Nouvelles annales de mathématiques

J. Haag

Sur les courbes unicursales à arc rationnel

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 75-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__75_1>

[O¹2]

SUR LES COURBES UNICURSALES A ARC RATIONNEL;

Par M. J. HAAG,
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Sous ce titre, nous entendons les courbes dont les coordonnées et l'abscisse curviligne du point courant peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un même paramètre.

Je dis que toutes ces courbes peuvent être obtenues de la manière suivante :

Soient θ et p deux fonctions rationnelles quelconques de t, θ' et p' leurs dérivées. L'enveloppe (C) *de la droite*

$$\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}x + \frac{2\theta}{1+\theta^2}y = \frac{1+\theta^2}{2}\frac{p'}{\theta'} \tag{1}$$

est la plus générale des courbes cherchées.

1° *Cette enveloppe répond bien à la question.* — En effet, tout d'abord, les coordonnées x, y du point de contact, déduits de l'équation (1) par des calculs rationnels, sont des fonctions rationnelles de t.

En second lieu, si nous posons $\theta = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, l'équation (1) devient

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{dp}{d\varphi}. \tag{2}$$

Elle provient, par dérivation par rapport à φ, de la suivante

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = p, \tag{3}$$

laquelle représente une droite, dont l'enveloppe (C′) admet (C) pour développée. Or, on sait que l'arc s de (C) égale le rayon de courbure R de (C′), lequel est, comme on le sait aussi, donné par la formule

$$s = R = -\left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right). \tag{4}$$

Cette formule conduit manifestement à une expression rationnelle en t.

2° *Cette courbe* (C) *répondant à la question peut être obtenue de la manière précédente.* — Supposons que x, y, s soient fonctions rationnelles d'un même paramètre t. Si α désigne l'angle polaire de la demitangente positive, on a

$$(5)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{s'}.$$

Ces cosinus et sinus sont fonctions rationnelles de t.

L'équation de la tangente s'écrit, d'autre part,

$$(6)\qquad \mathrm{X}\sin\alpha - \mathrm{Y}\cos\alpha = x\sin\alpha - y\cos\alpha = q.$$

Or, on a

$$p = \int q\,d\alpha = \int x\sin\alpha\,d\alpha - \int y\cos\alpha\,d\alpha$$
$$= -x\cos\alpha - y\sin\alpha + \int \cos\alpha\,dx + \int \sin\alpha\,dy,$$

$$(7)\qquad p = -x\cos\alpha - y\sin\alpha + \int ds(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$= s - x\cos\alpha - y\sin\alpha.$$

Cette expression est manifestement rationnelle par rapport à t, en vertu des hypothèses.

Ceci étant, si nous posons $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \theta$, l'équation (6) s'écrit successivement

$$\mathrm{X}\cos\varphi + \mathrm{Y}\sin\varphi = \frac{dp}{d\alpha} = \frac{dp}{d\varphi},$$

$$\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\mathrm{X} + \frac{2\theta}{1+\theta^2}\mathrm{Y} = \frac{dp}{d\theta}\,\frac{1+\theta^2}{2}.$$

On retrouve l'équation (1). Notre réciproque sera donc finalement établie, si nous prouvons que θ est rationnel en t. Or, ceci résulte de l'identité

$$\theta = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$

et de la rationnalité de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$.