

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1916. Sujets des compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 314-318

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__314_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
EN 1916 ⁽¹⁾.
SUJETS DES COMPOSITIONS.**

Mathématiques.

Première composition.

I. Intégrer l'équation différentielle

$$(E) \quad 2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

Une intégrale étant déterminée par la valeur qu'elle prend pour une valeur particulière de x , dans quel intervalle de variation de x cette intégrale demeure-t-elle définie? Que devient l'intégrale aux limites de cet intervalle?

II. Faire dans l'équation (E) le changement de variables

$$x = \frac{(1+u)^2}{4u}, \quad y = \frac{2uv}{1+u^2};$$

déduire du résultat de ce calcul une représentation

⁽¹⁾ Il n'y a pas eu de concours en 1915. Celui-ci est ouvert pour l'admission de 70 élèves.

paramétrique des intégrales de l'équation (E). Cette représentation est-elle valable pour toutes les valeurs réelles de x ? La comparer au résultat de l'intégration directe de l'équation (E).

III. *On propose de satisfaire à l'équation (E) par un développement de la forme*

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{|x|}} \psi(x),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux séries entières en x et où $|x|$ désigne la valeur absolue de x . Trouver les séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Dans quel intervalle le nouveau mode de représentation des intégrales ainsi obtenu est-il valable? Le comparer au résultat de l'intégration directe.

IV. *Forme de la courbe $y = \varphi(x)$. Forme des diverses courbes intégrales. (4 heures.)*

Deuxième composition.

Un plan vertical est rapporté à deux axes Ox et Oy ; l'axe Ox est horizontal; Oy est vertical et dirigé vers le haut. Dans ce plan se trouve la trajectoire d'un point de masse unité, libre, pesant et subissant de la part de l'air une résistance R tangente à la trajectoire. Les unités choisies étant la seconde de temps et le mètre, la trajectoire a pour équation

$$(1) \quad y = ax - 8x^2 - x^3 \quad (a > 0).$$

Le projectile part de l'origine O sur l'arc OFM situé dans l'angle des coordonnées positives; il

monte au point le plus haut F et retombe ensuite sur Ox en son point de chute M.

I. Calculer, en fonction de a , le coefficient angulaire m de la trajectoire au point de chute M et la flèche f , ordonnée du point F.

II. Exprimer, en fonction du temps t , l'abscisse x du mobile et calculer le temps T qu'il met à parcourir l'arc OFM. Déterminer, en fonction de x , la composante X suivant Ox de la résistance R.

III. Évaluer le travail des forces agissant sur le mobile pendant le trajet OFM. Trouver la grandeur V_M de la vitesse au point de chute.

IV. Calculer l'aire balayée par le vecteur vitesse durant le même trajet.

V. Divers mobiles identiques partent simultanément de l'origine sur les cubiques qui correspondent aux différentes valeurs de a . Trouver, à un instant ultérieur quelconque, le lieu de leurs positions, l'enveloppe de leurs vitesses et l'enveloppe des normales à leurs trajectoires.

Nota. — Ce problème se rattache au tir du canon de campagne de 75.

(4 heures.)

Calcul.

L'échelle des abscisses horizontales étant 1^{cm} pour 500^m; l'échelle des ordonnées verticales, 1^{cm} pour 0^m,50, si l'on prend pour unité le centimètre du dessin, la trajectoire du projectile de 75^{mm} est représentée approximativement par la formule

$$(1) \quad y = ax - 8x^2 - x^3,$$

l'origine O étant au point de départ du projectile. Au deuxième point M d'intersection avec Ox, le coefficient angulaire m de la tangente à la courbe (1) est

$$(2) \quad m = 8\sqrt{a+16} - 2a - 32.$$

La durée en secondes du trajet jusqu'au point de chute M est, dans le même système d'unités, donnée par la formule

$$(3) \quad T = \frac{1}{9\sqrt{\gamma}} \left\{ (6\sqrt{a+16} - 8)^{\frac{3}{2}} - 64 \right\}.$$

où γ est l'accélération de la pesanteur dont la grandeur est 981 C.G.S.

La lettre α désignant l'angle de la trajectoire vraie avec le plan horizontal au départ, on fait varier α par degrés de 0° à 10°. Calculer, pour chacun des points de chute correspondants M, les éléments suivants :

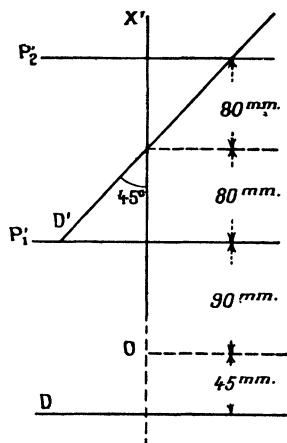
- 1° *En mètres, la portée réelle OM;*
 - 2° *En secondes, la durée T du trajet;*
 - 3° *En degrés, l'angle μ que fait la trajectoire réelle avec le plan horizontal en M.*
- (1 heure.)

Épure de Géométrie descriptive.

Un hyperboloïde de révolution a pour axe la verticale (O, X'), pour génératrice la droite de front (D, D'). On considère le solide S limité par l'hyperboloïde et les deux plans horizontaux P₁ et P₂.

Un cylindre de révolution a pour axe la droite (D, D') et pour génératrice celle des génératrices de l'hyperboloïde qui est parallèle à (D, D').

On représentera ce qui reste du solide S supposé



opaque, quand on en supprime la partie située à l'intérieur du cylindre.

On se conformera, pour la mise en place, aux données du croquis. Le point O sera pris sur le grand axe de la feuille, à 120^{mm} au-dessus du bord inférieur de celle-ci. (4 heures.)