

AURIC

Sur le barycentre des triangles pseudopodaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 305-310

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__305_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'1c]

SUR LE BARYCENTRE DES TRIANGLES PSEUDOPODAIRES ;

PAR M. AURIC.

Considérons, dans un triangle de référence $A_1 A_2 A_3$, deux points M, N dont les coordonnées barycentriques sont $m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3$.

Par M menons une parallèle à $A_1 N$ qui coupe $A_2 A_3$ en M_1 ; on mène deux autres droites analogues qui

déterminent deux autres points M_2, M_3 ; le triangle

$$M_1 M_2 M_3$$

sera appelé *pseudopodaire* de M par rapport à N; il est clair que si N est l'orthocentre H de $A_1 A_2 A_3$, $M_1 M_2 M_3$ est le triangle podaire de M; si M et N viennent coïncider en un point quelconque P, on obtient le triangle cévien ou pédal de P.

Les coordonnées barycentriques de M_1, M_2, M_3 sont

$$\begin{array}{lll} 0, & m_2 + \frac{n_2 m_1}{n_2 + n_3}, & m_3 + \frac{n_3 m_1}{n_2 + n_3}, \\ m_1 + \frac{n_1 m_2}{n_3 + n_1}, & 0, & m_3 + \frac{n_3 m_2}{n_3 + n_1}, \\ m_1 + \frac{n_1 m_3}{n_1 + n_2}, & m_2 + \frac{n_2 m_3}{n_1 + n_2}, & 0. \end{array}$$

Dès lors le barycentre U de $M_1 M_2 M_3$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} u_1 &= 2m_1 + n_1 \left(\frac{m_2}{n_3 + n_1} + \frac{m_3}{n_1 + n_2} \right) \\ &= \left(2 - \frac{n_1}{n_2 + n_3} \right) m_1 + n_1 \left(\frac{m_1}{n_2 + n_3} + \frac{m_2}{n_3 + n_1} + \frac{m_3}{n_1 + n_2} \right) \end{aligned}$$

et deux autres expressions analogues.

Lorsque M et N viennent coïncider en P la coordonnée u_1 peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 \left(3 + \frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_1} + \frac{p_3}{p_1 + p_2} \right) \\ &\quad - (p_1 + p_2 + p_3) \frac{p_1}{p_2 + p_3} \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$u_1 = \frac{p_1}{p_3 + p_1} + \frac{p_1}{p_1 + p_2},$$

car alors les coordonnées du triangle pédal sont

$$\begin{array}{ccc} 0, & \frac{p_2}{p_2 + p_3}, & \frac{p_3}{p_2 + p_3}, \\ \frac{p_1}{p_3 + p_1}, & 0, & \frac{p_3}{p_3 + p_1}, \\ \frac{p_1}{p_1 + p_2}, & \frac{p_2}{p_1 + p_2}, & 0. \end{array}$$

Pour que U soit situé sur la droite MN, on doit avoir

$$\frac{n_1 m_1}{n_2 + n_3} = \mu n_1 - \lambda m_1$$

ou

$$\frac{\mu}{m_1} = \frac{1}{n_2 + n_3} + \frac{\lambda}{n_1}$$

et, par élimination de λ et de μ ,

$$\Sigma n_1(n_2^2 - n_3^2)m_2 m_3 = 0.$$

Lorsque N est donné cette équation représente une conique circonscrite au triangle de référence et passant par N, par l'inverse de N $\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}\right)$ et par le complémentaire de N $(n_2 + n_3, n_3 + n_1, n_1 + n_2)$: cette conique qui joue un rôle assez important dans la géométrie du triangle est la transformée inverse de la droite qui joint un point N à son inverse (N^{-1}).

On a donc le théorème suivant :

Si N, son inverse (N^{-1}) et l'inverse de M (M^{-1}) sont en ligne droite, le barycentre du triangle pseudopodaire de M par rapport à N est sur la droite MN.

Lorsque M est donné, l'équation précédente représente une cubique circonscrite au triangle de référence et passant par M, par l'inverse de M (M^{-1}), par l'anti-complémentaire de M

$$(m_2 + m_3 - m_1, m_3 + m_1 - m_2, m_1 + m_2 - m_3)$$

et par le barycentre G de $A_1 A_2 A_3$. Cette cubique est une transformée homographique de la cubique lieu des centres des coniques circonscrites à $A_1 A_2 A_3$ et dont les normales en ces trois points sont concourantes : le lieu du point de concours est également, comme on sait, une transformée homographique de cette cubique.

Le barycentre U vient en N pour $\lambda = -2$, c'est-à-dire

$$\frac{\mu}{m_1} = \frac{1}{n_2 + n_3} - \frac{2}{n_1},$$

U vient en M pour $\lambda = 1$ et λ racine de l'équation

$$X^2 + X + \frac{2n_1 n_2 n_3}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)(n_3 + n_1)} = 0;$$

il y a donc trois positions (réelles ou imaginaires) de M pour lesquelles N étant donné le barycentre de $M_1 M_2 M_3$ est en M.

Lorsque M est le complémentaire de N

$$(m_1 = n_2 + n_3, \dots),$$

on a

$$u_1 = 2m_1 + 2n_1 = 2(n_1 + n_2 + n_3),$$

le barycentre de $M_1 M_2 M_3$ coïncide avec celui de $A_1 A_2 A_3$ et cela était aisé à prévoir puisque, dans ce cas, M_1 est le milieu de $A_2 A_3$, M_2 celui de $A_3 A_1$, etc. en vertu de la relation

$$NG = 2GM.$$

On peut se demander dans quel cas un triangle pseudopodaire est également pédal, c'est-à-dire homologique de $A_1 A_2 A_3$; il suffit d'écrire l'égalité des deux termes diagonaux du déterminant formé par les coordonnées de ce triangle.

On obtient après réductions

$$\begin{aligned} \Sigma n_1^2 (n_2 + n_3) m_2 m_3 (m_2 - m_3) \\ = \Sigma n_1 (n_3^2 - n_2^2) m_2 m_3 (m_2 + m_3). \end{aligned}$$

Selon qu'on se donne M ou N on a une cubique circonscrite au triangle de référence pour le lieu de l'autre point; mais le problème se simplifie beaucoup si l'on se place dans l'hypothèse du théorème de Kariya ⁽¹⁾, c'est-à-dire si l'on admet que les inverses de M , de N et du centre d'homologie P , soit (M^{-1}) , (N^{-1}) , (P^{-1}) , sont en ligne droite.

On trouve aisément que

$$\mu m_1^2 = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3},$$

d'où

$$\frac{\lambda}{n_1} = m_2^2 + m_3^2 - m_1^2.$$

Le point (m_1^2, m_2^2, m_3^2) que nous représenterons par (M^2) est alors le complémentaire de (N^{-1}) .

Le centre d'homologie P de $M, M_2 M_3$ et $A, A_2 A_3$ a pour coordonnées

$$\frac{1}{m_2 + m_3 - m_1}, \quad \frac{1}{m_3 + m_1 - m_2}, \quad \frac{1}{m_1 + m_2 - m_3},$$

de sorte que (P^{-1}) est l'anticomplémentaire de M .

Le barycentre de $M, M_2 M_3$ se trouve à la fois sur la droite qui joint P à l'inverse de M et sur celle qui joint M au point $(\frac{m_1^2}{n_1}, \frac{m_2^2}{n_2}, \frac{m_3^2}{n_3})$ que nous désignerons par $(\frac{M^2}{N})$.

On peut donc énoncer le théorème suivant qui est une généralisation de celui de Kariya :

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, numéro de mai 1915, p. 222.

Soit $M_1 M_2 M_3$ le triangle pseudopodaire de M par rapport à N : admettons en outre que $M_1 M_2 M_3$ est le triangle pédal d'un point P et que M, N, P sont sur une conique C circonscrite à $A_1 A_2 A_3$. Si l'on prend sur les droites MM_1, MM_2, MM_3 des points Q_1, Q_2, Q_3 tels que

$$\frac{MM_1}{MQ_1} = \frac{MM_2}{MQ_2} = \frac{MM_3}{MQ_3},$$

les droites $A_1 Q_1, A_2 Q_2, A_3 Q_3$ concourent en un point Q dont le lieu est précisément la conique C lorsque le rapport ci-dessus varie. Le barycentre de $M_1 M_2 M_3$ se trouve à l'intersection des droites

$$P(M^{-1}) \quad \text{et} \quad M\left(\frac{M^2}{N}\right).$$

En particulier, dans le cas du théorème de Kariya proprement dit, M est le centre du cercle inscrit I , N l'orthocentre H , P le point de Gergonne, (M^{-1}) le point de rencontre des antibissectrices et

$$\left(\frac{M^2}{N}\right) = (\sin 2 A_1, \sin 2 A_2, \sin 2 A_3)$$

le centre du cercle circonscrit O .

On a donc la proposition suivante :

Le centre de gravité du triangle podaire de I se trouve à l'intersection de la droite OI avec celle qui joint le point de Gergonne à l'inverse de I .

Cette proposition s'applique également aux cercles ex-inscrits à la condition de prendre les points correspondants.