

R. BOUVAIST

Détermination du rayon de courbure en un point de certaines courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 230-234

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__230_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'2e]

**DÉTERMINATION DU RAYON DE COURBURE EN UN POINT
DE CERTAINES COURBES PLANES;**

PAR M. R. BOUVAIST.

THÉOREME.— *Si l'on considère un faisceau linéaire tangentiel de courbes planes $f + \lambda\varphi = 0$, les courbes de base $f = 0$, $\varphi = 0$ étant de classe m :*

1° *Le point de contact O de la courbe du faisceau qui touche une droite donnée Δ est l'intersection de Δ avec la droite joignant les pôles de Δ par rapport aux courbes $f = 0$, $\varphi = 0$.*

2° *Le rayon de courbure O de la courbe considérée est donné par la formule*

$$\rho = - (m-1) \frac{\frac{1}{\mu_1 \mu_2} - \frac{1}{\mu'_1 \mu'_2}}{\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}},$$

y_1 et y_2 désignant les distances des pôles P_1 et P_2 de la droite Δ par rapport à $f = 0$ et $\varphi = 0$ à cette droite; μ_1 , μ_2 , μ'_1 , μ'_2 les tangentes des angles que font avec Δ les tangentes menées de O aux coniques polaires de Δ par rapport à $f = 0$, $\varphi = 0$.

1° Les pôles de Δ par rapport aux courbes du faisceau considéré sont sur une droite Δ_1 , le point de contact de Δ avec la courbe du faisceau qui lui est tangente étant son pôle par rapport à cette courbe, la proposition est démontrée.

2° Prenons pour origine le point O, pour axes des x et des y la droite Δ et la perpendiculaire à cette droite en O, on voit facilement que le rayon de courbure en O d'une courbe $\psi(u, v, w) = 0$ tangente à Δ en ce point est donné par la formule $\rho = - \frac{v \psi''_{uu}}{\psi'_{vw}}$.

Ceci posé, nous pouvons écrire l'équation de la courbe $f(u, v, w) = 0$ sous la forme

$$\begin{aligned} (u, v, w) \\ = [A u^m + B u^{m-1} v \\ + C u^{m-2} v^2 + \dots + I u^2 v^{m-2} + L u v^{m-1} + K v^m] \\ + w [A_1 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} v + \dots + L_1 u v^{m-2} + K_1 v^{m-1}] \\ + w^2 [A_2 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} v + \dots + L_2 u v^{m-2} + K_2 v^{m-1}] \\ + w^3 f_{m-3} + \dots + w^{m-1} f_1 + w^m = 0, \end{aligned}$$

$f_{m-3}, f_{m-4}, \dots, f_1$ désignant des polynômes homogènes en u, v de degré égal à l'indice dont ils sont affectés. Nous supposons l'équation de la courbe $\varphi(u, v, w) = 0$ écrite sous la même forme, les coefficients des différents termes étant $A', B', \dots, A'_1, B'_1, \dots$.

Les pôles de Δ par rapport à f et φ seront

$$\begin{aligned} u(f'_u)_0 + v(f'_v)_0 + w(f'_w)_0 &= 0, \\ u(\varphi'_u)_0 + v(\varphi'_v)_0 + w(\varphi'_w)_0 &= 0, \end{aligned}$$

où $(f'_u)_0, (f'_v)_0, \dots$ désignent les dérivées correspondantes dans l'expression desquelles on a fait $u = w = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} L u + m K v + K_1 w &= 0, \\ L' u + m K' v + K'_1 w &= 0; \end{aligned}$$

les coniques polaires

$$\begin{aligned} & u^2(f''_{u^2})_0 + v^2(f''_{v^2})_0 + w^2(f''_{w^2})_0 \\ & + 2uv(f''_{uv})_0 + 2uw(f''_{uw})_0 + 2vw(f''_{vw})_0 = 0, \\ & u^2(\varphi''_{u^2})_0 + v^2(\varphi''_{v^2})_0 + w^2(\varphi''_{w^2})_0 \\ & + 2uv(\varphi''_{uv})_0 + 2uw(\varphi''_{uw})_0 + 2vw(\varphi''_{vw})_0 = 0 \end{aligned}$$

seront de même

$$\begin{aligned} & 2I u^2 + m(m-1)K v^2 + 2K_2 w^2 \\ & + 2(m-1)L uv + 2L uw + 2(m-1)K_1 vw = 0, \\ & 2I' u^2 + m(m-1)K' v^2 + 2K'_2 w^2 \\ & + 2(m-1)L' uv + 2L' uw + 2(m-1)K'_1 vw = 0. \end{aligned}$$

Nous avons d'autre part, pour expression du rayon de courbure en O,

$$\rho = - \frac{v(f''_{u^2} + \lambda \varphi''_{u^2})}{f'_{w^2} + \lambda \varphi'_{w^2}} = - \frac{2(I + \lambda I')}{K_1 + \lambda K'_1};$$

or la courbe considérée étant tangente en O à Ox, nous aurons

$$K + \lambda K' = 0, \quad \text{d'où} \quad \rho = -2 \frac{\frac{I}{K} - \frac{I'}{K'}}{\frac{K_1}{K} - \frac{K'_1}{K'}}.$$

Si l'on remarque maintenant que les ordonnées des pôles de Ox par rapport à $f=0$, $\varphi=0$ sont

$$y_1 = \frac{mK}{K_1}, \quad y_2 = \frac{mK'_1}{K'}.$$

et que les produits des coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine aux coniques polaires de ce point sont

$$\mu_1 \mu_2 = m(m-1) \frac{K}{2I}, \quad \mu'_1 \mu'_2 = m(m-1) \frac{K'}{2I'},$$

nous aurons

$$\rho = -(m-1) \frac{\frac{1}{\mu_1 \mu_2} - \frac{1}{\mu'_1 \mu'_2}}{\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}}.$$

Construction de la formule donnée. — Désignons par P_1 et P_2 les pôles de Δ par rapport à $f=0$, $\varphi=0$; par p_1 et p_2 les projections de ces points sur Δ ; par $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ les intersections des droites $P_1 p_1, P_2 p_2$, avec les tangentes issues de O aux coniques polaires de Δ .

Nous aurons visiblement

$$\frac{1}{\mu_1 \mu_2} = \frac{\overline{Op_1}^2}{p_1 \alpha_1 \times p_1 \beta_1}, \quad \frac{1}{\mu'_1 \mu'_2} = \frac{\overline{Op_2}^2}{p_2 \alpha_2 \times p_2 \beta_2},$$

ou en désignant par γ_1 et γ_2 les orthocentres des triangles $O\alpha_1\beta_1, O\alpha_2\beta_2$,

$$\frac{1}{\mu_1 \mu_2} = \frac{Op_1}{p_1 \gamma_1}, \quad \frac{1}{\mu'_1 \mu'_2} = \frac{Op_2}{p_2 \gamma_2}.$$

Menons par O les parallèles à $P_1 \gamma_1, P_2 \gamma_2$ et désignons par P'_1 et P'_2 leurs intersections respectives avec $P_1 p_1, P_2 p_2$, nous aurons

$$\frac{1}{\mu_1 \mu_2} = \frac{Op_1}{p_1 \gamma_1} = \frac{P'_1 p_1}{P_1 p_1}, \quad \frac{1}{\mu'_1 \mu'_2} = \frac{Op_2}{p_2 \gamma_2} = \frac{P'_2 p_2}{P_2 p_2},$$

d'où

$$\rho = -(m-1) \frac{P'_1 p_1 \times P_2 p_2 - P'_2 p_2 \times P_1 p_1}{P_2 p_2 - P_1 p_1};$$

sous cette forme on voit immédiatement que la droite

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ P_1 p_1 & P'_1 p_1 & 1 \\ P_2 p_2 & P'_2 p_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

coupe $O\gamma$ en un point C tel que

$$OC = (m - 1)\rho.$$

D'où la construction suivante :

Soient O le point de contact de la courbe considérée avec la droite Δ , P_1 le pôle de Δ par rapport à l'une des courbes de base du faisceau donné, p_1 la projection de P_1 sur Δ , les tangentes menées de O à la conique polaire de O , par rapport à la courbe de base considérée, coupent P_1p_1 en α_1 et β_1 ; soit γ_1 l'orthocentre du triangle $O\alpha_1\beta_1$, la parallèle à $P_1\gamma_1$ menée par O coupe P_1p_1 en P'_1 , la parallèle à Δ menée par P'_1 coupe la perpendiculaire à Δ en O au point K , prenons sur KP'_1 dans le sens KP'_1 un segment $\overline{KR_1} = \overline{P_1p_1}$ et construisons de même avec la seconde courbe de base le point R_2 , la droite R_1R_2 coupe OK en un point C tel que $OC = (m - 1)\rho$, ρ étant le rayon de courbure cherché.

Remarque. — La construction précédente s'appliquera immédiatement dans les très nombreux cas où l'équation tangentielle d'une courbe s'écrit

$$P_1P_2 \dots P_n + \lambda Q_1Q_2 \dots Q_n = 0,$$

$P_1P_2 \dots P_n$, $Q_1Q_2 \dots Q_n$ étant des points ou des coniques, différents ou confondus.

En particulier, elle permet de résoudre immédiatement les problèmes suivants :

Construire le rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît cinq tangentes.

Une conique touchant les côtés d'un triangle en α , β , γ , construire le rayon de courbure en l'un de ces points.