

MATHIEU WEILL

Propriété de certaines formes quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 266-268

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__266_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[115]

PROPRIÉTÉ DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES ;

PAR M. MATTHIEU WEILL.

THÉORÈME. — *Le produit de deux formes*

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

peut, d'une infinité de manières, être représenté par une forme de même espèce.

On a

$$a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{4} [(2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2].$$

Posons

$$\begin{aligned} 2a - b - c &= A, & 2a' - b' - c' &= A', \\ b - c &= B, & b' - c' &= B'. \end{aligned}$$

On a, identiquement,

$$(A^2 + 3B^2)(A'^2 + 3B'^2) = (AA' + 3BB')^2 + 3(AB' - BA')^2$$

Posons

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \gamma &= AA' + 3BB', \\ \beta - \gamma &= AB' - BA'; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\beta &= 2\alpha - AA' - 3BB' + AB - BA' \\ &= 2\alpha - 4aa' - 4bb' - 4cc' + 4ab' + 4bc' + 4ca', \\ 2\gamma &= 2\alpha - AA' - 3BB' - AB' + BA' \\ &= 2\alpha - 4aa' - 4bb' - 4cc' + 4ac' + 4ba' + 4cb'. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') \\ &= \frac{1}{16} (A^2 + 3B^2)(A'^2 + 3B'^2) \\ &= \frac{1}{16} [(AA' + 3BB')^2 + 3(AB' - BA')^2] \\ &= \frac{1}{4} [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma]. \end{aligned}$$

Posons $\frac{\alpha}{2} = K$,

$$\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= \lambda, \\ ab' + bc' + ca' &= \mu, \\ ac' + ba' + cb' &= \nu, \end{aligned}$$

$$L = K - \lambda + \mu,$$

$$M = K - \lambda + \nu,$$

il vient

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') \\ \equiv K^2 + L^2 + M^2 - KL - KM - LM,$$

où K est *arbitraire*; le théorème est donc établi.

En particulier, si l'on fait $K = 0$, la forme se réduit à $L^2 + M^2 - LM$.

On peut généraliser beaucoup les résultats précédents.

Considérons, par exemple, l'expression

$$(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 \\ = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 4ab + 4cd.$$

Le produit de deux formes analogues s'écrira

$$(u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2) = (uu' + vv')^2 + (uv' - vu')^2.$$

Posons

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = uu' + vv', \\ \alpha + \beta - \gamma - \delta = uv' - vu':$$

on tirera de là γ et δ en fonction des deux arbitraires α , β et des quantités connues a , b , ..., a' , b' , c' , d' . Dès lors, le produit des deux formes

$$2a^2 + 2b^2 + \dots + 4cd, \\ 2a'^2 + 2b'^2 + \dots + 4c'd'$$

pourra se mettre, d'une double infinité de manières, sous la forme

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 + \dots + 4\gamma\delta.$$