

JOSEPH JOFFROY

Solution du problème de Pappus généralisé

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 168-171

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__168_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

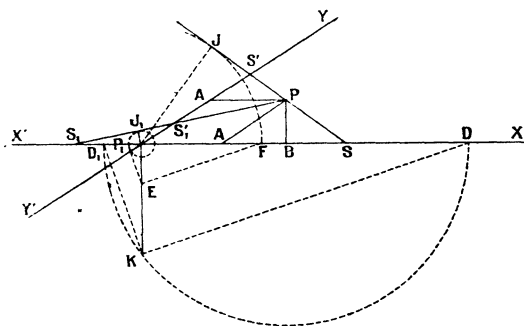
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'1]

SOLUTION DU PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ ;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire.

Ce problème peut s'énoncer ainsi : dans un angle *quelconque* XOY ou ω inscrire une droite SS' de longueur l donnée et passant par P, point de la bissectrice de ω . Jusqu'à ce jour le cas particulier de ω droit a été seul résolu par l'emploi d'une équation du



deuxième degré. P (*voir* la figure) est déterminé par le losange A'OAP de côté a . Posons $OS = x$, $OS' = y$.

Les triangles semblables OS'S, APS donnent

$$(1) \quad \frac{y}{a} = \frac{x}{x-a} \quad \text{ou} \quad xy = a(x+y).$$

Dans le triangle OSS', on a

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \omega = l^2$$

ou

$$(2) \quad (x+y)^2 - 2xy(1 + \cos \omega) = l^2.$$

Éliminant xy entre (1) et (2), j'obtiens

$$(E) \quad (x+y)^2 - 2a(1 + \cos \omega)(x+y) - l^2 = 0,$$

équation du deuxième degré en $x+y$ dont la racine positive, qui convient à mon problème, est

$$x+y = a(1 + \cos \omega) + \sqrt{a^2(1 + \cos \omega)^2 + l^2} = A.$$

J'ai donc

$$x+y+A$$

et

$$xy = Aa.$$

On sait construire $x+y$ et $\sqrt{xy}$, puis x et y . On calcule x et y qui sont les racines de

$$(E') \quad z^2 - Az + Aa = 0.$$

$x = OS$ étant connu, la sécante SS' est déterminée. La sécante symétrique de celle-ci par rapport à la bissectrice est la seconde solution. La valeur absolue de la racine négative de l'équation (E) déterminerait les deux autres droites, solutions, l'une dans l'angle YOX' , l'autre dans XOY' : on le vérifiera en supposant, comme je l'ai fait, le problème résolu.

Si j'avais éliminé x ou y au lieu de xy ou $x+y$, j'aurais obtenu une équation complète du quatrième degré et j'en aurais conclu que le problème général de

Pappus ne peut pas être résolu *graphiquement* : c'est ce qui a été cru jusqu'à ce jour. Quant aux quatre racines de cette équation du quatrième degré en x ou en y , leurs valeurs sont celles qui satisfont à l'équation (E). En résolvant l'équation du quatrième degré on obtiendrait des expressions égales à celles que j'ai trouvées ci-dessus, mais bien plus compliquées (ce serait un exercice de concours).

Voici une solution de mon problème plus élégante que ma précédente.

Soit $OJ = R$ perpendiculaire à la sécante SS' qu'il s'agit de placer. J'ai encore

$$xy = a(x + y), \quad (x + y)^2 - 2xy(1 + \cos \omega) = l^2.$$

J'ai aussi

$$xy \sin \omega = Rl,$$

double du triangle OSS' .

Éliminant xy et $x + y$ entre ces trois équations, j'obtiens

$$(J) \quad lR^2 - 2a^2 \sin \omega (1 + \cos \omega) R - a^2 l \sin^2 \omega = 0,$$

$$R = \frac{a \sin \omega}{M} [a(1 + \cos \omega) \pm \sqrt{a^2(1 + \cos \omega)^2 + l^2}].$$

La valeur positive de R convient pour la construction de SPS' . Sa valeur négative convient pour la construction de la sécante $S_1 S'_1 P$, solution dans YOX' (on le vérifiera). J'ai donc, si j'appelle R_1 la perpendiculaire OJ_1 à cette sécante

$$R_1 = \frac{a \sin \omega}{l} [-a(1 + \cos \omega) + \sqrt{a^2(1 + \cos \omega)^2 + l^2}],$$

avec

$$R = \frac{a \sin \omega}{l} [a(1 + \cos \omega) + \sqrt{a^2(1 + \cos \omega)^2 + l^2}].$$

J'abaisse PB perpendiculaire à OX : j'ai

$$a \sin B = PB = b, \quad a(1 + \cos \omega) = OB = c,$$

et je puis écrire

$$R = \frac{b}{l} [c + \sqrt{c^2 + l^2}], \quad R_1 = \frac{b}{l} [-c + \sqrt{c^2 + l^2}].$$

On voit que R, R_1 n'exigent que la construction d'un seul triangle rectangle et de deux quatrièmes proportionnelles.

Construction la plus rapide de R, R_1 . $OK = l$ est perpendiculaire à OX, BK vaut $\sqrt{c^2 + l^2}$, OD vaut $c + \sqrt{c^2 + l^2}$, OD_1 vaut $-c + \sqrt{c^2 + l^2}$, OE égale $PB = b$. EF est parallèle à KD, EF_1 est parallèle à KD_1 . La quatrième proportionnelle OF vaut R , la quatrième proportionnelle OF_1 vaut R_1 . De O je décris un cercle de rayon R , un cercle de rayon R_1 . De P je leur mène les tangentes PJ, PJ_1 et leurs symétriques par rapport à la bissectrice de XOY. Les quatre tangentes sont les quatre solutions du problème de Pappus que j'ai généralisé et résolu grâce à un changement de variable, grâce à une idée bien simple, celle de remplacer $x^2 + y^2$ par $(x + y)^2 - 2xy$!