NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EDMOND MAILLET

Sur un théorème de M. Axel Thue

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 338-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__338_1>

[I19c][I23a]

SUR UN THÉORÈME DE M. AXEL THUE;

PAR M. EDMOND MAILLET.

Un important Mémoire de M. Axel Thue, paru dans le Tome 135 (1909) du *Journal für Mathematik* (Crelle), p. 284-305, me donne occasion à quelques réflexions;

je ne m'occuperai que des théorèmes I, II et IV, laissant de côté le théorème III.

I. L'auteur s'occupe principalement d'établir le théorème suivant (théorème I) :

Soit ρ *une racine positive d'un polynome entier de degré* r *à coefficients entiers ; la relation*

$$(1) \qquad 0 < |q\rho - p| < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

où c *et* k *sont deux quantités positives quelconques* > 0, *n'a qu'un nombre limité de solutions en entiers positifs* p *et* q.

Or il m'a semblé que, dès le début [p. 286, équation (6)], l'auteur faisait *implicitement* la restriction que le polynome $F(x)$, de degré r, à coefficients entiers, dont ρ est racine, et qu'on peut évidemment supposer irréductible pour la démonstration du théorème I, avait pour coefficient de son terme en x^r l'unité, c'est-à-dire que ρ était un nombre entier algébrique ([1]). Il s'ensuivrait donc à première vue une restriction importante des conclusions de M. A. Thue, c'est-à-dire des théorèmes I, II et IV dont je m'occupe ici.

Heureusement, du fait que les racines ρ_1 d'une équation algébrique

$$\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \ldots + \alpha_r = 0 \qquad (\alpha_0 > 0),$$

à coefficients entiers, sont de la forme $\rho_1 = \frac{\rho}{\alpha_0}$, où ρ,

([1]) De toutes façons, ce qui suit montre qu'il suffit d'établir les théorèmes I, II de M. Thue en supposant ρ entier algébrique, et que ces théorèmes s'étendent ensuite facilement au cas où ρ est un nombre algébrique quelconque.

racine de

$$\rho^r + \alpha_1 \rho^{r-1} + \alpha_2 \alpha_0 \rho^{r-2} + \ldots + \alpha_r \alpha_0^{r-1} = 0,$$

est un entier algébrique, les théorèmes I et II de M. Thue s'étendent immédiatement à ρ_1, si on ne les suppose établis que pour ρ.

II. Envisageons en effet le théorème I, supposé inexact en ce qui concerne ρ_1; on pourrait écrire, pour une infinité de valeurs entières de p et q,

$$|q\rho_1 - p| < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

et

$$|q\rho - p\alpha_0| < \frac{c\alpha_0}{q^{\frac{r}{2}+k}} = \frac{c_1}{q^{\frac{r}{2}+k}} \qquad (c_1 \text{ analogue à } c),$$

ce qui est en contradiction avec (1); (1) et le théorème I subsistent donc pour ρ_1.

Passons au théorème II : *soit le développement en fraction continue ordinaire de* ρ_1 :

$$\rho_1 = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots,$$

où les a_i sont des entiers positifs, tous > 0 *sauf l'entier a_0 qui peut être nul, et*

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{n-1}.$$

Supposant le théorème II établi pour ρ, je vais le démontrer pour ρ_1, c'est-à-dire faire voir que l'inégalité

$$a_n > Q_n^{k+\frac{r}{2}-1},$$

où k est un nombre positif arbitraire donné quelconque > 0, n'est possible que pour des valeurs limitées de n.

En effet, en admettant le contraire, on aurait pour une infinité de valeurs de n, avec les notations de M. Thue pour les fractions continues,

$$Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1},$$

$$\left| \rho_1 - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{a_n Q_n^2},$$

$$| Q_n \rho_1 - P_n | < \frac{1}{a_n Q_n} < Q_n^{-\left(\frac{r}{2}+k\right)},$$

contrairement au théorème I (¹).

III. Le théorème IV de M. Thue étant une application du théorème I, dont nous venons de vérifier entièrement l'exactitude, n'a pas besoin d'être complété. Je rappelle son énoncé :

L'équation $U(p, q) = c$, *où* c *est une constante donnée, et* U *un polynome entier homogène et irréductible à coefficients entiers, n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs* p *et* q, *quand le degré de* U *est* > 2.

Il est susceptible de sérieuses extensions basées sur la méthode employée par M. Thue, méthode dont le principe était déjà connu de Lagrange et de J. Liouville et qui a été plusieurs fois utilisé (²). Nous allons le montrer.

Soit l'équation de degré r, irréductible (c'est-à-dire de premier membre indécomposable en un produit

---

(¹) Cette démonstration simple est vraisemblablement celle de M. Thue qui indique, sans plus de détails, le théorème II comme conséquence immédiate du théorème I.

(²) *Voir* par exemple mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (Jordan), 5ᵉ série, t. VI, p. 265.

de facteurs de même forme)

$$(2)\quad \varphi_r(x, y) - [\varphi_s(x, y) + \varphi_{s-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0] = 0,$$

où $r > s$ et où φ_i est un polynome homogène et de degré i en x, y, φ_r ayant ses coefficients entiers. Soit encore $x = p$, $y = q$ une solution en nombres entiers; on peut toujours supposer p, q positifs, à condition de substituer au besoin à (2) l'équation qu'on en déduit en y changeant soit x en $-x$, soit y en $-y$, soit à la fois x et y en $-x$ et $-y$. Admettant que φ_r contienne effectivement des termes en x^r et y^r, on écrira, si $p < q$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ étant distincts et $\neq 0$,

$$(3)\quad \varphi_r(x, y) = A(x - \beta_1 y)^{a_1} \ldots (x - \beta_n y)^{a_n}, \quad a_1 + \ldots + a_n = r,$$

et si $p > q$,

$$\varphi_r(x, y) = B\left(y - \frac{x}{\beta_1}\right)^{a_1} \cdots \left(y - \frac{x}{\beta_n}\right)^{a_n}.$$

Ce dernier cas où $p > q$ se traite d'ailleurs absolument comme le premier où $p < q$: il suffit d'intervertir le rôle de x et y, de p et q. Soit donc $p < q$; d'après (2) et (3), on a

$$(4)\quad \begin{aligned} \varphi_r(p, q) &= A(p - \beta_1 q)^{a_1} \ldots (p - \beta_n q)^{a_n} \\ &= q^s \varphi_s\left(\frac{p}{q}, 1\right) + \ldots + \varphi_0 = \lambda q^s, \end{aligned}$$

où $|\lambda|$ est une quantité limitée supérieurement en fonction des coefficients de $\varphi_s, \varphi_{s-1}, \ldots, \varphi_0$; par suite,

$$A\left(\frac{p}{q} - \beta_1\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{p}{q} - \beta_n\right)^{a_n} = \lambda q^{s-r};$$

si q est assez grand, un des facteurs du premier membre autres que A a son module arbitrairement petit; ce sera par exemple [1] $\left(\frac{p}{q}-\beta_1\right)^{a_1}$; on en conclut d'abord que β_1 est réel; ensuite, puisque

$$\frac{p}{q}-\beta_i=\beta_1-\beta_i+\frac{p}{q}-\beta_1$$

diffère arbitrairement peu de $\beta_1-\beta_i$, qui est $\neq 0$,

$$(4\,bis)\qquad \left(\frac{p}{q}-\beta_1\right)^{a_1}=\lambda_1 q^{s-r},\qquad |p-\beta_1 q|=\lambda_2 q^{\frac{s-r}{a_1}+1},$$

où λ_1, λ_2 sont analogues à λ; si la racine β_1 ou le facteur $x-\beta_1 y$ appartient à un facteur irréductible de degré δ de $\varphi_r(x,y)$, on a

$$(5)\qquad \delta a_1 \leqq r,$$

et, d'après le théorème I de M. Thue,

$$|p-\beta_1 q|\geqq c\,q^{-\left(\frac{\delta}{2}+k\right)};$$

il faudra donc, c étant arbitraire,

$$(6)\qquad \frac{r-s}{a_1}\leqq\frac{\delta}{2}+k+1,\qquad s\geqq r-a_1\frac{\delta}{2}-a_1 k-a_1;$$

on a une condition de même nature pour chacune des racines β_i réelles; dans le cas où $\varphi_r(x,y)$ est irréductible, $a_1=1$, $\delta=r$, et

$$(6\,bis)\qquad s\geqq\frac{r}{2}-k-1,$$

c'est-à-dire

$$(6\,ter)\qquad \begin{cases} s\geqq r_1-1, & \text{si}\quad r=2r_1,\\ s\geqq r_1, & \text{si}\quad r=2r_1+1.\end{cases}$$

---

[1] Ce facteur sera $\neq 0$, car la droite $x=\beta_1 y$ ne coupe la courbe (2) qu'en un nombre fini de points quand β_1 est rationnel, puisque (2) est irréductible.

Nous en concluons le théorème suivant :

Théorème A. — *L'équation indéterminée* (2), *où* $\varphi_r(x, y)$ *contient un terme en* x^r *et un en* y^r, *ne peut admettre une infinité de solutions en nombres entiers* x, y *que si* s *satisfait aux conditions* (6), *et même, quand* $\varphi_r(x, y)$ *est irréductible, à la condition* (6 *ter*).

Il est assez remarquable que ce théorème ne suppose aucunement entiers ni rationnels les coefficients de φ_s, φ_{s-1}, $\ldots$, φ_0 [1]. Quand on prend $s = 0$ et $\varphi_r(x, y)$ irréductible, on retrouve le théorème IV de M. Thue.

Le théorème IV de M. Thue peut, grâce à des transformations convenables, conduire à montrer l'impossibilité d'une infinité de solutions pour des équations auxquelles il ne s'applique pas directement. L'auteur en a donné divers exemples simples [2] : pour $n > 2$, les équations

$$x^n + (x+h)^n = y^n, \qquad x^2 - h^2 = ky^n,$$
$$(x+h)^3 + x^3 = ky^n, \qquad (x+h)^4 - x^4 = ky^n,$$

avec n, h, k entiers donnés, n'ont chacune qu'un nombre fini de solutions en entiers x, y ; on vérifie en effet que, dans le cas contraire, une certaine équation de la forme $aX^n + bY^n = c$, où $|a|$, $|b|$, $|c|$ sont des entiers limités, et à laquelle s'applique le théorème IV

(1) On voit facilement, il est vrai, qu'une équation indéterminée irréductible en x et y ne peut avoir une infinité de solutions en nombres entiers sans avoir ses coefficients rationnels. Il est donc loisible de supposer *a priori* tous les coefficients entiers dans la formule (2). D'après la même méthode, le théorème A comporte certaines extensions au cas où φ_r a un facteur de la forme $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$.

(2) *Mémoires de la Société des Sciences de Christiania*, 1908, 1re note, p. 33.

de M. Thue, devrait avoir une infinité de solutions en entiers X et Y.

Les méthodes de M. Thue ne donnent malheureusement pas en général de procédé très pratique pour l'évaluation d'une limite supérieure des valeurs absolues des solutions en entiers p, q.

Mentionnons en terminant que, au point de vue des applications, le théorème A précédent est à rapprocher d'un théorème de M. Runge (1) qui, souvent, ne fait pas double emploi avec lui.

Remarque. — Si l'on pouvait établir pour les quantités $|p - \beta_i q|$ (β_i réel), quand q est assez grand, une limite inférieure cq^{-h} plus avantageuse que celle qui résulte du théorème I de M. Thue, la formule (*4 bis*) donnerait lieu à un théorème corrélatif analogue au théorème A, mais plus avantageux.