NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Sur les coniques inscrites à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 15 (1915), p. 70-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1915_4_15__70_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[$L^1 4$]

SUR LES CONIQUES INSCRITES A UN TRIANGLE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

1. Soient un triangle ABC; A', B', C' les pieds des hauteurs; H l'orthocentre; A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés.

Considérons une conique quelconque Σ inscrite à ce triangle, et une quatrième tangente Δ à la courbe, qui coupe AC et CB respectivement en D et E. On sait que le centre I de la conique Σ est situé sur la médiane Δ' du quadrilatère circonscrit formé par les quatre droites Δ, AC, CB, BA.

De plus, les cercles ω_1, ω_2, ω_3, décrits sur les diagonales du quadrilatère complet comme diamètres, se coupent en deux points P et Q et la droite PQ contient les orthocentres des quatre triangles formés par les quatre précédentes droites.

Si nous supposons donc variable la droite Δ, *le* *triangle* ABC *et la conique* Σ *restant fixes, la droite variable* PQ *passe en un point fixe* H, *orthocentre de* ABC.

2. Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, ω le milieu de OH, L celui de PQ, et proposons-nous de calculer la distance $I\omega$.

D'après ce qui précède (I étant situé sur Δ'), IL est perpendiculaire sur PQ en son milieu, et

$$\overline{IP}^2 - \overline{IH}^2 = \overline{LP}^2 - \overline{LH}^2 = (LP + LH)(LP - LH)$$
$$= PH \times HQ = BH \times HB' = \frac{1}{2}\left(R^2 - \overline{OH}^2\right),$$

R étant le rayon du cercle circonscrit O ; d'où visiblement, dans le triangle OIH,

$$2\overline{IH}^2 - \overline{OH}^2 = 2\overline{IP}^2 - R^2 = 4\overline{I\omega}^2 - 2\overline{OI}^2.$$

On obtient ainsi finalement

$$(1) \qquad 4\overline{I\omega}^2 = 2\overline{IP}^2 + 2\overline{OI}^2 - R^2.$$

3. Supposons que la tangente Δ soit perpendiculaire à CB; alors, PQ se confond en direction avec HE. Q vient en E, qui est situé sur CB et sur le cercle orthoptique de la conique Σ.

La relation (1) devient, $2a$ et $2b$ étant les axes de la conique,

$$(2) \qquad 4\overline{I\omega}^2 = 2(a^2 + b^2) + 2\overline{OI}^2 - R^2.$$

On en déduit immédiatement que :

Le lieu géométrique des centres des coniques inscrites à un triangle donné, et telles que leur cercle orthoptique soit de rayon donné ρ, *est une circonférence* H *dont le centre est l'orthocentre du triangle* *et dont le rayon ρ_1 est donné par la relation*

$$(3) \qquad \rho_1^2 = 2\rho^2 - \frac{1}{2}\left(R^2 - \overline{OH}^2\right).$$

En effet,

$$4\overline{I\omega}^2 - 2\overline{OI}^2 = 2(a^2 + b^2) - R^2 = 2\rho^2 - R^2 = \text{const.}$$

4. Le cercle inscrit I au triangle ABC est l'une des coniques Σ inscrites à ce triangle; son cercle orthoptique lui est concentrique et de rayon $\rho = r\sqrt{2}$, r étant celui du cercle inscrit.

En remplaçant dans (2) la valeur de OI donnée par Euler, il vient

$$I\omega = \frac{R}{2} - r,$$

et le théorème de Feuerbach :

Dans un triangle quelconque, le cercle inscrit est tangent au cercle des neuf points,

est ainsi établi.

Inversement, si l'on suppose donné ce théorème de Feuerbach, la relation (2) donne pour $\overline{OI}^2$ la valeur trouvée par Euler.

5. Écrivons

$$\frac{1}{2}\left(\overline{OH}^2 - R^2\right) = (H),$$

(H) désigne la valeur algébrique commune aux produits

$$\overline{HA} \times \overline{HA'}, \qquad \overline{HB} \times \overline{HB'} \qquad \text{et} \qquad \overline{HC} \times \overline{HC'}.$$

L'expression (3), qui devient alors

$$\rho_1^2 = 2\rho^2 + (H),$$

fait apparaître aussitôt la valeur donnée par Steiner, de la distance de l'orthocentre au centre du cercle inscrit au triangle

$$\overline{HI}^2 = 2r^2 + (H).$$

Nous obtenons ainsi, d'une façon remarquablement simple et élémentaire, le résultat de démonstrations directes de Mannheim et de M. Fontené relativement au calcul de HI [1].

ρ, pouvant désigner la distance de l'orthocentre d'un triangle donné à un point quelconque de son plan, on obtient pour ρ les valeurs particulières suivantes :

$$\rho_G^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36}$$

(a, b, c côtés du triangle), lorsque le centre de la conique est au point de concours G des médianes du triangle ;

$$\rho_{(H)}^2 = -\frac{(H)}{2} = \frac{1}{2}\left(R^2 - \overline{OH}^2\right),$$

quand le centre de la conique est à l'orthocentre H du triangle. Cette valeur n'est d'ailleurs réelle que lorsque le triangle est acutangle. La conique touche les côtés en trois points α, β, γ obtenus, par exemple, en joignant le sommet A au point où A_1H rencontre B_1C_1 ;

$$\rho_0^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

si le centre de la conique est au centre O du cercle circonscrit.

Nous avons signalé ce cercle comme curieux dans les

---

[1] FONTENÉ, *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, 1904, p. 38-243 ; 1906, p. 289. — MANNHEIM, *Ibid.*, 1906, p. 90.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1910, p. 280. Nous ajouterons que *ce cercle O est tel que le triangle podaire, par rapport au triangle* ABC, *de tout point de sa circonférence est équivalent au triangle orthique* A′B′C′ *de* ABC.

On sait en effet, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ étant le triangle podaire d'un point quelconque P de la circonférence O de rayon ρ_0, que

$$\frac{\text{aire}\,\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\text{aire ABC}} = \frac{R^2-\rho_0^2}{4R^2} = \frac{-(H)}{4R^2},$$

d'où

$$\text{aire}\,\alpha_1\beta_1\gamma_1 = S\times\frac{(H)}{4R^2} = S\times\frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{4R^2}$$

($S =$ aire ABC).

6. Dans tout triangle ABC obtusangle, (H) est positif et le cercle H de rayon $\rho'^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{OH}^2 - R^2\right)$ est dit *conjugué* par rapport au triangle ABC. L'expression (3) permet alors d'énoncer ce théorème :

Quand une conique est inscrite à un triangle obtusangle, son cercle orthoptique est orthogonal au cercle conjugué à ce triangle.

En particulier :

Le cercle conjugué à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle inscrit à ce triangle.

M. Fontené a énoncé ces théorèmes après la solution de sa question 1468 (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, 1904, p. 39). Il y a ajouté les suivants, en partant de la valeur de la distance $\overline{HO}^2$, donnée par Faure,

$$\overline{HO}^2 = R^2 + 2(H),$$

que l'on peut écrire

$$\overline{HO}^2 = (\rho'\sqrt{2})^2 + R^2.$$

Quand une conique est conjuguée à un triangle, son cercle orthoptique est orthogonal au cercle circonscrit au triangle.

Ainsi, *le cercle circonscrit à un triangle obtusangle est orthogonal au cercle orthoptique du cercle conjugué à ce triangle.*

Réciproquement, *si deux cercles sont tels que le cercle orthoptique du premier soit orthogonal au second, il existe une infinité de triangles circonscrits au premier et conjugués au second, une infinité de triangles conjugués au premier et inscrits au second.*