

E.-N. BARISIEN

Égalité entre deux arcs d'une ellipse et d'un limaçon de Pascal

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 225-230

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__225_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'2c]

**ÉGALITÉ ENTRE DEUX ARCS D'UNE ELLIPSE
ET D'UN LIMAÇON DE PASCAL ;**

PAR M. E.-N. BARISIEN.

I.

Considérons tout d'abord l'ellipse d'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soit M un point sur l'ellipse dont l'angle d'anomalie

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVI. (Mai 1916.)

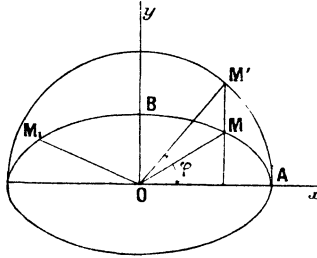
excentrique est φ . Les coordonnées de ce point sont

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi;$$

d'où

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = b \cos \varphi \, d\varphi.$$

Fig. 1.



On a donc pour l'élément d'arc d'ellipse

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Or, le demi-diamètre conjugué à OM, OM₁ a pour valeur

$$OM_1 = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Donc

$$\frac{ds}{d\varphi} = OM_1.$$

Si A est le sommet (a, 0) l'arc AM de l'ellipse est donné par la formule

$$(1) \quad s_{AM} = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi.$$

II.

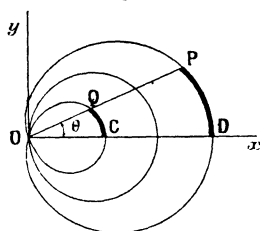
Considérons maintenant le limaçon de Pascal dont l'équation polaire est

$$r = A \cos \theta + B.$$

L'élément d'arc de cette courbe est

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(A \cos \theta + B)^2 + A^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \\ &= \sqrt{(A^2 + B^2) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2AB \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \sqrt{(A+B)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (A-B)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Fig. 2.



Si O est le point double du limaçon (ou pôle), si C et D sont les sommets tels que

$$OC = A - B, \quad OD = A + B,$$

les arcs PD et QC correspondant à l'angle θ ont pour valeurs

$$(2) \quad s_{PD} = 2 \int_0^{\theta} \sqrt{(A+B)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (A-B)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$(3) \quad s_{QC} = 2 \int_0^{\theta} \sqrt{(A-B)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (A+B)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Pour comparer les formules (2) et (3) à la formule (1), posons

$$\theta = 2\psi = 180^\circ - 2\omega,$$

$$\frac{\theta}{2} = \psi = 90^\circ - \omega.$$

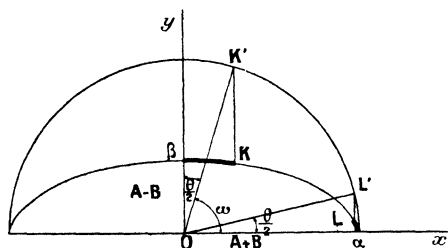
On a alors

$$(4) \quad s_{PD} = 2 \int_{\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}^{\omega = \frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2 \sin^2 \omega + (A-B)^2 \cos^2 \omega} \, d\omega,$$

$$(5) \quad s_{QC} = 2 \int_{\psi=0}^{\psi = \frac{\theta}{2}} \sqrt{(A+B)^2 \sin^2 \psi + (A-B)^2 \cos^2 \psi} \, d\psi.$$

Construisons l'ellipse de demi-axes $(A+B)$ et $(A-B)$ et son cercle principal.

Fig. 3.



Soient les demi-axes

$$O\alpha = A+B, \quad O\beta = A-B.$$

Soient L' et K' des points du cercle principal tels que

$$\widehat{L'O\alpha} = \frac{\theta}{2}, \quad \widehat{K'O\beta} = \frac{\theta}{2}.$$

Si L et K sont les points de l'ellipse correspondant à L' et K' , on a les deux égalités d'arcs

$$(6) \quad \text{arc PD (limaçon)} = 2 \text{ arc } \beta K \text{ (ellipse)},$$

$$(7) \quad \text{arc QC (limaçon)} = 2 \text{ arc } L\alpha \text{ (ellipse)}.$$

III.

Périmètre du limaçon. — On l'obtient soit par l'arc PD , soit par l'arc QC .

L'arc PD, formule (2), donne pour l'arc total du limaçon

$$(8) \quad \begin{cases} S = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{(A+B)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (A-B)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ S = 4 \int_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2 \sin^2 \omega + (A-B)^2 \cos^2 \omega} d\omega. \end{cases}$$

L'arc QC, formule (3), donne de même

$$(9) \quad \begin{cases} S = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sqrt{(A+B)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + (A-B)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ S = 4 \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} \sqrt{(A+B)^2 \sin^2 \psi + (A-B)^2 \cos^2 \psi} d\psi. \end{cases}$$

Les formules (8) et (9) démontrent donc le joli résultat suivant :

Le périmètre d'un limaçon de Pascal est équivalent au périmètre de l'ellipse qui a pour demi-axes les distances du point double (ou pôle) à chacun des sommets du limaçon.

Lorsque le limaçon devient une cardioïde, alors $B=A$, l'ellipse devient la *droite aplatie* de longueur $4A$ dont le périmètre est bien $8A$. C'est la longueur connue de la cardioïde dont le cercle de base de la conchoïde a pour diamètre A .

Réciproquement, si l'on pose

$$a = A + B, \quad b = A - B,$$

on en déduit

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad B = \frac{a-b}{2}.$$

On peut donc dire que :

Le périmètre d'une ellipse donnée est équivalent à celui du limaçon de Pascal dont le cercle générateur, base de la conchoïde, a pour diamètre le $\frac{1}{4}$ de la somme des axes, et pour constante modulaire le $\frac{1}{4}$ de la différence de ces axes.