

I.-J. SCHWATT

## Note sur la sommation d'une série

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1916), p. 203-209

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1916\\_4\\_16\\_\\_203\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__203_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

[D2b<sub>7</sub>]

## NOTE SUR LA SOMMATION D'UNE SÉRIE ;

PAR M. I.-J. SCHWATT,

Professeur à l'Université de Pensylvanie,  
Philadelphia, Pa. ( U. S. A. ).

( Traduit de l'anglais. )

Il s'agit de trouver la somme indiquée par la formule

$$(1) \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a + kh},$$

où  $a$  et  $h$  sont des entiers positifs.

I. Soit

$$a = nh;$$

alors

$$\begin{aligned} (2) \quad S &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{n + k} \\ &= \frac{(-1)^n}{h} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{h} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k} \right]. \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\log 2;$$

donc

$$(3) \quad S = \frac{(-1)^{\frac{a}{h}}}{h} \log \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{\frac{a}{h}}}{h} \sum_{k=1}^{\frac{a}{h}-1} (-1)^k \frac{1}{k}.$$

Si  $a = h = 1$ ,

$$(4) \quad S = -\log \frac{1}{2} = \log 2.$$

II. Soit

$$a = b + nh \quad (b < h);$$

alors

$$\begin{aligned} (5) \quad S &= (-1)^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{b + kh} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{b + kh} \right] \\ &= (-1)^n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{b + kh} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{1}{a - kh} \right] \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{b + kh} + \sum_{k=1}^{\left[ \frac{a}{h} \right]} (-1)^{k-1} \frac{1}{a - kh}. \end{aligned}$$

Si  $a < h$ , la dernière sommation se réduit à zéro.

Soit maintenant

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{b + kh} = S_1$$

et

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^{b+kh}}{b + kh} = S_2,$$

alors

$$S_1 = \lim_{r \rightarrow 1} S_2.$$

De (7) s'ensuit la relation

$$(8) \quad \frac{dS_2}{dr} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^{b+kh-1} = \frac{r^{b-1}}{1 + r^h},$$

et, par conséquent,

$$(9) \quad S_2 = \int_0^r \frac{r^{b-1}}{1 + r^h} dr.$$

Soit

$$(10) \quad \frac{r^{b-1}}{1+r^h} = \sum_{k=1}^h \frac{A_k}{r-s_k}, \quad \text{où} \quad s_k = e^{\frac{2k-1}{h}\pi i}$$

Nous avons alors

$$(11) \quad A_k = s_k^{b-1} \left( \frac{r-s_k}{1+r^h} \right)_{r=s_k} = s_k^b \frac{1}{h s_k^h}.$$

Mais

$$s_k^h = 1;$$

donc

$$(12) \quad A_k = -\frac{s_k^b}{h}$$

et

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{r^{b-1}}{1+r^h} &= -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \frac{s_k^b}{r-s_k} \\ &= -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \frac{s_k^b}{s_k-r}. \end{aligned}$$

De là

$$(14) \quad S_2 = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h s_k^b \log \frac{s_k-r}{s_k}$$

et

$$(15) \quad S_1 = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h s_k^b \log(1-s_k^{-1}),$$

$$(16) \quad S = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \left[ \cos(2k-1) \frac{b\pi}{h} + i \sin(2k-1) \frac{b\pi}{h} \right] \\ \times \log \left[ 1 - \cos(2k-1) \frac{\pi}{h} + i \sin(2k-1) \frac{\pi}{h} \right],$$

$$(17) \quad S = -\frac{1}{h} \left[ \sum_{k=1}^h \cos(2k-1) \frac{b\pi}{h} \log \left( 2 \sin \frac{2k-1}{2h} \pi \right) \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{2k-1}{h} \right) \sin \frac{2k-1}{h} b\pi \right].$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^h \cos(2k-1) \frac{b\pi}{h} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^h \sin(2k-1) \frac{b\pi}{h} = 0$$

et

$$\sum_{k=1}^h (2k-1) \sin(2k-1) \frac{b\pi}{h} = -\frac{h}{\sin \frac{b\pi}{h}},$$

on a donc

$$(18) \quad S_1 = \frac{\pi}{2h \sin \frac{b\pi}{h}} - \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\left[\frac{h}{2}\right]} \cos(2k-1) \frac{b\pi}{h} \log \sin \frac{2k-1}{2h} \pi,$$

formule où  $\left[\frac{h}{2}\right]$  représente la partie entière de  $\frac{h}{2}$ .

De là

$$(19) \quad S = (-1)^{\left[\frac{a}{h}\right]} \frac{\pi}{2h \sin \frac{b\pi}{h}} - \frac{2(-1)^{\left[\frac{a}{h}\right]}}{h} \sum_{k=1}^{\left[\frac{h}{2}\right]} \cos(2k-1) \frac{b\pi}{h} \\ \times \log \sin \frac{2k-1}{2h} \pi + \sum_{k=1}^{\left[\frac{a}{h}\right]} (-1)^{k-1} \frac{1}{a-kh}.$$

1° Si  $a = 1$ ,  $h = 2$ ,  $b = 1$ ,  $\left[\frac{a}{h}\right] = 0$ ,

$$(20) \quad S = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^1 \cos \frac{2k-1}{2} \pi \log \sin \frac{2k-1}{4} \pi \\ = \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \log \tan \frac{\pi}{4} \\ = \frac{\pi}{4}.$$

2° Si  $a = 1$ ,  $h = 3$ ,

$$\begin{aligned} (21) \quad S &= \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{3}} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^1 \cos \frac{2k-1}{3} \pi \log \sin \frac{2k-1}{6} \pi \\ &= \frac{1}{9} \pi \sqrt{3} + \frac{1}{3} \log 2. \end{aligned}$$

3° Si  $a = 1$ ,  $h = 4$ ,

$$\begin{aligned} (22) \quad S &= \frac{\pi}{8 \sin \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \cos \frac{2k-1}{4} \pi \log \sin \frac{2k-1}{8} \pi \\ &= \frac{\pi \sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \log \left( \tan \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \frac{\pi \sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \log (\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

4° Si  $a = 1$ ,  $h = 5$ ,

$$\begin{aligned} (23) \quad S &= \frac{\pi}{10 \sin \frac{\pi}{5}} - \frac{2}{5} \sum_{k=1}^2 \cos \frac{2k-1}{5} \pi \log \sin \frac{2k-1}{10} \pi \\ &= \frac{\pi}{10} \sqrt{2 + \frac{2}{5} \sqrt{5}} - \frac{2}{5} \left( \cos \frac{\pi}{5} \log \sin \frac{\pi}{10} \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\pi}{10} \log \cos \frac{\pi}{5} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left[ \frac{\pi}{2} \sqrt{2 + \frac{2}{3} \sqrt{5}} + (1 - \sqrt{5}) \log 2 + \sqrt{5} \log (1 + \sqrt{5}) \right]. \end{aligned}$$

5° Si  $a = 1$ ,  $h = 6$ ,

$$\begin{aligned} (24) \quad S &= \frac{\pi}{12 \sin \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \cos \frac{2k-1}{6} \pi \log \sin \frac{2k-1}{12} \pi \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cos \frac{1}{6} \pi \log \tan \frac{1}{12} \pi \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{3} \log (2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

( 208 )

6° Si  $a = 1$ ,  $h = 8$ ,

$$\begin{aligned}
 (25) \quad S &= \frac{\pi}{16 \sin \frac{\pi}{8}} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \cos \frac{2k-1}{8} \pi \log \sin \frac{2k-1}{16} \pi \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}} - \frac{1}{4} \left( \cos \frac{1}{8} \pi \log \tan \frac{1}{16} \pi + \sin \frac{1}{8} \pi \log \tan \frac{3}{16} \pi \right) \\
 &= \frac{\pi}{8} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}} \\
 &\quad - \frac{1}{8} \{ (\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}) \log [ (\sqrt{2} + 1) (\sqrt{2(2 - \sqrt{2})} - 1) ] \\
 &\quad + \sqrt{2} - \sqrt{2} \log [ 2(\sqrt{2} - 1) (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 1) + 1 ] \}.
 \end{aligned}$$

Les résultats des exemples ci-dessus peuvent aussi être obtenus par la méthode suivante. Prenons le cas où  $a = 1$  et  $h = 8$ , c'est-à-dire

$$(26) \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{8k+1}.$$

Soit

$$(27) \quad S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^k}{8k+1}.$$

Alors

$$S = \lim_{r \rightarrow 1} S_1.$$

Si  $u_k$  représente le  $(k+1)^{\text{ième}}$  terme de  $S_1$ , alors

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = -r \frac{8k-7}{8k+1}.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (8k+1) u_k = -r \sum_{k=0}^{\infty} (8k+1) u_k + 1$$

ou

$$(28) \quad 8r(1+r) \frac{dS_1}{dr} + (1+r) S_1 = 1.$$

Résolvant cette équation différentielle en  $S_1$ , nous

( 209 )

obtenons

$$\begin{aligned}
 (29) \quad S_1 &= \frac{1}{8r^8} \int_0^1 \frac{dr}{r^8(1+r)} \\
 &= \frac{1}{r^8} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^8}
 \end{aligned}$$

et

$$(30) \quad S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^8}.$$

Le résultat obtenu par l'évaluation de cette intégrale est le même que celui qu'indique la formule (25).