droite *réelle*. Pour obtenir ce cas dans le calcul de M. Bouvaist, on transporte l'origine au point de coordonnées $-a, 0$, on fait $\frac{b^2}{a} = p$, puis a infini, et l'on trouve

$$0x^2 + 0xy + 0y^2 + Ax + By + C = 0.$$

La conique S' passe alors au centre de la conique Σ , et ses directions asymptotiques sont conjuguées par rapport à Σ .

3° Lorsque la conique Σ est une parabole, la question est illusoire, le centre d'un cercle conjugué à une parabole étant sur la directrice. En posant alors

$$p x_0 = 2 q y_0 = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = G.$$

on doit faire G infini, x_0, y_0 et ρ infinis, la puissance de l'origine par rapport au cercle orthoptique de Σ , soit $x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$, étant un infiniment grand du même ordre que x_0 et y_0 ; le lieu est la droite double

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 \right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire la directrice comptée deux fois.

J'ai été amené à penser aux deux derniers cas en partant de la conique S' représentée paramétriquement et en regardant les valeurs du paramètre aux sommets

d'un triangle T comme données par l'équation

$$\lambda f(t) + \varphi(t) = 0,$$

où f et φ sont des polynomes du troisième degré; on écrit

$$\lambda f(t) + \varphi(t) = \lambda f(t') + \varphi(t'), \dots$$

Le lieu, représenté paramétriquement, peut ainsi se réduire à une droite, et l'on obtient les deux cas signalés ici.

M. L. Godeaux. — *Remarque sur un précédent article.* — Inséré dans le numéro de février 1916 (p. 49-61), il a pour titre : « Étude élémentaire sur l'homographie plane de période 3 et sur une surface cubique. »

Au paragraphe 9 (p. 61), nous écrivons :

« ... une surface cubique, possédant trois points doubles biplanaires ordinaires, ne peut pas nécessairement être représentée par l'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3,$$

c'est-à-dire que les trois couples de plans tangents à la surface aux trois points biplanaires ne sont pas nécessairement les faces d'un trièdre; ... »

Il s'agit évidemment d'un *trièdre donné*, car on sait que les trois couples de plans tangents dont il vient d'être question sont toujours les faces d'un trièdre. Telle que nous l'avions écrite, notre phrase pouvait prêter à confusion.

M. Henri Lebesgue. — *A propos d'un article de M. Barisien* (mai 1916). — Soient (f) une roulette

fixe, (m) une roulette mobile, P un point entraîné par (m) . Quand le centre instantané I se déplace de ds , (m) tourne de $\frac{ds}{R} + \frac{ds}{r}$, R et r étant les rayons de courbure en I des deux roulettes; rayons qu'on affectera du même signe ou non, suivant que les courbures sont d'orientations différentes ou de même orientation. Donc le déplacement de P est

$$d\tau = IP \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) ds.$$

Si (m) et (f) sont des circonférences, en prenant pour variable l'angle θ des rayons de I et de P dans (m) , et en posant $mP = l$ (on prendra l du signe de r), on a

$$d\tau = \sqrt{l^2 + r^2 - 2lr \cos \theta} \left(1 + \frac{r}{R} \right) d\theta.$$

C'est la différentielle elliptique de seconde espèce qui sert à évaluer un arc d'ellipse, d'où la possibilité de définir un arc d'ellipse ayant même longueur qu'un arc donné d'une courbe épicycloïdale générale.

Je précise : faisons correspondre les points de deux courbes épicycloïdales quand ils sont donnés par une même valeur de θ . Cette correspondance conservera les longueurs des arcs, si l'on a

$$(1) \quad \frac{r}{l} = \frac{r'}{l'}, \quad r \left(1 + \frac{r}{R} \right) = r' \left(1 + \frac{r'}{R'} \right);$$

dans ces relations, les éléments accentués sont relatifs à la seconde courbe épicycloïdale. Or, si les éléments non accentués sont donnés, on peut calculer les éléments accentués en ajoutant même la condition

$$R' = -2r',$$

auquel cas la seconde courbe est une ellipse.

Les conditions (1) ne sont pas les seules qui assurent la conservation des longueurs. Cette conservation a aussi lieu avec

$$(2) \quad \frac{r}{l} = \frac{l'}{r}, \quad l \left(1 + \frac{r}{R} \right) = r' \left(1 + \frac{r'}{R} \right).$$

Mais les conditions (1) et (2) sont en réalité identiques; il suffit, pour passer d'une forme des conditions à l'autre, de changer pour l'une des courbes de mode de génération épicycloïdale. On sait, en effet, que chaque courbe épicycloïdale admet une double génération et, entre les éléments r, l, R, r_1, l_1, R_1 relatifs à ces deux générations, on a

$$\frac{r}{l} = \frac{l_1}{r_1} = \frac{R}{R_1}.$$

On pourrait encore déduire les conditions (2) des conditions (1) en utilisant la remarque suivante : soit P' le point conjugué de P , par rapport à (m) ; son déplacement

$$d\sigma' = IP' \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) ds$$

est proportionnel à $d\sigma$, que (f) soit ou non une circonférence, car le rapport $\frac{IP'}{IP}$ est constant.
